内容提要

本书以易于接受的流畅的语言，系统地介绍了群论的基础、有限群和李群的表示论的一般原理、半单李代数的基本概念和具体表示、半单李群的局域性及整体性质；同时重点介绍了置换群、空间点群、李群等在晶体结构、量子力学、核物理、粒子物理及工程技术中的应用。本书一般采用从现实问题引入正题，附有大量的实例与问题，而问题大多有提示，便于读者阅读与自学。在介绍应用中以方法论为重点。本书力求阐明近代群论所蕴含的近代代数、拓扑和流形的科学内涵，尽可能反映群论及其应用研究的最新成果。本书是物理、化学、生物、应用数学及相关工程技术专业的优秀研究生教材，也是相关专业科技工作者的难得的参考书。

Abstract

This book expounds the fundamentals ,the general principle of the finite groups and the Lie groups, the basic Concepts and the Concrete Representations of Semisimple Lie Algebras. The local and glober properties of Semisimple Lie groups. Systematically by means of acceptable fashion ,and outlines the applications of the permutation group. The spceace-point group and Lie groups for lattic structure. Quantum mechnics ,the nuclear physics, the elementary particles physics and The technology. The contents' arranegment are from real concrete examples to the main text ,the book has real concrete examples and exercises, which are attached to poine out largely for the readers' easy understanding and self-study to this book. In indruducing corresponding applications, the methodology is emphasis. The book exposes Scientific intrinsic quality of the modern algebras ,the topology and manifold containning by modern group theory deeply ,and expresses the latest researching results for group theory and its applications possibly. This book is an excellent ,postgraduate texbook for physics ,chemistry ,biology , Applied mathematics and related project texlogy ,and is also a prominent reference's book for related Natural science' specialities.

写在“研究生用书”出版10周年

在今天，面对科技的迅速发展，知识经济的已见端倪，国际竞争也日趋激烈，显然，国家之间的竞争是国家综合实力的竞争，国家综合实力的竞争关键是经济实力的竞争，而经济实力的竞争关键又在于科技（特别是高科技）的竞争，科技（特别是高科技）的竞争归根结底是人才（特别是高层次人才）的竞争，而人才（特别是高层次人才）的竞争基础又在于教育。“百年大计，教育为本；国家兴亡，人才为基。”十六个字、四句话，确是极其深刻的论断。目前，国际形势清楚表明：我们国家的强大与民族的繁荣，主要立足于自己，以“自力更生”为主；把希望寄托于他人，只是一种不切实际的幻想。这里，我们决不是要再搞“闭关锁国”，搞“自我封闭”，因为那是没有出路的；我们强调的是要“自信，自尊，自立，自强”，要“自力更生”为主，走自己发展的道路。

显然，知识经济最关键的是人才，是高层次人才的培养，而作为高层次人才培养的研究生教育就在一个国家的方方面面的工作中，占有十分重要的战略地位。可以说，没有研究生教育，就没有威伟雄壮的科技局面，就没有国家的强大实力，就没有国家在国际上的位置，就会挨打，就会受压，就会被淘汰，还说什么知识经济与国家强大？！

“工欲善其事，必先利其器。”教学用书是教学的重要

基本工具与条件。这是所有从事教育的专家所熟知的事实。所以，正如许多专家所知，也正是原来的《“研究生用书”总序》中所指出，研究生教材建设是保证与提高研究生教学质量的重要环节，是一项具有战略性的基本建设。没有研究生的质量，就没有研究生教育的一切。

我校从 1978 年招收研究生以来，即着力从事于研究生教材与教学用书的建设。积十多年建设与实践的经验，我校从 1989 年起，正式分批出版“研究生用书”。第一任研究生院院长陈珽教授就为之写了《“研究生用书”总序》，表达了我校编写这套用书的指导思想与具体要求，“要力求‘研究生用书’具备科学性、系统性、先进性”。后三任研究生院长，也就是各任校长黄树槐教授、我本人和周济教授完全赞同这一指导思想与具体要求，从多方面对这套用书加以关心与支持。

我是十分支持出版“研究生用书”的。早在 1988 年我在为列入这套书中的第一本，即《机械工程测试·信息·信号分析》写“代序”时就提出：一个研究生应该博览群书，博采百家，思路开阔，有所创见。但这不等于他在一切方面均能如此，有所不为才能有所为。如果一个研究生的主要兴趣与工作不在“这一特定方面”，他也可以选择一本有关的书作为了解与学习这方面专业知识的参考；如果一个研究生的主要兴趣在“这一特定方面”，他更应选择一本有关的书作为主要学习用书，寻觅主要学习线索，并缘此展开，博览群书。这就是我赞成为研究生编写系列教学用书的原因。

目前，这套书自第一本于 1990 年问世以来，已经渡

过了10个春秋，出版了8批共49种，初步形成规模，逐渐为更多读者所认可。在已出版的书中，有15种分获国家级、部省级图书奖，有16种一再重印，久销不衰。采用此套书的一些兄弟院校教师纷纷来信，赞誉此书为研究生培养与学科建设作出了贡献，解决了他们的“燃眉之急”。我们感谢这些赞誉与鼓励，并将这些作为对我们的鞭策与鼓励，“衷心藏之，何日忘之?!”

现在，正是江南春天，“最是一年春好处”。华工园内，红梅怒放，迎春盛开，柳枝油绿，梧叶含苞，松柏青翠，樟桂换新，如同我们的国家正在迅猛发展、欣欣向荣一样，一派盎然生机。尽管春天还有乍寒时候，我们国家在前进中还有种种困难与险阻，来自国内与来自国外的阻挠与干扰，有的还很严峻；但是，潮流是不可阻挡的，春意会越来越浓，国家发展会越来越好。我们教师所编的、所著的、所编著的这套教学用书，也会在解决前进中的种种问题中继续发展。然而，我们十分明白，这套书尽管饱含了我们教师的辛勤的长期的教学与科研工作的劳动结晶，作为教学用书百花园中的一丛鲜花正在怒放，然而总会有这种或那种的不妥、错误与不足，我衷心希望在这美好的春日，广大的专家与读者，不吝拔冗相助，对这套教学用书提出批评建议，予以指教启迪，为这丛鲜花除害灭病、抗风防寒，以进一步提高质量，提高水平，更上一层楼，我们不胜感激。我们深知，“一个篱笆三个桩”，没有专家的指导与支持，没有读者的关心与帮助，也就没有这套教学用书的今天。我衷心祝愿在我们学校第三次大发展的今天，在百年之交与千年之交的时候，这套教学用书会以更

雄健的步伐,走向更美好的未来。

诗云:“嘤其鸣矣,求其友声。”这是我们的心声。

中国科学院院士

华中理工大学学术委员会主任

杨叔子

于华工园内

1999 年 5 月 15 日

自 序

群论自19世纪伽罗华(Galois)创立以来，不仅成为近代代数的重要分支，而且其应用范围已深入到科学技术各个领域。尤其是自然科学的物理、化学和生物的研究中，群论已成为必不可少的强有力的数学工具。

由于客观世界普遍存在各种各样的对称性，而群论正是描述、反映和研究对称性的数学武器，因此从其诞生至今，就存在一个由纯粹数学领域扩展到其它自然科学领域的有趣现象。伽华罗利用群论方法证明了五次或五次以上的代数方法不能通过初等代数方法求得方程的精确解，随即在1890年—1891年，费德洛夫(Federov)和熊夫利(Schoen files)就牛刀初试，用群论方法系统解决了晶体结构分类问题，证明了具有周期性排列的空间点阵总共有230种，使人大开眼界。

1893年，挪威科学家李(Sophus Lie)和谢弗尔斯(Scheffer)将群论与微分方程结合起来，使有限群的概念扩展到无限群、连续群，导致现代李群的建立。20世纪，传统群论与现代拓扑学、流形的概念相结合，形成拓扑群的新理论。就在群论不断发展不断现代化的过程中，我们看到许多群论大师，如嘉当(E. Cantan)、维格勒(E. P. Wigner)、魏尔(H. Weyl)、拉卡(G. Racah)等等，同时又是物理大师。群论迅速在光谱学、角动量理论、原子核谱、量子力学等物理学领域得到广泛应用。

应该承认，群论直到20世纪50年代，对于大多数科学家还是过于抽象、不太切合实际的时髦新玩意。1951年，著名物理学家诺贝尔奖金获得者萨拉姆(A. Salam)，在普林斯顿聆听拉卡关于李群的讲演时，瞠目不知所云。他觉得这些复杂理论过于艰深，自己大概是难于学会的，似乎也无十分必要去弄懂它。

20世纪50年代末到60年代中期，在基本粒子研究中，SU(3)理论(所谓“8重道”方法)、夸克模型(其理论框架就是群)等的巨大成功，造成群论向物理学的一次“普及”热潮。耐人寻味的是，1963年，萨拉姆居然作了关于李群的报告，谆谆告诫听众，一定要及早地学好群论这一优美的理论，切勿重犯他的错误。短短10余年，潮流所及，影响之巨，从中可以窥见一斑。时至今日，群论的应用领域不仅遍及物理学各个领域，而且扩展到化学、生物、材料科学、流体力学、机械、电工学等等。从50年代末开始，群论课已逐渐成为物理专业、化学专业、材料科学技术有关专业等研究生的必修课。

作者自80年代主讲物理专业的研究生群论课以来，深感这门课的特殊性。作为一门数学课，其难度跨度极大，涉及的数学领域极广。按英国数学家莱德曼(W. Lederman)所说，群论的初等部分，应该能为有钻研精神的中学六年级(英国中学!)的学生所接受。但就其大多数内容，涉及分析、流形、拓扑、集合、近代代数等领域，要真正“彻底”、“严格”地搞清楚，即令对于萨拉姆这样的大科学家，也颇费周章。因此关于群论的教科书一直有两个系统的“版本”流传于世：一是数学专业用的较为“学院

式”的教本，再一个就是以应用为主要目的的群论教科书。本书是积笔者20年教学经验和科研心得编撰而成的，由于教学对象，自然属于以实用为目的的那个系统的教科书。这个系统教科书的共同特点是，不过于追求数学理论的完备与严格，避免使用读者不太熟悉的抽象艰深的数学概念和工具；尽可能从大家较为熟悉的具体事例出发，阐述有关概念；尽可能多地列举应用实例，以帮助读者在群论与应用之间搭起一架桥；语言尽可能浅近、易于接受。

本书取名“应用群论导引”的缘由，并非牺牲群论本身的系统性，去蜻蜓点水式地介绍群论在各领域的实例，而是在保证理论系统性的前提下，在教材内容的可接受性与应用的方法论两方面下了功夫。本书的显著特点是，不仅引入概念，阐述理论内容，附有大量例题，便于读者领悟群论概念的科学含义及深厚应用背景，同时在所有习题中，凡是需要提示的地方，尽量给予详尽提示。在作这些提示的时候，我想起朗道(L. Landau)、栗夫希兹(E. Liphishes)的那套著名的多卷本《理论物理教程》，人们从书中的“提示”获得多大教益啊！因此我希望这些提示会帮助读者掌握本书要旨，便于阅读与自学。我们还准备在适当的时候，出一本习题集。

本书的应用实例，以物理科学居多，但是也旁及了化学、材料科学和工程技术诸方面。作为应用的导引，本书着眼于方法论的阐述，希望读者从中收到举一反三之效。群论的应用范围太广，各个领域的应用都可写一本专著，因此本书的介绍只能算作“导引”。细心的读者会发现，在

篇幅允许的情况下，我们尽可能介绍有关领域的最新发展，但是过于专业化的内容也避免涉及。归根结底，本书是一本数学教科书。

全书分十章，其中第九章、第十章可以作为阅读材料，如果课时不足的话。

我的学生钟志成，自始至终参加全书的写作与定稿，不仅对书的内容、安排，多有创意，而且还为全书的校对、订正，付出大量精力。

作者感谢我的夫人彭芳明女士，没有她的鼎力相助，本书是无法完成的。作者还要对大力支持本书出版的华中理工大学出版社和华中理工大学研究生院余津宜同志表示感谢。

张端明

2000 年 8 月 16 日于喻家山蜗居

目　　录

第一章　群论基础

§1.1　对　称　性

对称性是自然界最普遍、最重要特性. 近代科学表明，自然界的所有重要的规律均与某种对称性有关，甚至所有自然界中的相互作用，都具有某种特殊的对称性——所谓"规范对称性". 实际上，对称性的研究的日趋深入，已越来越广泛地应用到物理的各个分支：量子论、高能物理、相对论、原子与分子物理、晶体物理、原子核物理，以及化学（分子轨道理论、配位场理论等）、生物（DNA 的构型对称性等）和工程技术.

什么是对称性？按照英国《韦氏国际辞典》中的定义："对称性乃是分界线或中央平面两侧各部分在大小、形状和相对位置的对应性."这里追溯到最直观、最早为人们熟知的所谓几何对称性. 该辞典又说，对称性是"适当或协调的比例，以及由这种和谐产生的形式美". 这里依然谈的是空间的几何对称性，尽管涉及对称性的美学属性.

实际上，对称性的现代科学概念极难定义，几乎成为了规律和和谐的同义语，它跟所谓不变性、守恒律往往结下不解之缘.

要而言之，对称性分两大类：与时间、空间有关的，称为几何对称性；否则称为内禀对称性.

例 1　两端无限延伸的直线，上面有等距离 a 的刻度（图 1.1）.

直线向左或向右平行移动 a 的整数倍，仍然与原直线重合（不变性），或相对任一刻度点或两相邻刻度点的中点进行反演，亦与

原直线重合，故该直线具有等距离 a 的整数倍的平移对称性和相对刻度点（中点）的反演不变性.

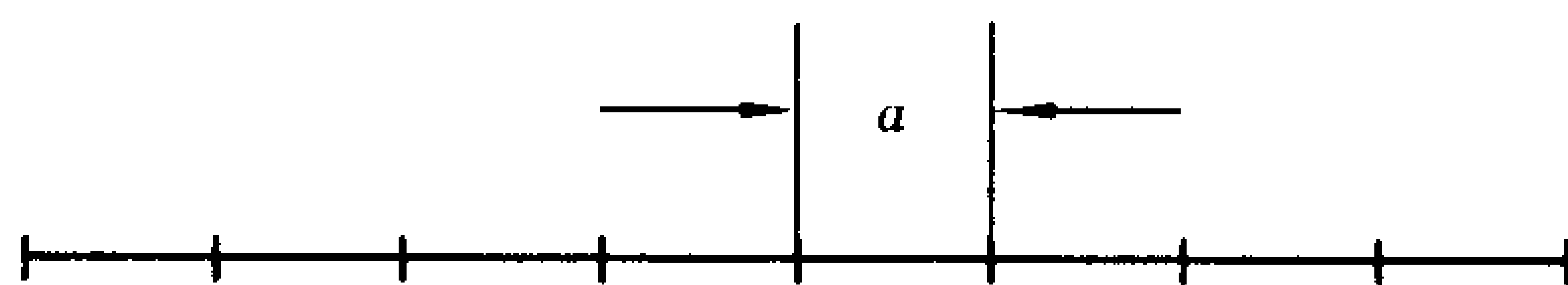


图 1.1 有等距离刻度的无限直线

例 2 等边三角形（图 1.2）和直圆柱体（图 1.3）.

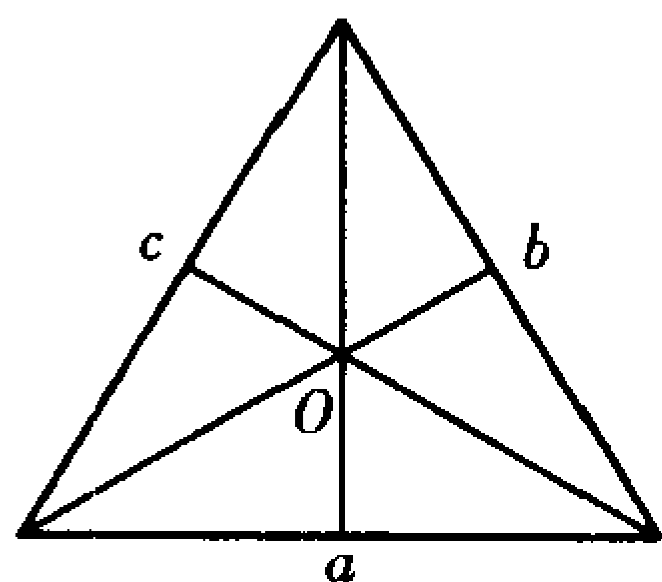


图 1.2 等边三角形

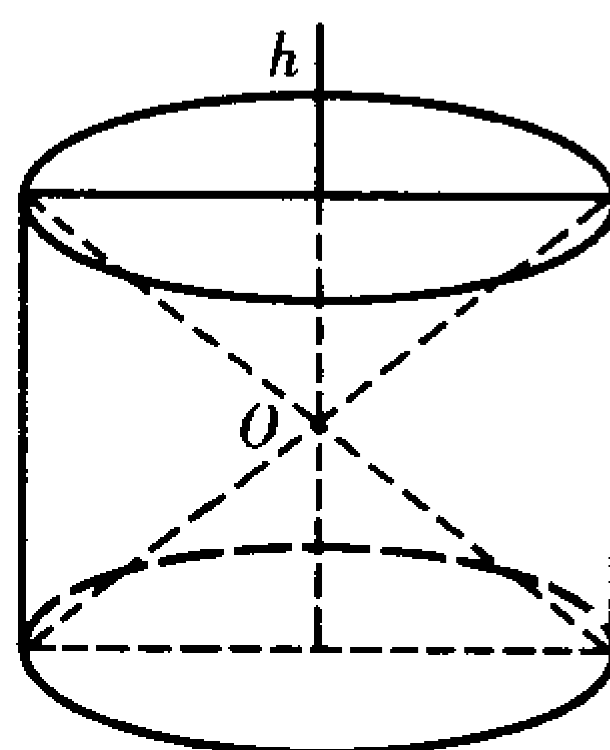


图 1.3 直圆柱体

能使图形复原的变化，称为该图形的对称变换或对称操作. 图 1.2 的全部对称操作是：绕三角形中心 O 转动角 0（不动）、$\frac{2\pi}{3}$、$\frac{4\pi}{3}$（常记为 C_3^0、C_3^1、C_3^2）；关于每个角平分线的反演（常记为 m_a、m_b、m_c）. 图 1.3 的全部对称操作是：绕圆柱轴线 h 转动任意角度（有无穷多个操作）；上述转动后，再相对于圆柱的中心 O 反演；相对于过轴线 h 的任一平面反映；绕过中心 O 且垂直于轴线的任一直线转动角 π.

一般物理系统，除了其结构的空间构型用几何对称性描写外，往往系统对称性表现在描写体系的运动学方程在某些变换下不变形. 相应的变换则称该体系或运动方程的对称变换.

例 3 经典力学的相对性原理.

牛顿运动方程

$$\boldsymbol{F}=m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2},$$

在伽利略变换：

$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}+\boldsymbol{v}t\quad(\boldsymbol{v}=\mathrm{const});$$

$$t'=t$$

下，方程形式依然不变，即

$$\boldsymbol{F}'=m'\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t'^2}\quad(\boldsymbol{F}'=\boldsymbol{F},\quad m'=m).$$

因此，经典力学的相对性原理，实质上反映系统的力学规律在任何惯性系均不变的一种对称性.

大家知道，狭义相对论的相对性原理亦有类似表述：相对论动力学方程

$$\boldsymbol{F}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}\quad\left(\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v},\quad m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right),$$

在洛仑兹变换($\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{i}$)

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\quad y'=y,\quad z'=z,$$

$$t'=\frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

下，其形式保持不变，即

$$\boldsymbol{F}'=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}'}{\mathrm{d}t'}\quad(\boldsymbol{p}'=m\boldsymbol{v}').$$

就是说，在任何惯性系下其形式不变. 换言之，经典力学与狭义相对论的相对性原理所不同的只是两者的对称变换不同，前者是伽利略变换，而后者则是洛仑兹变换.

例 4 量子力学的对称变换.

设系统的量子力学运动方程为

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi=\hat{H}\psi,$$

其中 $\hat{H}$ 为系统的哈密顿算符，ψ 为描述系统的波函数. 设 g 为与 t 无关的对称变换，即

$$\psi'=g\psi,$$

则

$$\begin{aligned}&g(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi)=g\hat{H}\psi\\&\Longrightarrow\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}(g\psi)=g\hat{H}(g^{-1}g)\psi=(g\hat{H}g^{-1})(g\psi)\\&\Longrightarrow\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi'=(g\hat{H}g^{-1})\psi'.\end{aligned}$$

显然，如果 ψ 与 ψ' 满足同一方程(即描写相同的运动状态)，条件是

$$\hat{H}=g\hat{H}g^{-1}$$

或用对易关系表示，

$$[\hat{H},g]\equiv\hat{H}g-g\hat{H}=0.$$

亦即，在变换 g 下体系有对称性的充要条件是 g 与 $\hat{H}$ 对易. 量子力学已告诉我们，这表明 g 对应的是力学量算符(如宇称、动量、角动量、自旋、同位旋等等)，具有可观测的守恒量. 这里我们看到守恒律与对称性的密切关系.

§1.2 群的概念

群论乃是处理对称性的数学工具，是现代数学中影响较大的分支. 它涉及高等代数、拓扑、流形等的极其重要的领域. 这里我们仅仅将群论中与应用有关的部分梳理成易于接受的逻辑上严整的体系.

数学上抽象群的定义极其严格，系指在抽象集合(有限或无限

个元素）

$$W = \{A, B, C, \cdots\}$$

中各元素之间建立一种运算关系，通常称为“乘法”，将两个元素复合成为第三个元素：

$$AB = C.$$

如果集合 W 的全部元素在上述群运算（乘法）下满足如下四个公理，则构成一个群.

（1）封闭律　$\forall\ A, B \in W$，有

$$AB = C \in W.$$

（2）存在单位元　W 中存在元素 E，满足$\forall\ A \in W$，有

$$AE = EA = A,$$

元素 E 称为单位元.

（3）存在逆元　$\forall\ A \in W$，均存在元素 B，使得

$$AB = BA = E,$$

B 称为 A 的逆元素，记为 A^{-1}. 显然，A 亦为 B 的逆元.

（4）结合律　$\forall\ A, B, C \in W$，群运算满足

$$(AB)C = A(BC).$$

群元素的个数称为群的阶. 根据群的阶，可将群分为

群
- 有限群（元素有限）
- 无限群
  - 分立群（间断群）：元素可排序
  - 连续群（元素无法排序，连续分布）

群运算（乘法）一般说来

$$AB \neq BA.$$

如果群元素乘法满足（$\forall\ A, B \in W$），

$$AB = BA,$$

则该群称为阿贝尔群.

下面给出几个简单群的实例，读者不妨验证之.

例 1　相对于普通乘法，集合

$$G_1 = (1, -1),$$

$$G_2 = (1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i})$$

均构成群.

例 2 相对于普通加法,无限集合

$$G = (\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

构成群. 从此例可知,群乘法不一定是普通乘法. 此例群运算为加法,单位元为 0.

例 3 正四边形的全部对称操作构成的集合

$$C_{4v} = (C_4^1, C_4^2, C_4^3, C_4^0 \equiv E;\ m_X, m_Y;\ \sigma_u, \sigma_v),$$

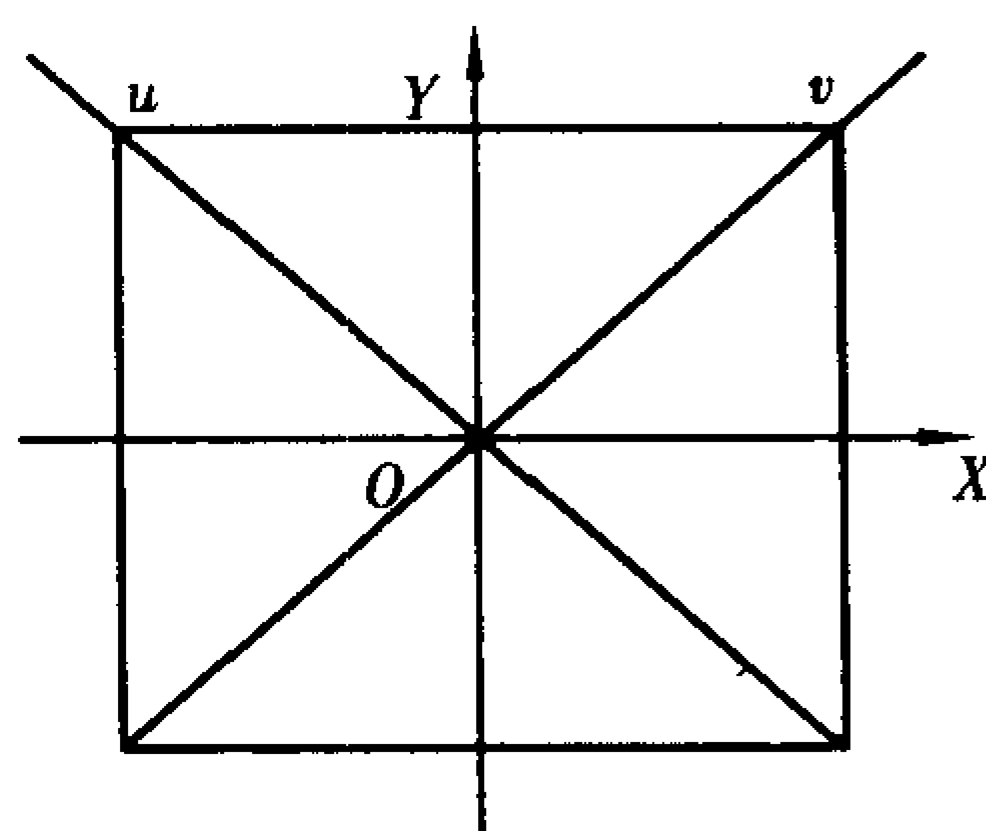


图 1.4 正方形的对称操作群 C_{4v}

其中 C_4^1, C_4^2, C_4^3 分别表示绕中心 O 转动(以后规定逆时针转动为正,顺时针转动为负角度)$\frac{\pi}{2}$、π、$\frac{3\pi}{2}$,$C_4^0 = C_4^4 = E$ 表示不动,m_X、m_Y、σ_u、σ_v 分别表示绕 X 轴、Y 轴、u 轴(对角线)、v 轴(对角线)旋转 π 角(见图 1.4).

群乘法规定为连续两次操作,如

$$C_4^1 m_X = \sigma_u.$$

注意运算时,先右后左.

读者可验证,此集合 C_{4v} 在所规定运算下满足群的四公理.

例 4 实数加法群.

易证全部实数集合在通常加法下构成群.

例 5 相位因子集合 $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\}$,其中 α 可取任意实数,在通常乘法下,构成群.

例 4 与例 5 均为连续群的实例.

考察例 4,如果在实数集合 $\mathbf{R}$ 中取出它的一个子集合——整数集合 $\mathbf{Z}$($\mathbf{R} \supset \mathbf{Z}$),显然,该集合依然相对于加法构成群,此时称 $\mathbf{Z}$ 为 $\mathbf{R}$ 的一个子群. 子群的一般定义是,如果群 G 的子集合 M,相对于群 G 的乘法运算构成群,则称 M 为 G 的子群. 任一群均有两个平庸子群,即自身与单位元构成的子集合. 如果子群不是上述平庸

子群，则称真子群.

判断子集合 M 是群 G 的子群的充要条件是，$\forall\ A, B\in M$，有 $AB^{-1}\in M$.

证明　必要性. 若 M 为子群，且$\forall\ A, B\in M$，则 $B^{-1}\in M$，故

$$AB^{-1} \in M.$$

充分性. 若$\forall\ A, B\in M$，则有

$$AB^{-1} \in M.$$

令 $B=A$，则 $AA^{-1}=E\in M$，即 M 中存在单位元.

令 $A=E$，则 $EB^{-1}=B^{-1}\in M$，即任意元素的逆元均在 M 中.

令 $C\in M$，且 $C=B^{-1}$，则 $AC^{-1}\in M$，即　$A(B^{-1})^{-1}=AB\in M$（封闭性）.

结合律是显然的.

问　　题

1. 如果 H_1 与 H_2 为群 G 的两个子群，则其交集 $H\equiv H_1\cap H_2$ 亦为群 G 的子群.

2. 给出正三角形的全部对称操作集合 C_{3v}，并证明在群运算为连续操作的定义下，C_{3v}构成群.

3. 给出正五角形的全部对称操作集合 C_{5v}，并证明在群运算为连续操作的定义下，集合 C_{5v}构成群.

4. 请找出 C_{4v}操作群中包含的全部子群.

5. 元素$\{E, A, A^2, \cdots, A^{p-1}\}$的集合构成的群叫循环群，其中 $A^p=E$. 试证任何有素数阶的群都是循环群.

6. 试证两个或多个群元素乘积的逆元素等于各逆元素按相反次序的乘积，即$\forall\ g_i\in G$，有

$$(g_ig_j\cdots g_mg_n)^{-1} = g_n^{-1}g_m^{-1}\cdots g_j^{-1}g_i^{-1}.$$

§1.3 群的重排定理、群表和群的陪集分解

本节将给出群的几个重要性质.

群的重排定理 设 g 为群 G 中任意确定元素,则

$$gG = Gg = G.$$

证明 因 $g\in G$,故 $g^{-1}\in G$. 设$\forall\ g_i\in G$,则 $b\equiv g^{-1}g_i\in G$,且 $gb=g_i\in G$(见上节子群充要条件).

但 $gb=g_i\in G$,因此 $gG\supset G$. 又$\forall\ gg_i\in gG$,因为 $g\in G,g_i\in G$,故 $gg_i\in G$,结果 $gG\subset G$. 最后有 $gG=G$.

仿此可证 $Gg=G$.

重排定理是群的最重要、最普遍的性质. 但其得名却来自有限群的特殊情况.

对于有限群,设 $G=\{g_1,g_2,\cdots,g_n\}$,集合 gG 只是把元素重新排列为$\{gg_1,gg_2,\cdots,gg_n\}$,定理由此得名.

重排定理还可以推广. 设有群函数 $f(g_i)$,其“数值”(或表示的操作结果)依赖于群元素. 则对于任意给定群元 $g\in G$,有

$$\sum_{g_i\in G} f(g_i) = \sum_{g_i\in G} f(gg_i),$$

或

$$\sum_{g_i\in G} f(g_i) = \sum_{g_i\in G} f(g_ig).$$

对于有限群,为了更清楚地显示群的乘法结构,常常构造群表,即群的乘法表. 构造规则是,表的第一列排放乘法的第一因子,表的第一行排放乘法的第二因子. 列与行的元素应遍及全部群元素.

例 1 群 $G=(1,-1,\mathrm{i},-\mathrm{i})$,群运算为普通乘法,则群表如表 1.1.

表 1.1　群表

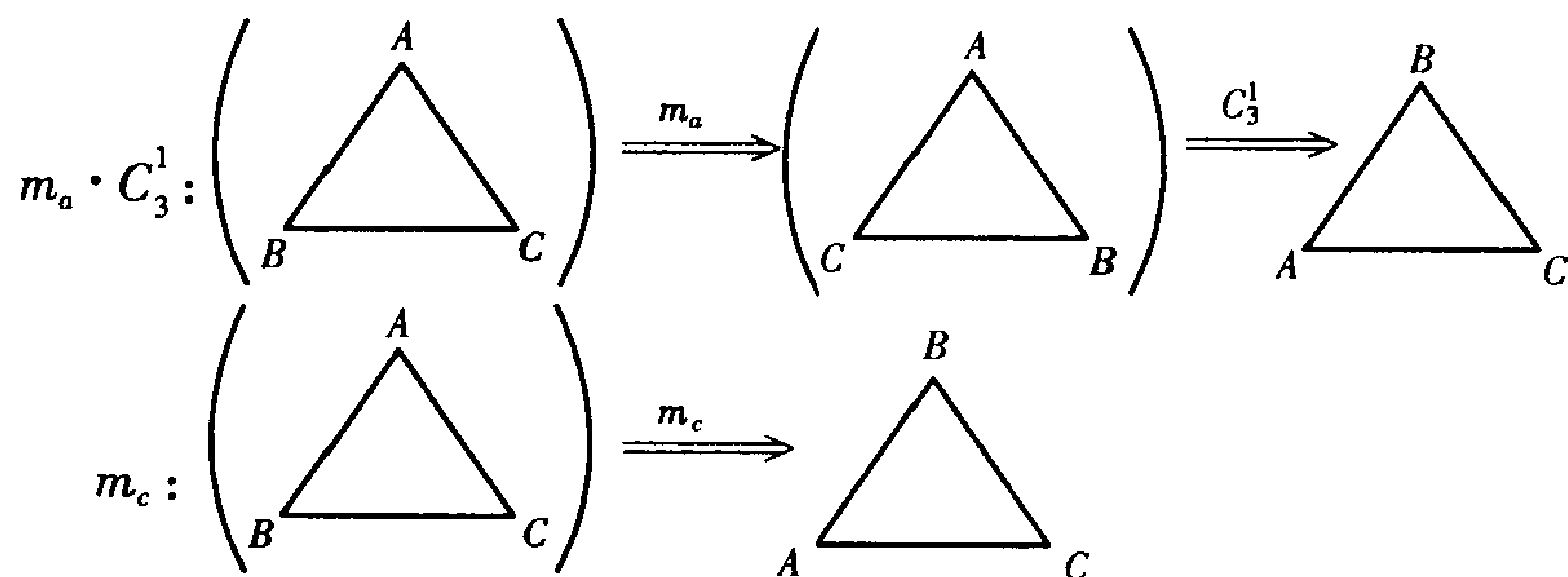
列 \ 行	1	−1	−i	i
1	1	−*i*	−i	i
−1	−1	1	i	−i
i	i	−i	1	−1
−i	−i	i	−1	1

例 2　群 $C_{3v}=(C_3^1, C_3^2, C_3^0=E; m_a, m_b, m_c)$，群运算为连续操作，其中 m_a、m_b、m_c 分别为等边三角形绕过 A 点、B 点和 C 点的垂线转动 180°的操作. 则群表如表 1.2.

表 1.2　群表

列元素 \ 行元素	E	C_3^1	C_3^2	m_a	m_b	m_c
E	E	C_3^1	C_3^2	m_a	m_b	m_c
C_3^2	C_3^2	E	C_3^1	m_b	m_c	m_a
C_3^1	C_3^1	C_3^2	E	m_c	m_a	m_b
m_a	m_a	m_c	m_b	E	C_3^1	C_3^2
m_b	m_b	m_a	m_c	C_3^2	E	C_3^1
m_c	m_c	m_b	m_a	C_3^1	C_3^2	E

在构造此表时，我们只应用了群元与群运算定义，如 $m_a \cdot C_3^1 = m_c$ 可以直观表示为



注意到群表中的每一列或每一行，每个群元素都会在其中出现一次，且只会出现一次，只是每一列（或行）的群元顺序不同（重排）罢了. 在这两个例子中，群表的对角元素均为单位元 E. 在一般构成群表时，并不要求这一点，只是在以后应用（如寻找正则表示）中这种特殊形式的群表（正则形式，或称正则群表）特别方便.

以后在群的结构分析中，陪集的概念是十分重要的. 设子群 $H=(h_1,\cdots,h_m)\subset G$，且元素 $g\in G$，则集合 $gH=(gh_1,gh_2,\cdots,gh_m)$ 称为元素 g 生成的子群 H 的左陪集，而集合 $Hg=(h_1g,h_2g,\cdots,h_mg)$ 则称为元素 g 生成的子群 H 的右陪集. 显然，陪集元素的阶与子群 H 的阶相同，但一般来说

$$gH \neq Hg.$$

陪集的最重要性质可由下述陪集定理表示之.

陪集定理 同一子群的两个左（或右）陪集，或者元素完全相同，或者完全不同（交集为空集）.

证明 若 H 为群 G 的子群，且 g_1 和 g_2 为群 G 中任意两给定元素，它们生成的两个左陪集分别是 g_1H 和 g_2H. 设两陪集有一公共元素：

$$g_1h_i = g_2h_j \quad \begin{pmatrix} \text{不要求 } h_i = h_j \\ \text{但 } h_i、h_j \in H \end{pmatrix},$$

则两边同乘以 $g_2^{-1}(\cdots)h_i^{-1}$，得

$$g_2^{-1}g_1 = h_jh_i^{-1} \in H,$$

由重排定理

$$g_2^{-1}g_1H = H,$$

亦即

$$g_2H = g_2(g_2^{-1}g_1H) = g_1H.$$

换言之，两个左陪集只要有一个公共元素，就一定是同一集合. 右陪集亦然.

进一步有

拉格朗日（Lagrange）**定理** 群 G 必为子群 H 及其全部不相

同的陪集的直和，即群 G 的阶 n 必为子群 H 的阶 k 的整数倍.

证明 任取 $g_1 \in G$，但 $g_1 \overline{\in} H$；则由陪集定理（$H = EH, E \neq g_1$），

$$H \cap g_1 H = \varnothing.$$

继续取 $g_2 \in G$，但 $g_2 \overline{\in} H \cup g_1 H$，则陪集 $g_2 H$，必有

$$g_2 H \cap H = \varnothing; \quad g_2 H \cap g_1 H = \varnothing,$$

后则 $g_2 H$ 应与 H 或 $g_1 H$ 全部重合，与假设矛盾. 如此继续作陪集，因 G 为有限群，必然经过有限次（设为 m 次）后终结，即

$$G = H \cup g_1 H \cup g_2 H \cup \cdots \cup g_{m-1} H,$$

其中每一个左陪集的元素个数均为 k. 陪集的个数（包括 H 自身）为 m 个，故有

$$n = mk.$$

推论 有素数阶的群只有平庸子群（群自身与单位元）.

§ 1.4 共轭类、正规子群和商群

共轭类是对群元的另一种分类方法. 共轭关系是群元之间的等价关系. 集合 $W = \{A, B, C, \cdots\}$ 中任意两元素之间若满足下述三个公设，则称它们之间具有等价关系，记为～：

（1）自反性（反射性） $A \sim A$.

（2）对称性 若 $A \sim B$，则 $B \sim A$.

（3）传递性 若 $A \sim B, B \sim C$，则 $A \sim C$.

在集合中互相等价的元素可归为一类，称为等价类. 由于传递性，不同等价类的元素决不会相同，即不同等价类互不相交. 因此集合可分解为互不相交的等价类的并集.

对于群 $G = \{g_1, g_2, \cdots\}$ 及 $\forall\ g_i, g_j \in G$，若存在元素 $g \in G$，满足 $g_j = g^{-1} g_i g$，则称元素 g_i 与 g_j 共轭. 容易验证共轭关系是一种等价关系，即具有自反性、对称性和传递性. 借此我们可以对群进行共轭分类，即分解为共轭类的并集.

例 1 对于 C_{4v}群，$(C_4^1)^{-1}\sigma_u C_4^1=\sigma_v$，即 $\sigma_u\sim\sigma_v$. 由于$(C_4^1)^{-1}=C_4^3 \in C_{4v}$，所以又有 $\sigma_u=(C_4^3)^{-1}\sigma_v C_4^3$，故 $\sigma_v\sim\sigma_u$.

例 2 阿贝尔群 $G=\{g_1,g_2,\cdots,g_i,\cdots\}$.

由于$\forall\ g_i,g_j\in G$ 有 $g_ig_j=g_jg_i$，因此 $g_j=g_i^{-1}g_jg_i$，即阿贝尔群群元只与自身共轭，每一个共轭类只有 1 个群元.

实际上给定共轭类中一个元素 g，即可由 $a_i^{-1}ga_i(\forall\ a_i\in G)$，当 a_i 遍及全部群元，并归并相同元素，就可得到 g 所属的共轭类. 由 1 个元素构成的共轭类，相应元素称为群的中心元素. 任意群的单位元 E 自成一类. 所有中心元素的集合称为群的中心. 阿贝尔群的中心即为自身.

例 3 C_{4v}群可分为 5 个共轭类：

$$(E);\quad (C_4^2);\quad (C_4^1,C_4^3);\quad (m_X,m_Y);(\sigma_u,\sigma_v).$$

其中心应为(E,C_4^2)所构成的集合.

一般来说，共轭类不是很容易就可得到的. 我们后面还要叙述如何得到群的共轭类. 在这里仅介绍操作群(点群)的共轭类的三个判据，在实用中甚为有效.

判据 1 不同角度的旋转一般属于不同的类. 如 C_{4v}中 C_4^1、C_4^2 就属不同类.

判据 2 绕某轴旋转某一角度与绕同一轴逆向旋转同一角度，当且仅当群中存在某变换，使转轴反向时，这两个旋转属于同一类. 如在 C_{4v}群中，C_4^1 与 $C_4^3=(C_4^1)^{-1}\equiv C_4^{-1}$. 因为群中存在许多元素 $\sigma_u,\sigma_v,m_X,m_Y$，均可使转轴反向，故在 C_{4v}中 C_4^1 与 C_4^3 属于同一类.

判据 3 或绕两不同轴旋转同一角度，或相对两平面的反射，当且仅当群中存在变换，使得其中一个轴可变换为另一轴，或其中一个平面可变换为另一平面时，这两个旋转属于同一类. 例如 m_X 和 m_Y，σ_u 与 σ_v，在 C_{4v}群中存在变换使 X 轴变到 Y 轴，一条对角线变到另一条对角线. 如元素 C_4^1.

判据 1 与判据 2 的证明比较简单，我们证明判据 3.

证明 设操作 $\hat{a}_1,\hat{a}_2,\hat{q}\in G$，其中 $\hat{a}_1$、$\hat{a}_2$ 分别表示绕 m、n 轴转动 α 角，$\hat{q}$ 表示变换 m 轴$\longrightarrow n$ 轴.

如图 1.5 所示，$a'=\hat{a}_1a$，$b'=\hat{a}_2b$，$b'=\hat{q}a'$，$b=\hat{q}a$. 显然，$\hat{a}=\hat{a}_1a$，同时

$$b'=\hat{q}a'\Longrightarrow a'=\hat{q}^{-1}b'\Longrightarrow a'=\hat{q}^{-1}\hat{a}_2b$$
$$\Longrightarrow a'=\hat{q}^{-1}\hat{a}_2\hat{q}a.$$

由此对比有

$$\hat{a}_1=\hat{q}^{-1}\hat{a}_2\hat{q},\ \hat{a}_1\sim\hat{a}_2.$$

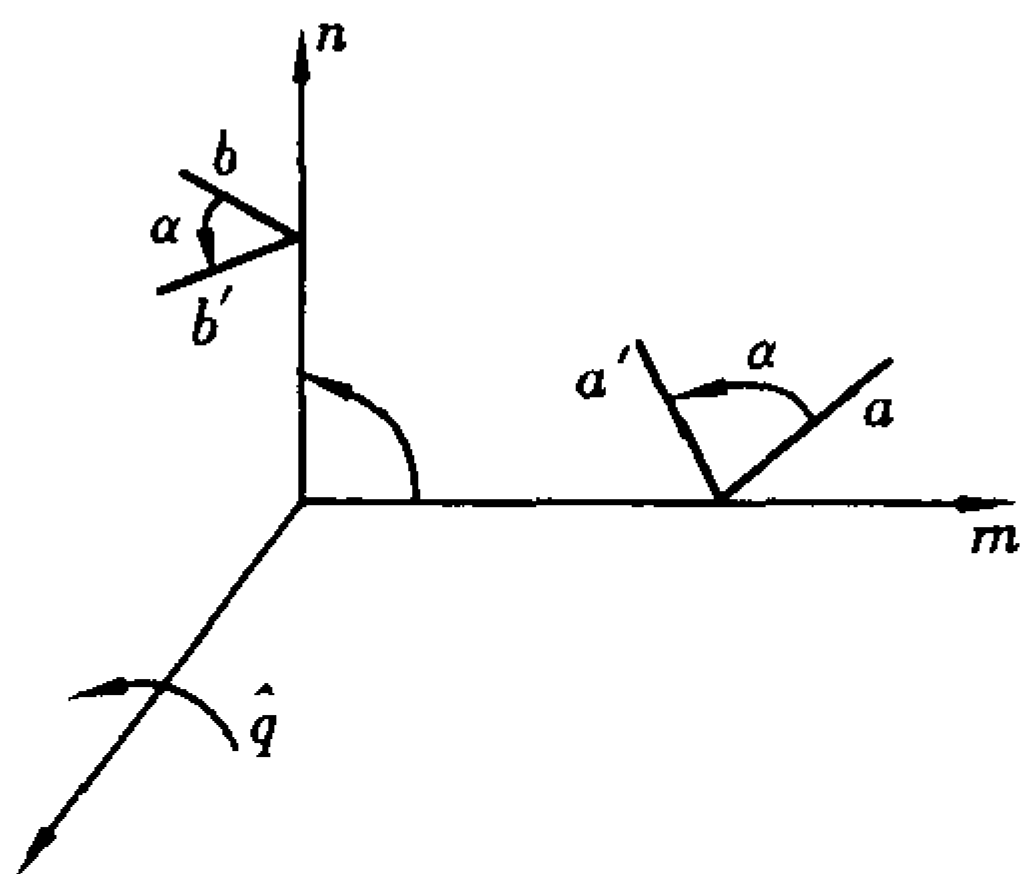


图 1.5

如果子群 H 包含群 G 的完整的共轭类，则称为正规子群或不变子群. 就是说，$\forall\ h_j\in H$，$\forall\ X\in G$，有

$$h_i=X^{-1}h_jX\in H.$$

正规子群是一类特殊的重要子群，其最重要的性质就是它生成的所有左陪集与右陪集相同，即 $\forall\ g\in G$，有

$$gH=Hg.$$

证明 由定义，$\forall\ h_i,h_j\in H,g\in G$，

$$gh_i=h_jg.$$

当 h_i 遍及子群全部元素，就得到左陪集 gH. 相应的 h_j 亦遍及 H 全部元素，应得到右陪集 Hg. 否则设左陪集与右陪集不相等，各自至少应有一个元素

$$gh_i\neq h_jg,$$

就有 $h'_i \neq g^{-1}h'_j g$，即 H 未包含完整的共轭类元素. 对于正规子群，可以不必区分左、右陪集. 一般说来，除单位元所生成者外，陪集并非群.

显然，群 G 本身与单位元是两个平庸正规子群；阿贝尔群的任何子群都是正规子群.

为了完成对群的结构分解，我们先定义陪集乘法，以便给出商群的定义. 两陪集相乘的法则是，两陪集的所有元素按顺序两两相乘，相同的元素合并为一个，所得到的新的集合称为陪集的乘积.

例 4 对于群 C_{4v}，子群 $H=(E,C_4^2)\equiv K_1$ 包含完整共轭类，故是正规子群. 另有陪集

$$K_2 \equiv C_4^1 H = (C_4^1, C_4^3),$$
$$K_3 \equiv m_X H = (m_X, m_Y),$$
$$K_4 \equiv \sigma_u H = (\sigma_u, \sigma_v).$$

可以验证“其它陪集”均与上述 4 个陪集重合，由拉格朗日定理，$n=8, k=2, m=4$，已完成陪集分解. 陪集相乘，如

$$\begin{aligned} K_3 K_4 &\Rightarrow (m_X, m_Y)(\sigma_u, \sigma_v) \\ &= (m_X\sigma_u, m_X\sigma_v, m_Y\sigma_u, m_Y\sigma_v) \\ &= (C_4^3, C_4^1, C_4^1, C_4^3) \\ &\xrightarrow{\text{合并之}} (C_4^1, C_4^3) = K_2. \end{aligned}$$

可以验证有如下结果(表 1.3)：

表 1.3

	K_1	K_2	K_3	K_4
K_1	K_1	K_2	K_3	K_4
K_2	K_2	K_1	K_4	K_3
K_3	K_3	K_4	K_1	K_2
K_4	K_4	K_3	K_2	K_1

商群的定义：若 H 为群 G 的正规子群，则 H 与其全部不相同的陪集，在上述陪集乘法定义下，构成一个群，称为商群，记如

G/H.

证明 单位元 H. 设$\forall\ X\in G, (XH)H=XH^2=XH$,

$$H(XH)=HXH=XH^2 \quad (\text{注意 } XH=HX)$$
$$=XH \quad (\forall\ X\in G).$$

逆元. $\forall\ X\in G, XH$ 的逆元为 $X^{-1}H$. 显然 $X^{-1}\in G$, 故 $X^{-1}H$ 亦在陪集集合中.

$$(X^{-1}H)(XH) = XX^{-1}H^2 = H.$$
$$(XH)(X^{-1}H) = X\cdot X^{-1}H^2 = H.$$

封闭性. $\forall\ X, Y\in G$, 有

$$(XH)(YH) = XYH^2 = XYH = ZH,$$

其中 $Z\equiv XY\in G$, 集合 ZH 应属所说陪集集合.

结合律. $\forall\ X, Y, Z\in G$,

$$XH(YH\cdot XH)= XH(YXH) = XH(YX)H$$
$$= X(YX)H = (XY)XH$$
$$= (XH\cdot YH)\cdot XH.$$

在例 4 中, 集合 $K=(K_1=H, K_2, K_3, K_4)$ 就是群 C_{4v} 与 $H=(E, C_4^2)$ 的商群, 参见其乘法表.

例 5 群 $G=(1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i})$,

子群(正规)$=(1, -1)$, $K_2=(\mathrm{i}, -\mathrm{i})$,

其商群 $K=G/H=(H, K_2)$.

无论对有限群, 还是无限群, 共轭类、陪集、正规子群、商群的概念依然是有效的.

一个群的全部元素有可能通过群中的几个元素相乘得到. 能够生成全部元素所需的最少群元集合, 称为该群的生成元. 有限群或分立群的生成元比较简单, 群元通过生成元有限次相乘即可得到. 对于连续群就复杂多了, 一般要生成元无限次相乘, 才可得到全部群元.

例 6 对于 C_{4v}群, 生成元可以有如下许多种选择:

$$(C_4^1, \sigma_u),\ (C_4^1, \sigma_v),\ (C_4^1, m_X),\ (C_4^1, m_Y),$$

$$(C_4^3,\sigma_u),\ (C_4^3,\sigma_v),\ (C_4^3,m_X),\ (C_4^3,m_Y),$$

等等. 可见生成元的选择并非唯一的,但是任何选择,每组生成元个数均相同(本例为 2 个).

例 7 群 $G=(1,-1,\mathrm{i},-\mathrm{i})$,生成元有两种选择$(\mathrm{i})$,$(-\mathrm{i})$.

例 8 二维旋转群$\{A(\theta)\}$.

$$A(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},$$

其中 θ 为实参数,其单位元

$$A(0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

群运算为普通矩阵乘法. 读者容易验证$\{A(\theta)\}$满足群的四公理. 此时群的生成元

$$X_\theta=\left[\frac{\partial A}{\partial\theta}\right]_{\theta=0}=\begin{pmatrix}-\sin\theta & -\cos\theta\\ \cos\theta & \sin\theta\end{pmatrix}_{\theta=0}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

一般群元可由 X_θ 生成

$$A(\theta)\equiv \mathrm{e}^{\theta X_\theta}=\mathrm{E}+\theta X_\theta+\frac{1}{2!}\theta^2X_\theta^2+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\theta^nX_\theta^n+\cdots\quad(\text{矩阵函数泰勒展开}).$$

由于

$$X_\theta=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad X_\theta^2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-E,$$

$$X_\theta^3=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=-X_\theta,\ X_\theta^4=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E,\ \cdots$$

故

$$A(\theta)=\left[E+\frac{1}{2!}\theta^2X_\theta^2+\frac{1}{4!}\theta^4X_\theta^4+\cdots\right]$$

$$+\left[\theta X_\theta+\frac{1}{3!}\theta^3X_\theta^3+\frac{1}{5!}\theta^5X_\theta^5+\cdots\right]$$

$$=[E-\frac{\theta^2}{2!}E+\frac{\theta^4}{4!}E-\cdots]$$

$$+[X_\theta\theta-\frac{\theta^3}{3!}X_\theta+\frac{\theta^5}{5!}X_\theta-\cdots]$$

$$=E[1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\cdots]$$

$$+X_\theta[\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\cdots]$$

$$=E\cos\theta+X_\theta\sin\theta$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\theta & 0\\ 0 & \cos\theta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -\sin\theta\\ \sin\theta & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

问　　题

1. 请利用§1.4例6中给出的生成元生成全部群元.

2. 验证群元的共轭关系是一种等价关系.

3. 利用§1.4给出的三判据,对 C_{3v} 和 C_{4v} 群的群元进行共轭分类.

4. 试证判据1与判据2.

5. 对 C_{3v} 群相应子群 (E,m_a) 完成陪集分解. $H=(E,m_a)$ 是正规子群吗?

6. C_{3v} 的子群 $H=(E,C_3^1,C_3^2)$ 是正规子群吗?如果是,请求其商群 $K=C_{3v}/H$.

7. 试由生成元 C_4^1、σ_u 生成群 C_{4v} 所有的群元.

8. 试证相位因子集合 $e^{i\theta}$,其中 θ 为实参数,相对于普通复数乘法,构成一连续群. 请找出该群的生成元,并说明全部群元如何生成.

9. 验证矩阵集合:

$$E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

在矩阵乘法下构成群，给出相应群表，找到此群的一个正规子群，并据此求商群.

§1.5 群的直积

物理体系往往具有多种对称性，如空间平移、转动对称性以及自旋、同位旋等内禀对称性. 从而导致有相应对称群与之对应. 一个合理的推测，这些对称性“组合”而成的“更大”的对称性，在体系中仍然应该保持. 由若干反映较小对称性的所谓小群，可以通过“直积”，构成反映更广泛对称性的“大群”——直积群.

群的直积定义.

设有群 $H=(E_h,H_2,H_3,\cdots,H_p)$,

$K=(E_k,K_2,\cdots,K_q)$,

在其中各取一个元素，构成有序对

$$G=\{(H_i,K_j):\forall\ H_i\in H,\forall\ K_j\in K\}.$$

并在集合 G 中定义乘法运算为

$$\forall\ G_{ij}=(H_i,K_j)\in G,\quad G_{\alpha\beta}=(H_\alpha,K_\beta),$$

有

$$G_{ij}G_{\alpha\beta}=(H_i,K_j)(H_\alpha,K_\beta)=(H_iH_\alpha,K_jK_\beta).$$

由于 $H_iH_\alpha\in H,K_jK_\beta\in K$，因此 $G_{ij}G_{\alpha\beta}\in G$. 就是说，$G$ 构成群，称为 H 与 K 的直积群，记为 $G=H\otimes K$. G 的单位元 $E_G=(E_h,E_K)$,

相对于G_{ij}的逆元是$G_{ij}^{-1}=(H_i^{-1},K_j^{-1})$，其中$E_h$与$E_K$是群$H$与$K$的单位元.

由直积群的定义容易证明群H与K均为直积群的正规子群.不过这里的群H与K应理解为

$$H' = \{(H_i,E_K)\} = (H,E_K),$$
$$K' = \{(E_h,K_j)\} = (E_h,K).$$

通常人们往往不区分H'与H,K'与K.实际上

$$\begin{aligned}G_{ij}^{-1}H'G_{ij} &= (H_i,K_j)^{-1}(H,E_K)(H_i,K_j)\\ &= (H_i^{-1},K_j^{-1})(H,E_K)(H_i,K_j)\\ &= (H_i^{-1}HH_i,K_j^{-1}E_KK_j)\\ &= (H,E_K) = H'.\end{aligned}$$

也就是说

$$(H_i,K_j)(H,E_K) = (H,E_K)(H_i,K_j),$$

即

$$G_{ij}H' = H'G_{ij}.$$

对于子群K'(通常写作K)也有相同的结果.

一个直接的推论就是

$$H' = G/K' \text{ 和 } K' = G/H'.$$

有时，我们可以把一个群写作两个子群的直积，称之为直积分解.

直积分解定理 群G可以分解为子群H与K(应理解为H'与K')的充分必要条件是：

(1) H与K均为G的不变子群；

(2) $H\cap K=\{E\}$；

(3) $\forall G_{ij}=(H_i,K_j)$，给出G中全部群元.定理的证明很简单，留给读者练习.

例1 设有三维空间转动群$R_3=\{R(\theta,\phi,\psi)\}$，其中，$\theta,\phi$与$\psi$为欧拉角.显然这是连续群.空间反射群$C_i=(E,p)$，其中$p$表示对系统哈密顿量中$\boldsymbol{r}$进行反射：

$$\boldsymbol{r} \xrightarrow{p} -\boldsymbol{r} \quad 或 \quad H(\boldsymbol{r},t) \xrightarrow{p} H(-\boldsymbol{r},t),$$

$p^2=E$. 这是有限分立群. 则

$$R_{3i} \equiv \{R_3\} \otimes (E,p) = \{R_3E, R_3p\}$$

也构成直积群 R_{3i}. R_{3i}分两部分,其中一部分就是通常三维转动,另一部分则是三维转动后再进行反射(即轴反向). R_{3i}叫三维全旋转群.

例 2

$$H=(E_h,m_X), \quad K=(E_K,m_Y),$$
$$G=H\otimes G=(E,m_X,m_Y,m_X m_Y)$$
$$=(E,m_X,m_Y,C_4^2).$$

由于此例中 H 与 K 本是大群 G 的子群,乘法定义相同,并且两者的元素之间的乘法也有定义,可以直接相乘:

$$G_{ij}G_{\alpha\beta}=(H_i,K_j)(H_\alpha,K_\beta)=(H_iH_\alpha,K_jK_\beta)$$
$$=H_iK_j\cdot H_\alpha K_\beta.$$

注意,一般说来,$H_iK_j\cdot H_\alpha K_\beta \overline{\in} H\otimes K$,仅当 H 与 K 元素可对易时,才有

$$H_iK_j\cdot H_\alpha K_\beta=H_iH_\alpha\cdot K_jK_\beta=(H_i,K_j)(H_\alpha,K_\beta),$$

才属于直积群.

§1.6 同构、同态与扩张

同构映射 设有两个同阶群 G 与 G',

$$G=(g_1=E,g_2,\cdots,g_i,\cdots),$$
$$G'=(g'_1=E',g'_2,\cdots,g'_j,\cdots),$$

两者之间存在 1-1 映射(对应关系),并且在映射下保持乘法运算不变,即$\forall\ g_i,g_j\in G,\forall\ g'_i,g'_j\in G'$,存在映射 $f\longleftrightarrow f'$:$g_i\longleftrightarrow g'_i$,$g_j\longleftrightarrow g'_j$($\longleftrightarrow$ 表示映射是双向的,两者互逆).
则有

$$g_ig_j\longleftrightarrow g'_ig'_j.$$

这种映射叫同构映射，简称同构，记为 $G\cong G'$. 不难证明，同构乃是一种等价关系. 同构映射中 1-1 对应指保持乘法规律不变下的 1-1 对应. 如果两群之间存在同构映射，则两群具有结构相同的群表(乘法表). 从纯数学角度看，若干同构的群，无论其群元表示何种数学意义和物理背景，其代数结构是完全相同的. 因此，探讨与它们同构的抽象群所得到的结果，只要分别赋予各具体群以特定解释，即可得到所需要的数学和物理结果.

例 1 四元旋转群 $G=\{E,C_4^1,C_4^2,C_4^3\}$ 与普通数群 $G'=(1,\mathrm{i},-1,-\mathrm{i})$ 可建立同构映射：

$$E\longleftrightarrow 1;\quad C_4^1\longleftrightarrow \mathrm{i};\quad C_4^2\longleftrightarrow -1;\quad C_4^3\longleftrightarrow -\mathrm{i}.$$

例 2 实数加法群 $G=\{\alpha\}$ (α 为实参数) 与相位相子群 $G'=\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\}$ (群运算为复数乘法) 有同构映射

$$\alpha\longleftrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}.$$

所有同构的群具有完全相同的代数结构. 可以认为，从数学上来说，它们彼此都是极其"逼真"的仿真. 有时，我们退而求其次，找到不同群之间有大致相同的代数结构. 这就是所谓同态映射.

同态映射 如果存在从群 $G=(g_{11},\cdots,g_{1p};g_{21},\cdots g_{2p},\cdots,g_{i1},\cdots g_{ip};g_{j1},\cdots g_{jp},\cdots)$ 到群 $G'=(g'_1=E',\cdots,g'_i,\cdots,g'_j,\cdots)$ 的映射，对于 $\forall\ g_{mn}\in G(m=1,2,\cdots,n=1,\cdots,p)$ 和 $\forall\ g'_m\in G'$,

$$\left.\begin{matrix} g_{i1} \\ \vdots \\ g_{ip}\end{matrix}\right\}\xrightarrow{f} g'_i,\qquad \left.\begin{matrix} g_{j1} \\ \vdots \\ g_{jp}\end{matrix}\right\}\xrightarrow{f} g'_j$$

且保持乘法运算规则不变，

$$g_{im}g_{jn}\longrightarrow g'_ig'_j\quad (m,n=1,\cdots,p),$$

则称 f 为 G 到 G' 的同态映射，并称 G' 同态于 G.

一般说来，同态映射不是 1-1 的对应. 同构仅是同态映射当 $p=1$ 的特殊情况. 当 $p>1$ 时，G 的同态映射的像 G'，只是有群的近

似结构，“逼真”程度不如同构时像“精确”.

G 群中被同态映射到群 G' 的单位元 g'_1 的集合 $N=(g_{11},g_{12},\cdots,g_{1p})$ 称为同态映射的核.同态映射最重要的性质可以用同态基本定理表述.

同态基本定理 设群 G' 为群 G 的像，N 为映射的核，则有

(1) N 是 G 的正规子群；

(2) 像 $G'\cong G/N$.

证明 先证定理的第一部分.设$\forall\ g_{1m},g_{1n}\in N(1\leqslant m,n\leqslant p)$，按同态核定义 $g_{1m}\xrightarrow{f}E'$，$g_{1n}\xrightarrow{f}E'$，或记为

$$f(g_{1n})=f(g_{1m})=E'.$$

集合 N 中显然包含单位元，这点由反证法极易证得.由于同态映射保持乘法 $f(g_{1m}g_{1n})=f(g_{1m})f(g_{1n})$，故

$$f(E)=f(g_{1m}g_{1m}^{-1})=f(g_{1m})f(g_{1m}^{-1})=f(g_{1m}^{-1})=E',$$

即是 $g_{1m}^{-1}\in N$.仿此可以推出 $g_{1m}g_{1m}^{-1}\in N$.由此根据§1.1子群的判断定理，N 是 G 的子群.

令 $g_{1m}\in N$，$\forall\ g\in G$，则 g_{1m}的共轭元 $\tilde{g}_{1m}=g^{-1}g_{1m}g$.由于同态映射保持乘法规则，

$$f(\tilde{g}_{1m})=f(g^{-1}g_{1m}g)=f(g^{-1})f(g_{1m})f(g)$$
$$=f(g^{-1})f(g)=f(gg^{-1})=f(e)=E',$$

(e 为 G 的单位元)故 $\tilde{g}_{1m}\in N$.由于 g 的任意性，N 必包含 g_{1m}的完整共轭类.N 中其它元素的完整共轭类同样应包含在 N 中.

再证明定理的第二部分.将 G 按正规子群 N 作陪集分解.在其中任一陪集 gN 中任取元素 gg_{1m}，作同态映射

$$f(gg_{1m})=f(g)f(g_{1m})=f(g).$$

实际上，g_{1m}为遍及 N 中所有元素，即得到左陪集 gN，它们全部映射为 $f(g)$，即是 G' 中同一元素.

设 g_i 与 g_j 为群 G 中任意两元素，作不同陪集 g_iN 与 g_jN，并对$\forall\ g_ig_{1m}\in g_iN$，$\forall\ g_jg_{1n}\in g_jN$，令

$$f(g_ig_{1m})=g'_i,\quad f(g_jg_{1n})=g'_j.$$

由性质：$f(g^{-1})=f^{-1}(g)$，有 $f[(g_ig_{1m})^{-1}]=(g'_i)^{-1}$，故

$$
\begin{aligned}
f[(g_ig_{1m})^{-1}(g_jg_{1n})] &= f(g_{im}{}^{-1}g_i^{-1}g_jg_{1n}) \\
&= f(g_{im}^{-1})f(g_i^{-1}g_j)f(g_{1n}) = f(g_i^{-1}g_j),
\end{aligned}
$$

但

$$
\begin{aligned}
f[(g_ig_{1m})^{-1}(g_jg_{1n})] &= f[(g_ig_{1m})^{-1}]f(g_jg_{1n}) \\
&= (g'_i)^{-1}.\, g_j = f(g_i^{-1}g_j).
\end{aligned}
$$

若 $g'_i=g'_j$（即不同陪集映射到像中同一元素），则 $f(g_i^{-1}g_j)=E'$，而 $g_i^{-1}g_j\in N$. 由此得到 $g_j\in g_iN$，与假设矛盾. 换言之，$g'_i\neq g'_j$，不同陪集应映射到不同元素. G' 中元素与 G 对正规子群 N 的陪集的映射是 1-1 的. G' 与商群 G/N 同构.

判断同态映射为同构映射，只要看映射的核 N. 如果 N 只包含单位元，则同态映射必为同构映射. 反之亦然.

例 3 群 $G=(1,-1,\mathrm{i},-\mathrm{i})$，$G'=(1,-1)$，群运算均为普通乘法，由 G 到 G' 有 $2\rightarrow1(p=2)$ 的同态映射

$$
\begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} \xrightarrow{f} 1, \qquad \begin{matrix} \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} \end{matrix} \longrightarrow -1,
$$

(G)　　(G′)　　(G)　　(G′)

或记为

$$
f(1)=f(-1)=1,
$$
$$
f(\mathrm{i})=f(-\mathrm{i})=-1.
$$

映射的核 $N=(1,-1)$，商群 $G/N=(N,K)$，其中 $K=(\mathrm{i},-\mathrm{i})$. 显然 $G'=G/N$.

例 4 三维全旋转群 $R_{3i}=(R_3,R_3p)$ 到反射群 $C_i=(E,\bar{p})$（其中 $\bar{p}$ 表示反射操作）有 $\infty\longrightarrow1(p\longrightarrow\infty)$ 的同态映射，

$$
R_3(\theta,\varphi,\psi) \xrightarrow{f} E,
$$

（连续变化∞操作）（恒同操作）

$$
R_3(\theta,\varphi,\psi)p \xrightarrow{f} p
$$

（反射操作）

或记为 $f[R_3(\theta,\varphi,\psi)]=E$，$f(R_3p)=p$. 映射的核 N 为群 $\{R_3\}$，陪

集分解为 N 与 $K=\{R_3p\}$. 实际上反射群 C_i 与普通数乘群 $G=(1,-1)$同构.

例 5 直积群 $G=H\otimes K$ 到群 H 和 K 均有同态映射:$G\xrightarrow{f}H$ 和 $G\xrightarrow{\varphi}K$. 对于映射 f,群 K 则为映射的核,且有 $H=G/K$. 对于同态映射 φ,群 H 则为映射的核,且有 $K=G/H$.

注意:任何群都可以同态映射到单位元上,群本身就是映射的核. 这种平庸映射没有给予任何群结构信息,没有讨论的价值. 一般来说同态是将高阶群映射到低阶群,扩张则是相反的映射.

扩张 设 f 为将群 G 映射到群 G' 的同态映射,同态的核 $N\subset G$,则称 G 为群 G' 按 N 的扩张.

例 6 在例 3 中,$G'=(1,-1)$,同态映射的核 $N=(1,-1)$,即 $G'=N\subset G$,因此 G 可以视为 G' 群按 N 的扩张. 在本例中,扩张正好是同态映射的逆映射.

问　　题

1. 在同态映射 $G\xrightarrow{f}G'$ 中,核为 $N\subset G'$,试证明群 G 的单位元$\in N$.

2. 群 G 到其自身的映射称为自同构映射. 令 $g\in G$,$\forall\ g_i\in G$ 作映射,$g_i\xrightarrow{f}g^{-1}g_ig$,则映射 $f(g_i)=g^{-1}g_ig$ 是一个同构映射(此映射称内同构映射. 如果 $g\overline{\in}G$,则类似映射称为外同构映射).

3. 证明群的中心必为阿贝尔群.

4. 给出群 G 与 H. 令$\forall\ h\in H$,$\forall\ g_i\in G$,则集合 $Z=\{g_i^{-1}hg_i=h\}$为群 G 所有与 h 对易的元集的全体,证明 Z 构成一个群(称为 h 在 G 中的中心).

5. 在题 4 中,如果 h 扩大到全体 H 的元素,则集合 $Z'=\{g_i^{-1}hg_i=h,\forall\ h\in H\}$称为 H 在 G 中的中心. 若令 $H=G$,则此时

集合 Z' 变为什么？

6. 在 C_{3v} 群中，判断子群 $N=(E,C_3^1,C_3^2)$ 和子群 $K=(E,m_a)$ 是否为正规子群. 群 C_{3v} 可以视为 K 的扩张吗？或者是 N 的扩张？为什么？

7. 证明四阶循环群 $G_4=(A,A^2,A^3,A^4\equiv E)$ 与普通数乘群 $G'_4=(1,-1,\mathrm{i},-\mathrm{i})$ 是同构的，其乘法表结构相同.

§1.7　群函数、群代数和群流形

群函数　如果对于群 G 的每一个元素，均有一个确定的数 $f(g_i)$ 对应，即 $\forall\ g_i\in G$，有映射 f

$$g_i \xrightarrow{f} f(g_i)\in \Omega \quad (\text{复数域}),$$

则称集合 $\{f(g_i)\}$ 为群函数，亦可记为 $f(G)$. 群函数也可以是矢量函数、矩阵函数.

对于有限群，群函数可取平均值，

$$\overline{f(G)} = \frac{1}{n}\sum_{g_i\in G} f(g_i) \quad (n\ \text{为群}\ G\ \text{的阶}).$$

显然，若 $f(g_i)\geqslant 0(\forall\ g_i\in G)$，则 $\bar{f}(g_i)\geqslant 0$，并具有线性性质：

$$\overline{af_1(G)+bf_2(G)} = a\bar{f}_1(G)+b\,\overline{f_2(G)}.$$

由于重排定理，若 $g_j\in G$，

$$\overline{f(G)} = \frac{1}{n}\sum_{g_i\in G} f(g_i) = \frac{1}{n}\sum_{g_i\in G} f(g_ig_j)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{g_i\in G} f(g_jg_i) = \frac{1}{n}\sum_{g_i\in G} f(g_i^{-1}).$$

群空间　以群元 g_i 作为基，其所有线性组合构成 n 维线性空间 L_n，其中任意矢量

$$X=\sum_{g_i\in G} f(g_i)g_i,\quad Y=\sum_{g_i\in G}\varphi(g_i)g_i,$$

$f(g_i)$ 和 $\varphi(g_i)$ 为群 G 的群函数，在 L_n 中定义加法满足通常线

性空间的矢量加法规则：

$$c_1X + c_2Y = \sum_{g_i \in G} \big(c_1 f(g_i) + c_2 \varphi(g_i) \big) g_i.$$

再定义 L_n 中数乘运算(内积)：

$$(X, Y) = \sum_i f^*(g_i) \varphi(g_i),$$

其中 $f^*(g_i)$ 为 $f(g_i)$ 的复共轭. 在群空间 L_n 中，基的选择当然不是唯一的，以群元作为基，称为自然基.

在 L_n 中，若定义两矢量的矢积为

$$\begin{aligned} XY &\equiv \Big(\sum_{g_i \in G} f(g_i) g_i \Big) \Big(\sum_{g_k \in G} \varphi(g_k) g_k \Big) \\ &= \sum_{g_i \cdot g_k \in G} f(g_i g_k^{-1}) g_i g_k^{-1} \varphi(g_k) g_k \\ &= \sum_{g_i \cdot g_k \in G} f(g_i g_k^{-1}) \varphi(g_k) g_i \in L_n, \end{aligned}$$

则 L_n 是封闭的，构成代数.

群论实际上包含代数、流形和拓扑学的概念. 我们在此简述以后要用到的拓扑和流形的最基本的概念.

拓扑空间 设有开集合 $\{A_i\}$ 的一个族 $\mathscr{B}$，其中脚标可以是分立的 1，2，3…，也可以是连续变化的. 如果对任何有限次并集，有

$$\bigcup_i A_i \in \mathscr{B},$$

且对任何有限次相交，有

$$\bigcap^i A_i \in \mathscr{B},$$

则称并集 $\mathscr{A} = \bigcup_i A_i$ 与 $\mathscr{B}$ 构成拓扑空间 $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$.

例 1 n 维欧氏空间 E_n. 令 $A_i \equiv S(a_i, r)$，x 为 E_n 中任意点的位置矢量，a_i 为某点的位置矢量；令 $|x - a_i| < r$，即在以 a_i 为球心 r 为半径的球内(不包含球面). 显然 $S(a_i, r)$ 为开集. 则

$$\mathscr{A} \equiv \bigcup_{a_i} S(a_i, r) \in E_n; \quad \bigcap^{a_i} S(a_i, r) \in E_n.$$

因($\mathscr{A}$,E_n)构成拓扑空间,$\mathscr{A}$ 则为 E_n 的一个拓扑.

紧致性 如果开集 A_i 的数目为有限个,则称 $X=\bigcup_i A_i$ 为紧致空间.

例 2 E_n 内任何有界区域 ΔE_n. 它总可用有限个开集 $S(a_i,r)$ 的并集所覆盖.

例 3 任何有限个集合构成的并集是紧致的.

例 4 一维平移群 T_1. 令 $T(a_i)$代表直线上到原点距离为 a_i 的一个点,则 T_1(a_i 在直线各点连续跑动所得到的集合)表示一条无限长直线或 E_1(图 1.6).

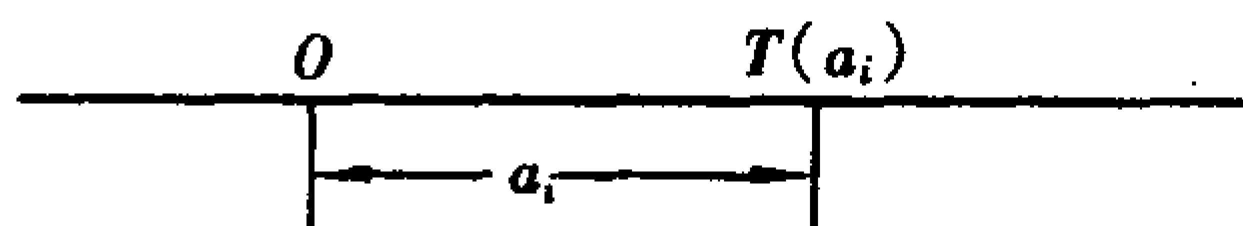


图 1.6

显然,T_1 是非紧致的,而其任何有限部分为紧致的. 这里 T_1 就是群流形的实例.

群体积元 群体积指群流形的体积. 在此我们不拟作严格的学院式的讨论,谨以实例说明之.

例 5 令群 T_1 的群元 $g_i=T(a_i)$,定义相应群流形体积元为

$$\mathrm{d}\mu(g_i) = \mathrm{d}a_i.$$

则对于固定群元素 $g_i=T(a_j)$,体积元是不变的(图 1.7). 事实上,

$$\mathrm{d}\mu(g_ig_j) = \mathrm{d}\mu(g_jg_i) = \mathrm{d}\mu(g_i) = \mathrm{d}a_i \equiv \mathrm{d}a.$$

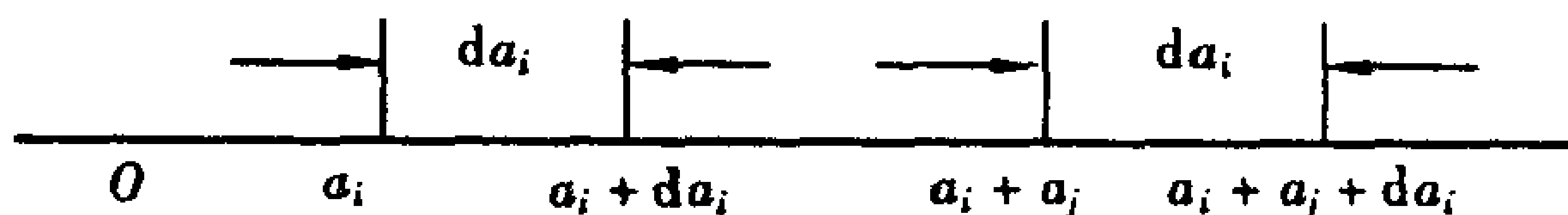


图 1.7 不变群体积元

整个群 T_1 的体积

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\mu(g_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}a = \infty.$$

如果群流形是封闭和有界的,则群是紧致的,否则为不紧致的. 由

此可知 T_1 为不紧致的.这样,我们从另一个角度又得到例 4 的结论.

例 6 相角因子群 $U(1)$.

其定义是,群元 $U(\theta)$: $z \xrightarrow{U(\theta)} z' = z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,其中 $z \in \Omega\ (\mathbf{C})$,$\theta \in \Omega\ (\mathbf{R})$(实数域).因此

$$U(1) = \{U(\theta) \mid 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}.$$

$U(\theta)U(\theta')$:

$$U(\theta)U(\theta')z = U(\theta)(z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}) = z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}$$
$$= z\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')} = z\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta'+\theta)} = U(\theta')U(\theta)z,$$

即 $U(1)$ 为阿贝尔群,

$$U(\theta)U(\theta') = U(\theta + \theta') = U(\theta' + \theta).$$

与群 T_1 不同的是,

$$U(\theta + 2\pi) = U(\theta).$$

下面给出 $U(1)$ 群的流形.令 $U(\theta_i)$ 表示单位圆上一个点,如图 1.8.随着群参数 θ_i 在定义域从 0 到 2π 变化,代表点画出 $U(1)$ 群的群流形,即是单位圆.其体积有限,流形有界,故此群为紧致群.作群积分验证之:

令 $g_i = U(\theta_i)$, $\mathrm{d}\mu(g_i) = \mathrm{d}\theta_i$,

显然,

$$\mathrm{d}\mu(g_i) = \mathrm{d}\mu(g_j g_i) = \mathrm{d}\mu(g_i g_j) = \mathrm{d}\theta_i \equiv \mathrm{d}\theta = \text{const},$$

故群体积

$$V = \int_{U(1)} \mathrm{d}\mu(g_i) = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = 2\pi.$$

$U(\theta_i)$ θ_i X

图 1.8 $U(1)$ 群流形

例 7 三维旋转群 R_3[以后记为 $O(3,R)$].

$\forall\ g_i \in R_3$,群元 g_i 均可用单位矢量 $\boldsymbol{n}^0$ 与绕 $\boldsymbol{n}$ 的自转 $\Psi(0 \leqslant \Psi \leqslant \pi)$ 表示.

取半径为 π 的球体,令球内一点 P 表示转动 $g_i(\boldsymbol{n}, \Psi)$,其中 n 是 $\overrightarrow{OP}$ 的方向,

$$|\overrightarrow{OP}| = \Psi,$$

则群流形即为此球(图 1.9 不包括球面). 显然,流形是有界的,故 R_3 也是紧致的.

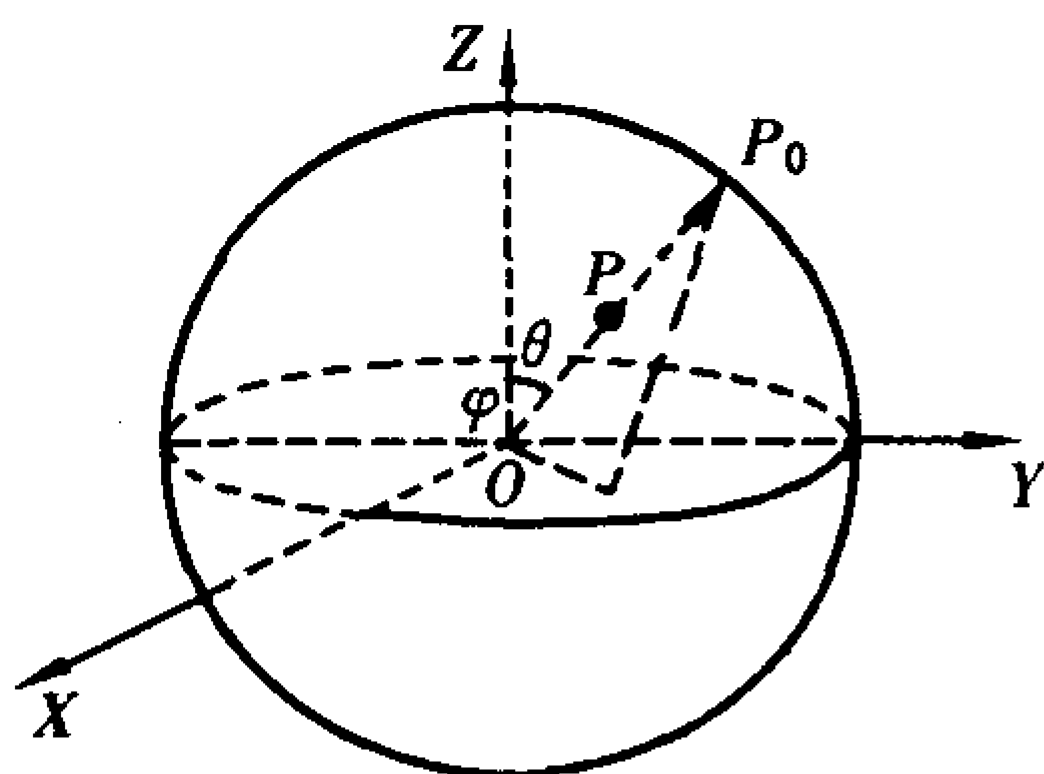


图 1.9 R_3 的流形

将 n 用球坐标表示 $n = n(\sin\theta.\cos\varphi\Psi, \sin\theta\sin\Psi, \cos\theta)$,则 $g = g(\Psi,\theta,\varphi)$,不变体积元为

$$\mathrm{d}\mu(g) = \Psi^2 \mathrm{d}\Psi \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi$$

群流形体积

$$V = \int \mathrm{d}\mu(g) = \int_0^\pi \mathrm{d}\Psi \cdot \Psi^2 \int_0^\pi \sin\theta \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi$$
$$= \frac{4}{3}\pi^3 < \infty.$$

至于为何 Ψ 只取到 π. 原因是在 $\Psi=\pi$ 时,绕 n 转动 π,与绕 $-n$ 转动 $-\pi$,实际上是相同的. 因此在球面上直径两端点 P 与 P' 系表示相同转动. 由此出现 O_3 在拓扑上有双连通结构,从而导致双值旋量表示等等问题出现. 实际上这反映物理上同一个转动,可以在右手系实现,亦可在左手系中实现. $O(3,R)$ 只取右手系,故 $0 \leqslant \Psi \leqslant \pi$. 因为在 $\pi \leqslant \Psi \leqslant 2\pi$ 所表示是相同转动,只不过通过反向转动得到罢了.

例 8 幺正群 $U(n)$.

$U(n)$ 的群元为 $n \times n$ 幺正矩阵,即

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

其中 $\forall A_{ij}(n \leqslant i, j \leqslant n) \in \Omega(\mathbf{C})$,为 n^2 个复参数,群流形为 n^2 维复欧氏空间. 幺正条件为

$$A^+ A = E,$$

其中 E 为 $n\times n$ 单位矩阵，A^+ 为 A 的厄密共轭. 不变矩阵元

$$d\mu(g)=\left\{\prod_{\mu,\nu}^{n}d(\mathrm{Re}A_{\mu\nu})\prod_{\mu,\nu}^{n}d(\mathrm{Im}A_{\mu\nu})\right\}$$

亦即对于流体体积

$$V=\int\prod_{\mu,\nu}^{n}d\mathrm{Re}A_{\mu\nu}\cdot\int\prod_{\mu,\nu}^{n}d\mathrm{Im}A_{\mu\nu}$$

$$=\prod_{\mu,\nu}^{n}\mathrm{Re}A_{\mu\nu}\cdot\prod_{\mu,\nu}^{n}A_{\mu\nu}.$$

其中 $\mathrm{Re}A_{\mu\nu}$ 与 $\mathrm{Im}A_{\mu\nu}$ 分别表示矩阵元 $A_{\mu\nu}$ 的实部与虚部. 但幺正条件

$$\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}\longrightarrow\sum_{\nu=1}^{n}(A^+)_{\mu\nu}(A)_{\nu\lambda}=\delta_{\mu\lambda}$$

$$\Longrightarrow\sum_{\nu}A_{\nu\mu}^{*}A_{\nu\lambda}=\delta_{\mu\lambda}\quad(\mu,\lambda=1,\cdots,n).$$

当 $\lambda=\mu$ 时，

$$\text{上式}=\sum_{\nu=1}^{n}A_{\nu\mu}^{*}A_{\nu\mu}=1\Longrightarrow\sum_{\nu=1}^{n}|A_{\nu\mu}|^2=1,\text{亦即}$$

$$|A_{\nu\mu}|\leqslant 1\quad(\mu,\nu=1,\cdots,n)$$

$$\longrightarrow\mathrm{Re}A_{\mu\nu}\text{ 与 }\mathrm{Im}A_{\mu\nu}\text{ 均有界.}$$

因此流形体积亦有限，因此 $U(n)$ 群是紧密的.

局部紧致群 存在不变体积元（测度），但群流形体积无限，这种群叫局部紧致群.

问　题

1. 证明由例 8 所定义的幺正矩阵集合构成群.

2. 定义集合 G 为

$$G=\{\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}\text{ 为 }n\times n\text{ 矩阵，且 }\det\boldsymbol{A}\neq 0\},$$

其中 $\forall A_{\mu\nu}(\mu,\nu=1,2,\cdots,n)\in\Omega(\mathbf{C})$，则集合记为 $GL(n,\mathbf{C})$；如 $\forall A_{\mu\nu}(\mu,\nu=1,2,\cdots,n)\in\Omega(\mathbf{R})$，则集合记为 $GL(n,\mathbf{R})$. 证明 $GL(n,\mathbf{C})$ 与 $GL(n,\mathbf{R})$ 均构成群（GL 即 general linear 意）. 它们的

紧致性如何？

3. 设 $SL(n,\mathbf{C})$ 与 $SL(n,\mathbf{R})$ 的定义为

$$SL(n,\mathbf{C}) = \{\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{A} \in GL(n,\mathbf{C}),\text{且 } \det\boldsymbol{A} = 1\};$$

$$SL(n,\mathbf{R}) = \{\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{A} \in GL(n,\mathbf{R}),\text{且 } \det\boldsymbol{A} = 1\},$$

这里 SL 即 special linear(特殊线性). 证明它们均构成群，并讨论其紧密性.

4. 定义集合 $SU(n)$ 为

$$SU(n) = \{\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{A} \in GL(n,\mathbf{C}),\text{且 } A^{+}A = 1,\det\boldsymbol{A} = 1\},$$

这里 SU 即 Special Unitary，即特殊幺正，亦特幺正幺. 证明该集合构成群，并讨论其紧致性.

5. 定义集合 $O(n,\mathbf{C})$ 与 $SO(n,\mathbf{C})$ 为

$$O(n,\mathbf{C}) = \{\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{A} \in GL(n,\mathbf{C}),\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}\};$$

$$SO(n,\mathbf{C}) = \{\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{A} \in GL(n,\mathbf{C}),\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E},\det\boldsymbol{A} = 1\}$$

这里 O 与 SO 表示正交与特殊正交意. 证明它们构成群，并讨论其紧致性.

6. 若 $O(n,\mathbf{C})$ 与 $SO(n,\mathbf{C})$ 集合中，$\forall A_{\mu\nu} \in \Omega(\mathbf{R})$，则记为 $O(n,\mathbf{R})$ 与 $SO(n,\mathbf{R})$. 证明两集合依然构成群，并讨论其紧密性. 其中 $SO(n,\mathbf{R})$ 往往也记为 R_n，即 n 维转动群.

7. 定义集合 $Sp(2n,\mathbf{C})$ 为

$Sp(2n,\mathbf{C})=\{\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{A}\in GL(2n,\mathbf{C}),\text{且 } \tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{J}\}$，其中 $\boldsymbol{J}$ 为 $2n\times 2n$ 矩阵，

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & & & \\ & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}.$$

证明任何 $\forall\ \boldsymbol{A}\in Sp(n,\mathbf{C})$，则 $\det\boldsymbol{A}=1$；且集合 $Sp(2n,C)$ 构成群，

称为李群(注:$GL(n,\mathbf{C})$,$U(n)$、$O(n,\mathbf{C})$和$Sp(2n,\mathbf{C})$统称经典群).

8. 给出群$SU(n)$的群流形,计算其群体积.

[提示:考虑$SU(n)$的自由参数个数].

第二章　群表示论基础

群表示论是群论的核心之一. 对于群论的应用而言,应用群的表示论尤其显得重要. 物理或工程系统的许多最重要性质均依赖于系统的对称性,相应的对称性往往可以用不同的对称群描写. 抽象群的同构映射告诉我们,只要能找到与这些对称群同构的一般线性矩阵群(即所谓表示)就可以从矩阵群的结构知道相应对称群的结构,从而获得对应系统的许多对称性质和演化规律的认识. 我们将矩阵群作为所有抽象群的表示,原因是矩阵群的结构便于分析.

§2.1　群的表示

1. 群的表示

若群 G 与正则 $n\times n$ 矩阵群 $\{\Gamma\}$ 同态,则称 $\{\Gamma\}$ 为群 G 的一个 n 维线性表示,即 $\forall\ g_{i\alpha}\in G(\alpha=1,2,\cdots,m)$,有映射

$$f:\quad g_{i1},g_{i2},\cdots,g_{im}\longrightarrow\quad\Gamma(g_i),\quad\Gamma(g_i)\in\{\Gamma\},$$

并且 f 是保持乘法的:$g_{ij}\cdot g_{jn}\xrightarrow{f}\Gamma(g_i)\Gamma(g_j)$. 当 $m=1$ 且映射为可逆时,则映射为同构的,称表示为忠实的;当 $m>1$ 时,映射为同态的,称表示为非忠实的,此时表示只能反映群的大致结构,或只能反映 G 与同态核 N 的商群 G/N 的群结构.

2. 表示的基

上面定义的表示,实际上是群元在某个基矢组下的表示,离开

基矢组，表示无从谈起．基矢组所张成的线性空间，称为表示空间．考察群元如何作用于表示空间中的矢量，可从两种观点分析．

(1)主动观点．　群元只对矢量投影进行变换，不影响基矢．设 $\forall X \in L_n, L_n$ 为 n 维表示空间，则利用一组正交归一基矢组 $\{b_i\}(i=1,2,\cdots,n)$ 对其展开：

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i b_i.$$

在群元 g_α 的作用下，有

$$x \xrightarrow{g_\alpha} x' = g_\alpha x = g_\alpha(\sum_{i=1}^{n} x_i b_i) = \sum_i b_i \cdot g_\alpha x_i,$$

矢量分量 x_i 变化的方式为

$$\begin{aligned} x_i = (b_i, x) \xrightarrow{g_\alpha} x'_i &= (b_i, x') = (b_i, g_\alpha x) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (b_i, g_\alpha b_j) x_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \Gamma(g_\alpha)_{ij} x_j, \end{aligned} \tag{2.1}$$

其中 $\Gamma(g_\alpha)_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 为表示的矩阵元，符号$(\cdot,\cdot)$表示内积，并且在运算中用到正交归一关系：

$$(b_i, b_j) = \delta_{ij}(i,j=1,\cdots,n).$$

将(2.1)式写成矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \xrightarrow{g_\alpha} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_i \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma(g_\alpha)_{11} & \cdots & \Gamma(g_\alpha)_{1n} \\ \vdots & \Gamma(g_\alpha)_{ij} & \vdots \\ \Gamma(g_\alpha)_{n1} & \cdots & \Gamma(g_\alpha)_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \tag{2.2a}$$

简记为

$$x \xrightarrow{g_\alpha} x' = \Gamma(g_\alpha)x. \tag{2.2b}$$

(2) 被动观点． 群元只对基矢作用，不影响矢量．此时基矢组$\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$在群元 g_α 作用下，有

$$b_i \xrightarrow{g_\alpha} b'_i = g_\alpha b_i. \tag{2.3}$$

引人投影算符 $P_j \equiv b_j(b_j,)$.

$$P_j x = b_j \quad (b_j, x) = x_j b_j.$$

P_j 有性质：

$$P_j^m x = x_j b_j \quad (m \geqslant 1)(\text{等幂性});$$

$$\sum_{j=1}^{n} P_j x = EX \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} P_j = E(\text{完备性条件}), \tag{2.4}$$

将(2.4)式作用于(2.3)式两边，注意到 E 为 $n \times n$ 单位矩阵，有

$$Eb' = b' = \sum_{j=1}^{n} b_j(b_j, g_\alpha b_i) \equiv \sum_{j=1}^{n} b_j \Gamma(g_\alpha)_{ji}.$$

写成矩阵形式

$$(b_1, b_2, \cdots, b_n) \xrightarrow{g_\alpha} (b'_1, \cdots, b'_n)$$

$$= (b_1, \cdots, b_n) \begin{pmatrix} \Gamma(g_\alpha)_{11} & \cdots & \Gamma(g_\alpha)_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \Gamma(g_\alpha)_{n1} & \cdots & \Gamma(g_\alpha)_{nn} \end{pmatrix}$$

即 $$b = b\Gamma(g_\alpha).$$

但是，无论按主动观点还是被动观点，在群元$\{g_\alpha\}$的作用下，其物理结果应是相同的．试看下面例子．

例 1 设 $L_n = E_3$，讨论矢量 x 在 g_α 作用下的变化($x = \sum_{i=1}^{3} x_i b_i$).

$$x \xrightarrow{g_\alpha} x'.$$

主动：$x' = \sum_{i=1}^{3} x'_i b_i = \sum_{i,j=1}^{3} \Gamma(g_\alpha)_{ij} x_j b_i$,

被动：$x' = \sum_{i=1}^{3} x_i b'_i = \sum_{i,j=1}^{3} x_i b_j \Gamma(g_\alpha)_{ji}$.

显然两者结果相同.

例 2 设 $L_z = -\mathrm{i}\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}$为量子力学角动量投影算符，其本征函数 $\psi_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}(L_z\psi_m = m\psi_m)$. 讨论系统绕 Z 轴转动 α 角，则球坐标 φ经历变换

$$\varphi \xrightarrow{R_\alpha} \varphi' = \varphi + \alpha, \quad \varphi \xrightarrow{R_\alpha^{-1}} \varphi' = \varphi - \alpha.$$

引入标量函数的变换算符 P_R，表示在坐标变换下，

$$x \rightarrow x' = Rx, \quad x = R^{-1}x',$$

相应的函数形式的变化为，

$$P_R\psi(x) = \psi'(x).$$

对于标量函数应有

$$\psi'(x') = \psi(x),$$

故
$$P_R\psi(x') = \psi'(x') = \psi(x) = \psi(R^{-1}x'),$$

即(上式坐标 x' 均改记为 x)

$$P_R\psi(x) = \psi(R^{-1}x).$$

对于本例，

$$P_R\psi_m(\psi) = \varphi_m(R^{-1}\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}m(\varphi - \alpha)}$$
$$= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\alpha}\psi_m(\varphi),$$

即 P_R 的作用等价于乘以因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\alpha}$，亦即 P_R 相当于算符 $\exp(-\mathrm{i}L_z\alpha)$.

容易证明，算符 P_R 的集合$\{\exp(-\mathrm{i}L_z\alpha)\}$构成一个群，而且与坐标变换$\{R\}$构成的群 G 同构，此时集合$\{P_R\}$称为群 G 的线性实现.

例 3 量子力学中线性变换算符的变换规律. 设有线性算符 L，

$$\psi_B(x) = L(x)\psi_A(x),$$

在坐标变换下

$$x \xrightarrow{R} x' = Rx, \quad x = R^{-1}x',$$

波函数发生变化：

$$\psi_A(x) \longrightarrow \psi'_A(x') = P_R\psi_A(x'),$$

$$\psi_B(x) \longrightarrow \psi'_B(x') = P_R\psi_B(x').$$

但此时，

$$L(x) \xrightarrow{P_R} L'(x'), \quad \psi'_B(x') = L'(x')\psi'_A(x'),$$

即 $P_R\psi_B(x')=P_R[L(x')\psi_A(x')]=L'(x')P_R\psi_A(x')$. 由于 ψ_A 的任意性和 x' 的任意性，因而有

$$L'(x) = P_R L(x) P_R^{-1}.$$

注意，量子力学中物理量用厄米算符 L 表示. 我们已证明，如果 R 是对称变换，则 P_R 对应守恒量，且

$$[H, P_R] = 0,$$

式中 H 为系统的哈密顿量.

3. 表示的特征标

特征标即为表示矩阵的对角元之和，即

$$\chi_\Gamma(g_\alpha) \equiv \sum_{i=1}^{n} \Gamma(g)_{ii} = \mathrm{Tr}[\Gamma(g_\alpha)],$$

其中符号 Tr[·]表示矩阵的迹.

特征标的一个重要性质是，同一表示中同一共轭类的群元的特征标相等. 注意到逆元素的表示矩阵必为该元素表示矩阵的逆阵，即 $\Gamma(g_\alpha^{-1})=\Gamma^{-1}(g_\alpha)$. 这一性质极易验证：

$$\mathrm{Tr}[\Gamma(g_\alpha^{-1})\Gamma(g_\beta)\Gamma(g_\alpha)] = \mathrm{Tr}[\Gamma^{-1}(g_\alpha)\Gamma(g_\beta)\Gamma(g_\alpha)],$$

由于求迹时诸矩阵次序可循环移动，故

$$\mathrm{Tr}[\Gamma(g_\beta)\Gamma(g_\alpha)\Gamma^{-1}(g_\alpha)] = \Gamma[\Gamma(g_\beta)].$$

就是说，特征标是类函数.

4. 等价表示

若$\{\Gamma(g_\alpha)\}$为群 G 的 n 维表示，X 是 $n\times n$ 正则矩阵，则集合$\{\Gamma'(g_\alpha)\}$(其中 $\Gamma'(g_\alpha)=X^{-1}\Gamma(g_\alpha)X$)亦构成群 G 的一个 n 维表示，称为表示$\{\Gamma(g_\alpha)\}$的等价表示. 实际上，由

$$\begin{aligned}\Gamma'(g_\alpha)\Gamma'(g_\beta) &= (X^{-1}\Gamma(g_\alpha)X)(X^{-1}\Gamma(g_\beta)X)\\ &= X^{-1}\Gamma(g_\alpha)\Gamma(g_\beta)X\\ &= \Gamma'(g_\alpha g_\beta).\end{aligned}$$

即可看出$\{\Gamma'(g_\alpha)\}$亦为群 G 的表示.

显然，如此可以构造许多等价表示. 容易验证这些等价表示彼此之间具有所谓等价关系(相互性、传递性和自反性)，形成互相等价的所谓表示类. 群表示论的中心课题就是找到群的全部表示. 现在问题简化为寻找群的所有不等价表示类，每类表示只须找到一个表示就可以了. 显然，相应同一群元的诸等价表示的特征标相等.

在同一等价表示类中出现多种形式，实质上可以说是产生于表示空间的基底变换. 设矢量 $x,y\in L_n$，且 $y=\Gamma(g_\alpha)x$. 当对基底进行变换时，$b'_i=b_iX_{ij}(i,j=1,\cdots,n)$，由线性代数易知，对于新基底：$y'=\Gamma'(g_\alpha)x'$，其中 $y'=Xy$，$x'=Xx$，$\Gamma'(g_\alpha)=X\Gamma(g_\alpha)X^{-1}=(X^{-1})^{-1}\Gamma(g_\alpha)X^{-1}$.

显然，在所有 n 维群的表示中，恒元的表示矩阵是相应 n 维的单位矩阵 $D(I)=E$；一切群都有一个一维平庸表示，或称恒等表示，就是$\forall\ g_i\in G,\Gamma(g_\alpha)=1$. 对于矩阵群，其本身当然也是一个表示.

例 4 循环群 C_n.

$$C_n=(E,a,a^2,\cdots,a^{n-1},a^n=E)$$

令 $w=\exp\left(\dfrac{2\pi \mathrm{i}}{n}\right)$，此处 i 为虚数单位，令 $\Gamma(a)=w^p$，则 $\Gamma(E)=1$，其中整数 $0\leqslant p\leqslant n-1$. 显然，

$$\Gamma(a^m) = (\Gamma(a))^m = (w^p)^m \equiv \lambda^m \quad (\lambda = w^p)$$
$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

构成群 C_n 的一维表示 $\{\lambda^n\}$. 当 $\lambda=1$ 时，即 $p=0$，给出平庸表示，当 $\lambda \neq 1$ 时，则表示不等价. 由于表示都是普通的数，等价表示必然相等. 但 p 只有 n 种选择，故此处给出 C_n 群 n 个不等价的一维表示 (即给出 n 个不同 λ 值).

例 5 二面体群 D_n. D_n 为一操作群，如图 2.1. 系循环群 C_n 的操作(用元素 $a=C_n^1$ 表示绕 O 点转动)，再加上对 Ox 轴的反射元素 $b:\theta \xrightarrow{b} -\theta$ 等所构成的集合：

$$D_n = \{I, a, a^2, \cdots, a^{n-1}; ab, a^2b, \cdots, a^{n-1}b\}.$$

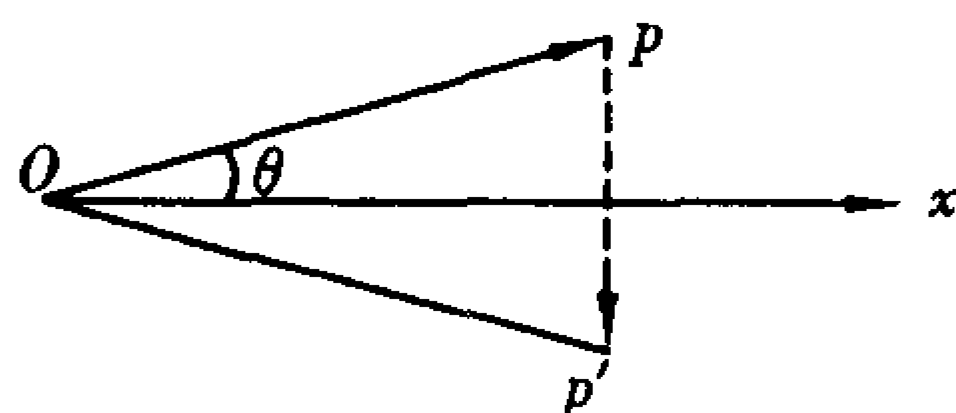


图 2.1

容易验证 D_n 构成一个群，称为二面体群. 显然有关系：

$$a^n = b^2 = I, aba = b.$$

一维表示 $\Gamma^{(1)}(a) = \Gamma^{(1)}(b) =$ 纯数，

$$\Gamma^{(1)}(a^n) = \Gamma^{(1)}(b^2) = \Gamma^{(1)}(E) = 1, \quad \Gamma^{(1)}(aba) = \Gamma^{(1)}(b).$$

由此

$$[\Gamma^{(1)}(a)]^n = [\Gamma^{(1)}(b)]^2 = 1, \quad \Gamma^{(1)}(a)\Gamma^{(1)}(b) = 1,$$

即

$$\Gamma^{(1)}(b) = \pm 1, \quad (\Gamma(a))^n = 1, \quad (\Gamma(a))^2 = 1.$$

当 n 为偶数时，有四种可能的选择：$\Gamma^{(1)}(a) = \Gamma^{(1)}(b) = 1$；$\Gamma^{(1)}(a) = \Gamma^{(1)}(b) = -1$，$\Gamma^{(1)}(a) = 1$，$\Gamma^{(1)}(b) = -1$；$\Gamma^{(1)}(a) = -1$，$\Gamma^{(1)}(b) = 1$，它们都是等价的，就是平庸表示.

当 n 为奇数时，有两种可能：$\Gamma^{(1)}(a) = \Gamma^{(1)}(b) = 1$；$\Gamma^{(1)}(a) =$

$-\Gamma^{(1)}(b)=1$.

二维表示　引入符号 λ 与 ω，意义同上例. 则可定义表示，

$$\Gamma^{(2)}(a)=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 1/\lambda\end{pmatrix},\quad \Gamma^{(2)}(b)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

$$\Gamma^{(2)}(E)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

注意例 4 中 p 的取值范围，由于 p 值在范围 $0\leqslant p\leqslant\frac{n-1}{2}$ 内的表示与在范围 $\frac{n+1}{2}\leqslant p\leqslant n$ 内的表示等价. 我们得到 $[(n-1)/2]$ 个不等价的二维表示.

问　　题

1. 试验证一维平移群 $T_1=\{T(a)\mid-\infty<a<\infty\}$ 的一维表示有 $\{T^{(1)}(a)=1\}$ 和 $\{T^{(1)}(a)=\exp(\lambda a)\}$，其中 λ 为某确定的数；其二维表示为 $\left\{\Gamma^{(2)}(a)=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$，并证明 $\left\{(\Gamma^{(2)})^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ a & 1\end{pmatrix}\right\}$ 也是其二维表示，且与表示 $\{\Gamma^{(2)}\}$ 等价. 又找出其相似变换矩阵.

2. 验证二面体集合 D_n 构成一个群，以及有关系式：$aba=b$；$ab=ba^{n-1}$，$ba=a^{n-1}b$.

3. 试证 $\forall\ x,y\in L_n$，$y=\Gamma(g_a)x$，当进行基底变换：$b'=X^{-1}b$ 时（X 为 $n\times n$ 正则矩阵），有 $x'=Xx$，$y'=Xy$，$\Gamma'(g_a)=X\Gamma(g_a)X^{-1}$，$y'=\Gamma'(g_a)x'$.

§2.2　表示的可约性与幺正性

群的表示可以分为不同的等价类. 首先我们将等价表示中结构最简单、便于讨论的表示找出来.

1. 可约表示

从线性变换的观点看，若表示空间 L_n 中存在子空间 $L_m(m\leqslant n)$，在群 G 的作用下是封闭的，即$\forall\ x\in L_m$，$\forall\ g_\alpha\in G$，有

$$x' = g_\alpha x \in L_m,$$

则 L_m 称为 L_n 的不变子空间. 在线性代数中业已证明，通过适当的线性变换（相似变换），表示矩阵总可以变为如下三角形式（下三角）：

$$\Gamma(g_\alpha) = \left[\begin{array}{c:c} D^{(1)}(g_\alpha) & O \\ \hdashline \underbrace{X(g_\alpha)}_{n-m} & \underbrace{D^{(2)}(g_\alpha)}_{m} \end{array}\right]\begin{array}{l}\}n-m \\ \}m\end{array} \quad (\forall\ g_\alpha \in G),$$

则该表示$\{\Gamma(g_\alpha)\}$称为可约的. 容易证明$\{D^{(1)}(g_\alpha)\}$与$\{D^{(2)}(g_\alpha)\}$分别为群 G 的$(n-m)$维和 m 维表示.

设 $g_\alpha,g_\beta\in G$，且 $g_\alpha g_\beta=g_\gamma\in G$，则有

$$\begin{aligned} T(g_\gamma) &= \Gamma(g_\alpha g_\beta) = \Gamma(g_\alpha)\Gamma(g_\beta) \\ &= \left[\begin{array}{c:c} D^{(1)}(g_\gamma) & O \\ \hdashline \underbrace{x(g_\gamma)}_{n-m} & \underbrace{D^{(2)}(g_\gamma)}_{m} \end{array}\right]\begin{array}{l}\}n-m \\ \}m\end{array} \end{aligned}$$

其中 $D^{(1)}(g_\gamma)=D^{(1)}(g_\alpha)D^{(1)}(g_\beta)$，$D^{(2)}(g_\gamma)=D^{(2)}(g_\alpha)D^{(2)}(g_\beta)$，

$$X(g_\gamma) = X(g_\alpha)D^{(1)}(g_\beta) + D^{(2)}(g_\alpha)X(g_\beta).$$

若令$\forall\ x\in Ln$，$\forall\ g_\alpha\in G$，

$$\begin{array}{r} n-m\{ \\ m\{ \end{array}\left[\begin{array}{c:c} D^{(1)}(g_\alpha) & O \\ \hdashline X(g_\alpha) & D^{(2)}(g_\alpha) \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D^{(1)}(g_\alpha) & x_1 \\ & \\ X(g_\alpha)x_1 + D^{(2)}(g_\alpha) & x_2 \end{bmatrix},$$

可见 x_1（有 $n-m$ 分量）所在子空间 L_1（$n-m$ 维），是不变子空间.

换言之，表示空间存在真子空间(除空间本身外的子空间)与相应表示的可约性互为充要条件.

2. 完全可约

对于许多群，至少是对有限群，形如三角形的可约表示矩阵可以通过等价变换最后变为对角方块形矩阵，即对$\forall\ g_\alpha \in G$，有

$$\Gamma(g_\alpha) \longrightarrow \Gamma'(g_\alpha) = X^{-1}\Gamma(g_\alpha)X \quad (\det X \neq 0)$$

$$= \begin{pmatrix} \overbrace{\Gamma^{(a)}(g_\alpha)}^{m_a} & & & \\ & \Gamma^{(b)}(g_\alpha) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \underbrace{\Gamma^{(c)}(g_\alpha)}_{m_c} \end{pmatrix}$$

则此表示称为完全可约的. 此时矩阵 $\Gamma^{(a)}(g_\alpha)$，$\Gamma^{(b)}(g_\alpha)$，…，$\Gamma^{(c)}(g_\alpha)$所在的空间 L_a(m_a 维)，L_b(m_b 维)，…L_c(m_c 维)均为不变子空间，且 $m_a+m_b+\cdots+m_c=n$，

$$\begin{pmatrix} \Gamma^{(a)}(g_\alpha) & & & \\ & \Gamma^{(b)}(g_\alpha) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Gamma^{(c)}(g_\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \\ \vdots \\ x_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma(g_\alpha)x_a \\ \Gamma(g_\alpha)x_b \\ \vdots \\ \Gamma(g_\alpha)x_c \end{pmatrix},$$

其中 $x_a, x_b, \cdots, x_c$ 分别为矢量 x 的分量，它们分别为 $m_a, m_b, \cdots, m_c$ 维. 就是说，

$$L_a \oplus L_b \oplus \cdots \oplus L_c = L_n,$$

表示空间可表为它们的直和. 或表示矩阵 $\Gamma(g_\alpha)$可以表示为如下直和形式($\forall\ g_\alpha \in G$)：

$$\Gamma(g_\alpha) = \Gamma^{(a)}(g_\alpha) \oplus \Gamma^{(b)}(g_\alpha) \oplus \cdots \oplus \Gamma^{(c)}(g_\alpha).$$

其中$\{\Gamma^{(a)}(g_\alpha)\}$，$\{\Gamma^{(b)}(g_\alpha)\}$，…，$\{\Gamma^{(c)}(g_\alpha)\}$均为群 G 的表示.

若$\{\Gamma^{(a)}(g_\alpha)\}$等都不能再约化，则称此$\Gamma(g_\alpha)$为“已完全约化的”或“已约表示”，而$\{\Gamma^{(a)}(g_\alpha)\}$等叫不可约表示. 群表示论的中心任务就是要找到群的全部不等价不可约表示，这些表示的相应子空间都是不变子空间. 设集合$W=\{L_a,L_b,\cdots,L_c\}$，$\forall\ L_i\in W$，$\forall\ g_\alpha\in G$，有

$$g_\alpha L_i \subset L_i.$$

3. 表示的幺正性(Maschke **定理**)

有限群的每一个等价表示类中，都有一个幺正表示.

证明 设$\{\Gamma(g_\alpha)\}$为群G的一个表示，构造以下矩阵，

$$W \equiv \sum_{g_\alpha\in G}\Gamma^+(g_\alpha)\Gamma(g_\alpha).$$

可直接验证矩阵W是厄米矩阵：$W^+=W$.

此外，对于给定$\Gamma(g_\beta)$，

$$\begin{aligned}\Gamma^+(g_\beta)W\Gamma(g_\beta) &= \sum_{g_\alpha\in G}\Gamma^+(g_\beta)\Gamma^+(g_\alpha)\Gamma(g_\alpha)\Gamma(g_\beta)\\ &= \sum_{g_\alpha\in G}(\Gamma(g_\alpha)\Gamma(g_\beta))^+(\Gamma(g_\alpha)\Gamma(g_\beta))\\ &= \sum_{g_\alpha\in G}\Gamma^+(g_\alpha g_\beta)\Gamma(g_\alpha g_\beta)\\ &= W,\end{aligned}$$

即$\Gamma^+(g_\beta)W\Gamma(g_\beta)=W$. 由于$W$的厄米性，故可将$W$表为

$$W = X^+X \quad (X\text{ 为 }n\times n\text{ 正则矩阵}).$$

其X矩阵即为将表示$\{\Gamma(g_\alpha)\}$变为幺正矩阵$\{\Gamma'(g_\alpha)\}$的变换矩阵，即

$$\Gamma'(g_\alpha) = X\Gamma(g_\alpha)X^{-1}.$$

事实上，$\forall\ g_\alpha\in G$，应有

$$\begin{aligned}\Gamma'^+(g_\alpha)\Gamma'(g_\alpha) &= (X\Gamma^+(g_\alpha)X^{-1})^+(X\Gamma(g_\alpha)X^{-1})\\ &= (X^{-1})^+\Gamma^+(g_\alpha)X^+X\Gamma(g_\alpha)X^{-1}\end{aligned}$$

$$= (X^+)^{-1}\Gamma^+(g_a)W\Gamma(g_a)X^{-1}$$
$$= (X^+)^{-1}WX^{-1} = (X^+)^{-1}X^+ XX^{-1}$$
$$= E \quad (n \times n \text{ 单位矩阵}).$$

本定理可以进一步推广为：联系两个等价的幺正表示的相似变换，总可以是幺正的.

定理的另一个推广是，它的实用范围可由有限群推广到紧致连续群. 注意定理证明的关键是构造厄米矩阵 W. 对于有限群，求和项数有限，W 必然存在. 推广到连续群后，$\sum_{g_a \in G}$ 换成对群参数积分，

$$\int \Gamma^+(g_a)\Gamma(g_a)\mathrm{d}\alpha.$$

如果积分收敛，则 W 亦存在. 对于紧致群，群参数只在参数空间有限范围内取值，积分收敛，故定理亦成立. 至于非紧致群，如洛仑兹群这样重要的群，定理也成立. 但一般情况下，对于非紧致群本定理不成立.

等价性的引入，使得寻求群的全部表示的问题简化为寻求群的全部不等价的表示；可约性的引入，使得问题进一步简化为寻求群的全部不等价、不可约的表示；玛克(Machke)定理更将问题简化为寻求群的全部不等价、不可约的幺正表示.

问　　题

1. 证明有限群 G 的两个等价幺正表示 $\{\Gamma(g)\}$ 与 $\{\Gamma'(g)\}$ 总可以通过相似的幺正变换联系起来.

[提示：设 $\forall\, g_a \in G, X^{-1}\Gamma(g_a)X = \Gamma'(g_a)$，关键在于找到 $Y(\det Y \neq 0)$，使得 $(XY)^+(XY) = 1$，$Y^{-1}\Gamma'(g_a)Y = \Gamma'(g_a)$. 构造 $W = X^+X$，它与 $\Gamma'(g_a)$ 对易，且为正定厄米矩阵，因而可用相似变换 V 对角化，$W' = V^{-1}WV$. 则 $Y = VW''V^{-1}$，其中 $W''_{\mu\nu} =$

$\delta_{\mu\nu}(W_{\mu\mu})^{-\frac{1}{2}}$.]

2. 证明有限群幺正表示或者是不可约的，或者是完全可约的(只需证明幺正表示如可约，则必完全可约).

3. 证明下三角矩阵 $\boldsymbol{A}=\{A_{ij}\}$(其中 $A_{ij}=0$，当 $j>i$)的乘积依然是下三角矩阵；若 $\det\boldsymbol{A}\neq 0$，下三角矩阵的逆亦为下三角矩阵；当$\forall\ A_{ij}\in\Omega(c)$，则下三角矩阵的集合形成群.

4. 两 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}$ 超下三角矩阵

$$A=\left(\begin{array}{c:c} A_1 & O \\ \hdashline X_1 & A_2 \end{array}\right),\quad B=\left(\begin{array}{c:c} B_1 & O \\ \hdashline X_2 & B_2 \end{array}\right),$$

其中 A_1、B_1 为 $n_1\times n_1$ 方阵，$\boldsymbol{A}_2$ 与 $\boldsymbol{B}_2$ 为 $n_2\times n_2$ 方阵，X_1 与 X_2 为 $n_2\times n_1$ 矩阵. 用直接计算证明，乘积

$$C\equiv AB=\left(\begin{array}{c:c} A_1B_1 & O \\ \hdashline X_1B_1+A_2X_2 & A_2B_2 \end{array}\right).$$

§ 2.3 舒尔(Schur)引理

舒尔引理是判断群的一个表示是否可约的理论基础，在群表示理论中占据极其重要的地位. 在此针对有限群的情况加以证明，其适用范围可推广到连续紧致群.

舒尔引理一 设$\{\Gamma(g_\alpha)\}$为群 G 的不可约表示，其维数为 l，M 为 $l\times l$ 矩阵($\det M\neq 0$)，且$\forall\ g_\alpha\in G$，有

$$M\Gamma(g_\alpha)=\Gamma(g_\alpha)M,$$

则 $M=\lambda E$(E 是单位矩阵).

证明 设 x_0 为 M 的一个本征矢，即

$$Mx_0=\lambda x_0,\quad x_0\in L_l(\text{表示空间}).$$

令 $x_0^\alpha\equiv\Gamma(g_\alpha)x_0$ 亦为 M 的本征矢，本征值亦为 λ，事实上

$$Mx_0^\alpha = M\Gamma(g_\alpha)x_0 = \Gamma(g_\alpha)Mx_0$$
$$= \lambda\Gamma(g_\alpha)x_0 = \lambda x_0^\alpha.$$

则矢量集合$\{x_0^\alpha | x_0^\alpha = \Gamma(g_\alpha)x_0, \forall\ g_\alpha\}$张成子空间 L_0. 由于$\forall\ g_\alpha, g_\beta \in G$,有

$$\Gamma(g_\beta)x_0^\alpha = \Gamma(g_\beta)\Gamma(g_\alpha)x_0 = \Gamma(g_\alpha g_\beta)x_0$$
$$= \Gamma(g_r)x_0 = x_0^r \in L_0(g_\alpha g_\beta = g_r \in G),$$

即在任何群元作用下,L_0 是封闭的,也就是不变子空间.

但已知$\{\Gamma(g_\alpha)\}$为不可约表示,因而不应有真不变子空间. 这意味着只会存在下述两种情况.

(1) $L_0 = \varnothing$(空集). 由于在复空间中任何正则矩阵至少有一本征矢,这种情况应予否定. 这样,唯一可能的情况是(2).

(2) $L_0 = L, \forall\ \boldsymbol{x} \in L$,即所有属于 L 空间矢量 x 均是 M 的本征矢,本征值为 λ,即

$$M = \lambda E.$$

舒尔引理一的逆命题亦成立. 由下面例 1 可以推知的确如此.

例 1 可约表示 $\Gamma(g_\alpha)$一定可以化为直和形式($D^{(1)}(g_\alpha)$为 l_1 维,$D^{(2)}(g_\alpha)$为 l_2 维,)

$$\Gamma'(g_\alpha) = X^{-1}\Gamma(g_\alpha)X = \begin{pmatrix} D^{(1)}(g_\alpha) & O \\ O & D^{(2)}(g_\alpha) \end{pmatrix}.$$

此矩阵显然可与非常数矩阵

$$M' = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_1 & O \\ O & \lambda_2 I_2 \end{pmatrix} (\lambda_1 \neq \lambda_2, I_1、I_2 \text{ 为 } l_1 \text{ 维与 } l_2 \text{ 维单位矩阵})$$

对易. 这就是舒尔引理一的逆命题.

舒尔引理二 设$\{\Gamma^{(a)}(g_\alpha)\}$与$\{\Gamma^{(b)}(g_\alpha)\}$为群 G 的两个不等价不可约表示,维数分别为 l_a 与 l_b,若存在 $l_b \times l_a$ 矩阵 M,对于$\forall\ g_\alpha \in G$,有

$$M\Gamma^{(a)}(g_\alpha) = \Gamma^{(b)}(g_\alpha)M, \tag{2.5}$$

则

$$M = O \quad (\text{零阵}).$$

证明 表示$\{\Gamma^{(a)}(g_\alpha)\}$与$\{\Gamma^{(b)}(g_\alpha)\}$都可以通过相似变换化为幺正表示，而零矩阵不因相似变换而改变，故只需证明$\{\Gamma^{(a)}(g_\alpha)\}$与$\{\Gamma^{(b)}(g_\alpha)\}$为幺正表示成立就可以了. 这并不失一般性.

在(2.5)式两端取厄米共轭，并注意到$\Gamma^{(a)}(g_\alpha)^+ = \Gamma^{(a)}(g_\alpha)$，$\Gamma^{(b)}(g_\alpha)^+ = \Gamma^{(b)}(g_\alpha)$，得

$$\Gamma^{(a)}(g_\alpha)M^+ = M^+ \Gamma^{(b)}(g_\alpha).$$

用M左乘此式，并利用题设条件，有

$$M\Gamma^{(a)}(g_\alpha)M^+ = MM^+\Gamma^{(b)}(g_\alpha) = \Gamma^{(b)}(g_\alpha)MM^+. \qquad (2.6)$$

由引理一，$MM^+ = \lambda E_2$(E_2为l_b维单位矩阵).

若$l_a = l_b$，则题设条件变为$\Gamma^{(b)}(g_\alpha) = M\Gamma^{(a)}(g_\alpha)M^{-1}$. 但已知$\{\Gamma^{(a)}(g_\alpha)\}$与$\{\Gamma^{(b)}(g_\alpha)\}$是不等价的，故$M$必为$\det M = 0$的非正则矩阵. 但$MM^+ = \lambda E_2$，因此

$$\det M \cdot \det M^+ = (\lambda)^{l_b} = 0 \Longrightarrow \lambda = 0.$$

另一方面，$MM^+ = \lambda E_2(l_a \times l_b)$，即

$$\lambda = \sum M_{\mu\nu} M_{\mu\nu}^* = \sum_{\mu,\nu=1}^{l_b} |M_{\mu\nu}|^2 = 0,$$

即是
$$M_{\mu\nu} = 0(\mu,\nu = 1,2,\cdots,l_b).$$

若$l_a \neq l_b$，为确定起见，令$l_b < l_a$. 将M阵添加$(l_a - l_b)$行零，则M变成$l_a \times l_a$的方阵N，由矩阵乘法可知$NN^+ = MM^+$. 代入(2.6)式，得

$$NN^+ = \lambda E_2.$$

此时完全等同$l_a = l_b$的情况，故知N为零矩阵，即M为零矩阵. 由此第二引理得证.

问　　题

1. 设M为$n \times n$的正则矩阵，若$\forall\ x \in L_n$均为其本征值相同(λ)的本征矢，即$Mx = \lambda x$，则M必为λE(E为$n \times n$单位矩阵).

[提示:只需用一组正交归一完备矢代入 $Mx=\lambda x$ 即得].

2. 当 $\{\Gamma^{(a)}(g_\alpha)\}$ 与 $\{\Gamma^{(b)}(g_\alpha)\}$ 为非幺正表示,影响引理二的证明吗? 试论述之.

§ 2.4　正交定理及其几何解释

由舒尔引理可以导出群的不等价、不可约表示的两个正交定理,并从而获得寻找有限群或连续紧致群的全部不等价、不可约表示的有效方法. 正交定理在这些寻找方法中,居于中心地位.

所谓正交定理,涉及的是不等价、不可约表示矩阵元之间的正交关系. 从群空间 L_G 来看,这些正交关系实际上反映空间中群函数矢量的正交性.

广义正交定理　若 $\{\Gamma^{(i)}(g_\alpha)\}$ 与 $\{\Gamma^{(j)}(g_\alpha)\}$ 为群 G 的两个不等价、不可约表示,维数为 l_i 与 l_j,作为 l_i^2 个群函数和 l_j^2 群函数的集合,它们之间存在正交关系

$$\sum_{g_\alpha\in G}\Gamma^{(i)*}(g_\alpha)_{mm'}\Gamma^{(j)}(g_\alpha)_{nn'}=\frac{g}{l_i}\delta_{ij}\delta_{mm'}\delta_{nn'}. \tag{2.7}$$

若 $\{\Gamma^{(i)}(g_\alpha)\}$ 与 $\{\Gamma^{(j)}(g_\alpha)\}$ 为非幺正表示,其中 $\Gamma^{(i)}(g_\alpha)_{mn}$ 应代之以 $\Gamma^{(i)}(g_\alpha)_{nm}$.

证明　构造 $l_a\times l_b$ 矩阵 X,只有第 p 行第 q 列的元素不为零

$$X_{mn}=\delta_{mp}\delta_{nq}(m=1,\cdots,l_i;n=1,\cdots,l_j),$$

则 $l_i\times l_j$ 矩阵

$$M=\sum_{g_\alpha\in G}\Gamma^{(i)}(g_\alpha)X\Gamma^{(j)}(g_\alpha^{-1})$$

的矩阵元化为

$$\begin{aligned}M_{mn}&=\sum_{g_\alpha}\Gamma^{(i)}(g_\alpha)_{mm'}X_{m'n'}\Gamma^{(j)}(g_\alpha^{-1})_{n'n}\\&=\sum_{g_\alpha'}\sum_{p,q}\Gamma^{(i)}(g_\alpha)_{mm'}\delta_{m'p}\delta_{n'q}\Gamma^{(j)}(g_\alpha^{-1})_{n'n}\end{aligned}$$

$$= \sum_{g_a} \Gamma^{(i)}(g_a)_{mp}\Gamma^{(j)}(g_a^{-1})_{qn}$$

$$= \sum_{g_a} \Gamma^{(i)}(g_a)_{mp}\Gamma^{(j)}(g_a)_{qn}^{-1}, \tag{2.8}$$

此乃(2.7)式左边. 此外,如果有

$$\Gamma^{(i)}(g_a)M = M\Gamma^{(j)}(g_a),$$

当 $l_i \neq l_j$,或 $l_i = l_j$,但 $\{\Gamma^{(i)}\}$ 与 $\{\Gamma^{(j)}\}$ 不等价时,由舒尔引理二,$M=0$.

当 $l_i=l_j, i=j$(同一等价表示)时,由舒尔引理一,$M=\lambda E$(单位矩阵),因而

$$M_{mn} = \lambda\delta_{mn},$$

而(2.8)式变为

$$M_{mn} = \sum_{g_a}\sum_{p,q} \Gamma^{(i)}(g_a)_{mp}X_{pq}(\Gamma^{(i)}(g_a))_{qn}^{-1} = \lambda\delta_{mn},$$

即是

$$M_{mn} = \sum_{g_a} \Gamma^{(i)}(g_a)_{mm'}\Gamma^{(i)}(g_a^{-1})_{n'm} = \lambda\delta_{mn}.$$

现确定 λ. 取 M 的迹

$$\mathrm{Tr}M = \sum_{m=1}^{l_i} M_{mm} = \sum_{g_a, m} \Gamma^{(i)}(g_a)_{mm}\Gamma^{(i)}(g_a^{-1})_{n'm}$$

$$= \sum_{g_a}\sum_{m} \Gamma^{(i)}(g_a^{-1})_{n'm}\Gamma^{(2)}(g_a)_{mm'}$$

$$= \sum_{g_a} [(\Gamma^{(i)}(g_a))^{-1}\Gamma^{(i)}(g_a)]_{n'm'}$$

$$= \sum_{g_a} \delta_{m'n'} = g\delta_{m'n'} \quad (g \text{ 为群 } G \text{ 的阶}).$$

于是得到 $\lambda = \frac{g}{\lambda_i} m'n'$.

综合以上结果,得到

$$\sum_{g_a} \Gamma^{(i)*}(g_a)_{mm'}\Gamma^{(j)}(g_a)_{m'n'} = \frac{g}{l_i}\delta_{mm'}\delta_{nn'}\delta_{ij}.$$

广义正交定理解释：

在 g 维群空间 L_G 中构造 l_i^2 和 l_j^2 矢量集合 $\{x_{mn}^i\}$ 和 $\{x_{m'n'}^j\}$：

$$x_{mn}^i = \sum_{g_\alpha} \Gamma^{(i)}(g_\alpha)_{mn} \cdot g_\alpha \quad (m,n = 1,2,\cdots,l_i),$$

$$x_{m'n'}^j = \sum_{g_\alpha} \Gamma^{(j)}(g_\alpha)_{m'n'} \cdot g \quad (m',n' = 1,2,\cdots,l_j).$$

基矢组取 $\{g_\alpha\}$. 定义内积

$$(x,y) = \sum_{g_\alpha} x^*(g_\alpha) y(g_\alpha).$$

因此广义正交定理可表为

$$(x_{mn}^i, x_{m'n'}^j) = \frac{g}{l_i}\delta_{ij}\delta_{mm'}\delta_{nn'}.$$

矢量集合 $\{x_{mn}^i | m,n=1,2,\cdots,l_i, i=1,2,\cdots,c\}$，其中 c 表示群 G 的全部不可约表示的个数. 显然矢量集 $\{x_{mn}^i\}$ 的总个数为

$$\sum_{i=1}^{c} l_i^2 \quad (\text{群 } G \text{ 在 } L_G \text{ 中构成正交矢量个数}).$$

由于线性空间的维数 g 不会小于空间的任何一组线性无关矢量的个数，故

$$\sum_{i=1}^{c} l_i^2 \leqslant g.$$

若其中等号成立，则说明 $\{x_{mn}^i\}$ 构成 L_G 中完备正交矢量集合. 否则 $\{x_{mn}^i\}$ 就不是完备集合.

特征标正交定理 若 $\chi_i(g_\alpha)$ 和 $\chi_j(g_\alpha)$ 分别为不等价、不可约表示 $\Gamma^{(i)}(g_\alpha)$ 和 $\Gamma^{(j)}(g_\alpha)$ 的特征标，则有正交关系

$$\sum_{g_\alpha} \chi_i^*(g_\alpha)\chi_j(g_\alpha) = g\delta_{ij} \quad (i,j = 1,\cdots,c). \tag{2.9}$$

证明 在广义正交定理(2.7)式中，令 $m=n, m'=n'$，并对 m、m' 求和，得

$$\sum_{g_\alpha} \sum_{m,m'=1}^{l_i,l_j} \Gamma^{(i)*}(g_\alpha)_{mm'} \Gamma^{(j)}(g_\alpha)_{nn'} = \frac{g}{l_i} \sum_{m,m'=1}^{l_i,l_j} \delta_{ij}\delta_{mm'}\delta_{mm'},$$

即

$$\sum_{g_\alpha} \chi_i^*(g_\alpha)\chi_j(g_\alpha) = \frac{g}{l_i}\delta_{ij}\sum_{m=1}^{l_i}\delta_{mm} = g\delta_{ij} \quad (i,j = 1,2,\cdots,c).$$

由于特征标是类函数，(2.9)式也可以改写为对共轭类求和. 令 $\chi_i^{(k)}$ 表示"i"不可约表示中"k"共轭类群元的特征标，K 为群 G 的全部共轭类的个数，则(2.9)式变为

$$\sum_{k=1}^{K} n_k \chi_i^{(k)} \chi_j^{(k)*} = g\delta_{ij}, \tag{2.10}$$

式中 n_k 为第 k 类中群元的个数.

特征标正交定理的几何解释：

在 L_G 中，(2.9)式的几何解释是容易的. 此时群矢量 $\chi_i = \sum_{g_\alpha} \chi_i(g_\alpha) g_\alpha$，可构成 c 个正交矢量集$\{\chi_i\}(i=1,2,\cdots,c)$. 它们张成 c 维不变子空间 L_c. (2.9)式乃是在 L_c 中$\{\chi_i\}$的相互正交关系.

(2.10)式则是在 L_G 的子空间 L_K——类空间中的一组正交关系. L_K 由每一共轭类任取一群元 $g^{(k)}$ 作为基矢，基矢集$\{g^{(k)}\}$有 K 个基矢，亦即 L_K 的维数为 K 维. 令$\forall\ V_i \in L_K$，

$$V_i = \sum_{k=1}^{K} \sqrt{\frac{n_k}{g}} \chi_i^{(k)} \cdot g^{(k)},$$

则$\{V_i\}$的全体$(i=1,2,\cdots,c)$在空间 L_K 中构成一组正交归一矢量

$$(V_i, V_j) = \delta_{ij} \quad (i,j = 1,2,\cdots,c).$$

显然，$c \leqslant K$. 若等式成立则表示$\{V_i\}$在 L_K 空间中构成完备集合，否则$\{V_i\}$就不是完备集合.

1. 可约表示的约化

正交定理的价值在群的表示的约化时，表现得十分充分. 对于有限群或连续紧致群，可约表示$\{\Gamma(g_\alpha)\}$总可以通过相似变换化为方块对角形式，即$\forall\ g_\alpha \in G$，$\det X \neq 0$，

$$\Gamma'(g_\alpha) = X^{-1}\Gamma(g_\alpha)X = \begin{pmatrix} \Gamma^{(a)}(g_\alpha) & & \\ & \Gamma^{(b)}(g_\alpha) & \\ & & \ddots \end{pmatrix},$$

因而可以表为直和形式

$$\Gamma'(g_\alpha) = \sum_{\oplus_i} m_i \Gamma^{(i)}(g_\alpha), \tag{2.11}$$

其中 m_i 是第 i 个不可约表示 $\{\Gamma^{(i)}(g_\alpha)\}$ 在 $\Gamma'(g)$ 中出现的次数. 注意到, $\forall\ g_\alpha \in G$,

$$\chi'(g_\alpha) = \sum_{i=1}^{c} m_i \chi_i(g_\alpha). \tag{2.12}$$

(2.12)式两边乘上 $\chi_j^*(g_\alpha)$, 再对 g_α 求和, 得

$$\begin{aligned}\sum_{g_\alpha} \chi(g_\alpha)\chi^*(g_\alpha) &= \sum_{i=1}^{c} \sum_{g_\alpha} m_i \chi_j^*(g_\alpha)\chi_i(g_\alpha) \\ &= \sum_{i=1}^{c} m_i g \delta_{ij} = g m_i.\end{aligned}$$

由此得到在表示 $\{\Gamma(g_\alpha)\}$ 中不可约表示 $\{\Gamma^{(i)}(g_\alpha)\}$ 重复出现的次数

$$\begin{aligned} m_i &= \frac{1}{g} \sum_{g_\alpha} \chi_i^*(g_\alpha)\chi(g_\alpha) \\ &= \frac{1}{g} \sum_{k=1}^{K} n_k \chi_i^{(k)*}(g_\alpha)\chi(g_\alpha). \end{aligned} \tag{2.13}$$

(2.13)式是对表示 $\{\Gamma(g_\alpha)\}$ 约化的主要利器. 如果找到群的所有不可约表示的特征标, 原则上可以利用(2.13)式对该表示进行约化. 如果在 $\{m_i\}$ 中只有 1 个为 1, 其余全部为零, 则该表示为不可约的. 如果两表示对应的 $\{m_i\}$ 相等, 则两表示必等价.

由(2.9)式与(2.13)式可得,

$$\sum_{g_\alpha \in G} |\chi(g_\alpha)|^2 = \sum_i m_i^2 \geqslant g, \tag{2.14}$$

即
$$\sum_i m_i^2 \geqslant g.$$
等号成立时，表示为不可约表示.

问　　题

1. $\{\Gamma^{(i)}(g_\alpha)\}$与$\{\Gamma^{(j)}(g_\alpha)\}$为群 G 的不可约表示，维数为 l_i 与 l_j，X 为 $l_i\times l_j$ 非零矩阵，若 $M=\sum_{g_\alpha}\Gamma^{(i)}(g_\alpha)X\Gamma^{(j)}(g_\alpha^{-1})$，请验证
$$\Gamma^{(i)}(g_\beta)M = M\Gamma^{(j)}(g_\alpha).$$

2. 证明(2.14)式.

3. 证明群 G 的不可约表示与一维表示的乘积是不可约表示.

4. 若群 G 的表示$\{\Gamma(g_\alpha)\}$的特征标矢量在 L_G 中的内积$(\chi,\chi)=1$，证明此表示不可约.

5. 若$\{\Gamma(g_\alpha)\}$为群的表示，则$\{\Gamma(g_\alpha)\}$与$\{\Gamma^*(g_\alpha)\}$同为可约表示或不可约表示，这里$\{\Gamma^*(g_\alpha)\}$是$\{\Gamma(g_\alpha)\}$的复共轭.
[提示：应首先证明$\{\Gamma^*(g_\alpha)\}$亦为表示].

§2.5　正则表示与表示的完备性定理

正则表示是群的一个重要表示. 正像我们马上就会知道的，正则表示包含有群 G 的所有不可约表示，同时它又是极其重要的群表示的完备性定理证明的关键. 只有了解正则表示，才可以解决群表示论的中心问题：找到群的全部不等价不可约表示.

1. 正则表示

在群空间 L_G 中，以全体群元素$\{g_i\}(i=1,2,\cdots,g)$作为自然基底，给定某群元 g_β，则$\forall\ g_\alpha\in G$，映射 $g_\alpha\longrightarrow g_\beta g_\alpha\in G$ 实际上是群 G 的自同构映射：$G\xrightarrow{g_\beta}G$，因而确定群的一个表示. 如果 g_β 左

乘群元，相应左正则表示，g_β 右乘群元，相应右正则表示，以后只讨论左正则表示，简称正则表示.

现确定正则表示的具体形式．对 $g_\beta g_\alpha$ 展开

$$g_\alpha \xrightarrow{g_\beta} g_\beta g_\alpha = \sum_{g_\gamma \in G} \Gamma(g_\beta)_{\gamma\alpha} \cdot g_\gamma \quad (\alpha, \gamma = 1, 2, \cdots, g), \tag{2.15}$$

其中表示矩阵元 $\Gamma(g_\beta)_{\gamma\alpha}$. 显然，$\Gamma(g_\beta)_{\gamma\alpha} = \delta_{\gamma,\beta\alpha}$，即当 $g_\beta g_\alpha = g_\gamma$ 时，矩阵元为 1，其余均为 0.

我们验证 $\{\Gamma(g_\beta)_{\gamma\alpha}\}$ 确实是群 G 的一个表示．用群元 g_δ、g_β 连续作用于基矢上，$\forall\, g_\alpha \in G$，

$$\begin{aligned}
g_\alpha \xrightarrow{g_\delta g_\beta} (g_\delta g_\beta) g_\alpha &= \sum_{g_\alpha \in G} g_\delta g_\gamma \Gamma(g_\beta)_{\gamma\alpha} \\
&= \sum_{g_\alpha \in G} \sum_{g_\sigma \in G} \Gamma(g_\beta)_{\gamma\alpha} \cdot \Gamma(g_\delta)_{\sigma\gamma} \cdot g_\sigma \\
&= \sum_{g_\sigma \in G} g_\sigma [\Gamma(g_\delta)\Gamma(g_\beta)]_{\sigma\alpha}.
\end{aligned}$$

对其中矩阵元先作通常展开，

$$\begin{aligned}
[\Gamma(g_\delta)\Gamma(g_\beta)]_{\sigma\alpha} &= \sum_{\gamma=1}^{g} \Gamma(g_\delta)_{\sigma\gamma} \Gamma(g_\beta)_{\gamma\alpha} \\
&= \sum_{\gamma} \delta_{\sigma,\delta\gamma} \delta_{\gamma,\beta\alpha} = \sum_{\gamma} \delta_{\delta^{-1}\sigma,\gamma} \delta_{\gamma,\beta\alpha} \\
&= \delta_{\delta^{-1}\sigma,\beta\alpha} = \delta_{\sigma,\delta\beta\alpha} = \Gamma(g_\delta g_\beta)_{\sigma\alpha}.
\end{aligned}$$

其运算中符号 $\delta_{\sigma,\delta\gamma}$ 的意义是，当 $g_\sigma = g_\delta \cdot g_\gamma$ 时为 1，其余均为 0. 此式显然等价于 $g_\delta^{-1} \cdot g_\sigma = g_\gamma$ 时为 1，其余均为 0. 亦即 $\delta_{\sigma,\delta\gamma} = \delta_{\delta^{-1}\sigma,\gamma}$. 其余符号含义大致如此．以后正则表示记为 $\{\Gamma^{\text{reg}}(g_\alpha)\}$.

正则表示的重要性质：

(1) 由 $\Gamma(g_\beta)_{\gamma\alpha} = \delta_{\gamma,\beta\alpha}$，当 $g_\beta = E$，相应特征标 $\chi_g^{\text{reg}}(E) = \text{Tr}[\Gamma^{\text{reg}}(E)] = g\,(\gamma, \alpha = 1, 2, \cdots, g)$；当 $g_\beta \neq E$，$\gamma = \alpha = 1, 2, \cdots, g$ 时，则 $\delta_{\gamma,\beta\alpha} = 0$，即

$$\chi^{reg}(g_\beta) = 0 \quad (\forall\ g_\beta \in G, 但\ g_\beta \neq G).$$

(2) 群 G 的任一不可约表示的维数等于该表示在正则表示中出现的次数.

证明 设正则表示根据(2.11)式约化为

$$\Gamma^{reg}(g_\alpha) = \sum_{i=1}^{c} m_i \Gamma^{(i)}(g_\alpha), \quad \forall\ g_\alpha \in G, \qquad (2.16)$$

但由(2.13)式,有不可约表示 i 在$\{\Gamma^{reg}\}$中重复出现的次数

$$\begin{aligned} m_i &= \frac{1}{g} \sum_{g_\alpha \in G} \chi^{(i)*}(g_\alpha) \chi^{reg}(g_\alpha) \\ &= \frac{1}{g} \sum_{g_\alpha \in G} \chi^{(i)*}(g_\alpha) g \delta_{g_\alpha, E} = (\chi^{(i)}(E))^* \\ &= l_i \quad (不可约表示\ i\ 的维数) \end{aligned} \qquad (2.17)$$

(3) 伯恩塞德(Burnside)定理. 对于有限群和连续紧致群,有

$$g = \sum_{i=1}^{c} l_i^2, \qquad (2.18)$$

其中 c 为不可约表示 i 的维数.

证明 由(2.16)式与(2.17)式,得

$$\Gamma^{reg}(g_\alpha) = \sum_{i=1}^{c} l_i \Gamma^{(i)}(g_\alpha), \quad \forall\ g_\alpha \in G.$$

令 $g_\alpha = E$,则此式变为

$$\Gamma^{reg}(E) = \sum_{i=1}^{c} l_i \Gamma^{(i)}(E).$$

对上式取迹,得

$$\chi^{reg}(E) = \sum_{i} l_i \chi^{(i)}(E),$$

即

$$g = \sum_{i=1}^{c} l_i^2.$$

例 1 讨论 $g=6$ 的有限群的结构.

由(2.18)式,得 $l_1 = l_2 = 1, l_3 = 2$. 两个一维表示对应是阿贝尔

群，二维表示则对应下面要讨论的置换群 S_3.

由正则表示的重要性质，可以立即得到群空间 L_G 与类空间的完备定理.

群空间 L_G. 由于 $\sum_i l_i^2$ 个正交矢构成的集合 $\{\chi_{mn}^{(i)}\}$，其总数等于 L_G 的维数 g，故构成空间完备正交矢量集合.

类空间 L_K. 由于 $L_K \subset L_G, \forall V^{(i)} \in L_K$，正交矢量集合 $\{V^{(i)}\}$ 可以由 $\{\chi_{mn}^i\}$ 得到. 由 $\{\chi_{mn}^i\}$ 的完备性，可以推到 $\{V^{(i)}\}$ 的完备性，即

$$c = K,$$

就是说群 G 的不等价、不可约表示的个数等于群 G 的群元共轭类的个数. 这是一个非常重要的结论.

2. 特征标第二正交定理

特征标正交定理(2.9)式，实质上反映的是不等价不可约表示的特征标是正交的. 第二定理则表明，不同共轭类的特征标同样是正交的.

将(2.10)式改写为

$$\sum_k \sqrt{\frac{n_k}{g}} \chi_i^{(k)} \sqrt{\frac{n_k}{g}} \chi_j^{(k)*} = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, c). \quad (2.19)$$

记 $A_{ki} \equiv \sqrt{\frac{n_k}{g}} \chi_i^{(k)}$，则 A_{ki} 构成 $c \times c$ 矩阵元，因此(2.19)式变为

$$\sum_{k=1}^{c} A_{ki} A_{kj}^* = \delta_{ij} \Rightarrow A^+ A = E. \quad (2.20)$$

令 $\{\psi_m\}$ 为类空间 $L_c(c=K)$ 的一组正交矢，利用 A 对其进行变换

$$(\psi'_1, \psi'_2, \cdots, \psi'_c) = (\psi_1 \, \psi_2 \cdots \psi_c) \begin{pmatrix} & A_{ki} & \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{m=1}^{c} \psi_m A_{mi},$$

由此得内积

$$(\psi'_i,\psi'_j)=\sum_{m,n}A^*_{mi}A_{nj}(\psi_m,\psi_n)$$
$$=\sum_{m,n}A^*_{mi}A_{nj}\delta_{mn}=\sum_{m}A^*_{mi}A_{mj}$$
$$=\delta_{ij}.$$

就是说，变换矩阵 A 在 L_c 空间中将一组正交归一基仍变为正交归一基，因此 A 为幺正变换(矩阵)，亦即

$$A^+A=AA^+=E.$$

试将 $AA^+=E$ 用矩阵元表示，

$$(AA^+)_{kk'}=\sum_i A_{ki}\tilde{A}^*_{ik'}=\sum_i A_{ki}A^*_{k'i}=\delta_{kk'},$$

即是

$$\sum_i\sqrt{\frac{n_k}{g}}\chi_i^{(k)}\sqrt{\frac{n_{k'}}{g}}\chi_i^{(k')*}=\delta_{kk'},\tag{2.21}$$

或

$$\sum_i\chi_i^{(k)}\chi_i^{(k')*}=\frac{g}{n_k}\delta_{kk'}.\tag{2.22}$$

这就是第二特征标正交定理. 两个特征标正交定理在构造群的特征标表时起着关键作用. 至此我们已经基本具备对有限群或连续紧致群的群结构进行分析，寻找全部不等价不可约表示具体形式的理论武器.

小结本章前述内容的主要结果是：

舒尔引理⟶广义正交定理⟶特征标正交定理，即

$$\left.\begin{aligned}\sum_k n_k\chi_i^{(k)}\chi_j^{(k)*}&=g\delta_{ij}\\ \sum_i\chi_i^{(k)}\chi_i^{(k')*}&=\frac{g}{n_k}\delta_{kk'}\end{aligned}\right\}\Longrightarrow$$

(i) 表示 $\{\Gamma(g_a)\}$ 的约化

$$m_i=\frac{1}{g}\sum_{k=1}^{c}n_k\chi_i^{(k)*}(g_k)\chi(g_k),$$

$$\Gamma(g_\alpha) = \sum_{\oplus_i} m_i \Gamma^{(i)}(g_\alpha), \quad \forall\, g_\alpha \in G.$$

(ii) 群的共轭类个数=不等价不可约表示的个数，即 $K=c$.

(iii) 伯恩塞德定理 $\sum_{i=1}^{c} l_i^2 = g$，

(iv) 不可约表示的维数 $l_i=m_i$（在 $\Gamma^{\text{reg}}(g_\alpha)$中），

(v) 不可约判据

$$\sum_{i=1}^{c} m_i^2 = 1 \tag{2.23}$$

或

$$\sum_k n_k |\chi^{(k)}|^2 = g. \tag{2.24}$$

问　　题

1. 证明不可约判据(2.23)和(2.24)式.

2. 试证明在对角元为单位元 E 的群表中，$\forall\, g_\alpha \in G$，任一群元 g_α 的正则表示是 $\Gamma^{\text{reg}}(g_\alpha)_{ij}=\delta_{i\mu}\delta_{j\nu}$，其中 $i,j=1,2,\cdots,g$，μ 为群表中 g_α 所处的行的序数，ν 则为群表中 g_α 所处的列的序数. 由此可得到全部群 G 的正则表示$\{\Gamma^{\text{reg}}(g_\alpha)\}$.

3. 设 L_G 为阶数为 g 的群空间，$F(G)$为 L_G 中任意群函数，试利用完备正交基$\{\chi_{mn}^{(i)}\}$对 $F(G)$展开.

[提示：$F(g_\alpha) = \sum_{i,m} C_{mn}^i \chi_{mn}^{(i)}(g_\alpha)$，其中 $C_{mn}^i = \dfrac{m_i}{g} \sum_{g_\alpha} \chi_{mn}^{i*}(g_\alpha) F(g_\alpha)$]

4. 在 L_K 空间中的函数叫类函数. 对于类函数，同一共轭类的元素对应的函数值相等，例如特征标 $\chi_i^{(k)}$. 试证明类函数 $F_k(g_\alpha)$均可按特征标展开 χ_i（在诸 $\chi_i^{(k)}$ 中只取一个，当 k 相同时）.

[提示：先证明 $F_k(g_\alpha)$可按$\{\chi_{mn}^i\}$展开，

$$F_k(g_\alpha) = F_k(g_\beta^{-1} g_\alpha g_\beta) = \frac{1}{g} \sum_{g_\beta \in G} F_k(g_\beta^{-1} g_\alpha g_\beta)$$

$$= \sum_{i,m,n} C^i_{mn} \frac{1}{g} \sum_{g_\beta \in G} \sum_{\rho,l} \Gamma^{(i)}(g_\beta^{-1})_{m\rho} \Gamma^{(i)}(g_\alpha)_{\rho l} \Gamma^{(i)}(g_\beta)_{ln}$$

$$= \sum_i [\frac{1}{m_i} \sum_m C^i_{mn}] \chi_i(g_\alpha),$$

其中用到

$$\sum_{g_\beta \in G} \Gamma^{(i)}(g_\beta^{-1})_{m\rho} \Gamma^{(i)}(g_\beta)_{ln} = \delta_{n\rho} \cdot \delta_{ml}]$$

5. 证明有限群的特征标 $\chi_i(g_\alpha)$ 构成 L_k 的完备正交系.

[提示:利用上题结果.]

§2.6 有限群不等价不可约表示的寻找方法

在本节以实例演示有限群不等价不可约表示的寻找方法. 首先根据上述几节所叙基本原理,构造群的特征标表,进而确定群的不等价不可约表示及其维数,再根据群元的具体含义以确定每个表示的具体形式.

试以 C_{4v}群为例说明之。

1. 确定群的不等价不可约表示的个数及每个表示的维数

为此,确定群的共轭类的个数 K,这就是群的全部不可约表示的个数 c,即 $K=c$.

群 $C_{4v}=\{E,C_4^1,C_4^2,C_4^3,m_X,m_Y,\sigma_u,\sigma_v\}$可分为 5 类,即 $K=5$,

$$e_1 = \{E\}, \quad e_2 = \{C_4^1,C_4^3\}, \quad e_3 = \{C_4^2\},$$
$$e_4 = \{m_X,m_Y\}, \quad e_5 = \{\sigma_u,\sigma_v\}.$$

可见群 C_{4v}有 5 个不等价不可约表示.

再由伯恩塞德定理 $\sum_{i=1}^{c} l_i^2 = g$,现在 $g = 8, c = 5$. 此时整数值解只有

$$l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 1(\text{一维}), \quad l_5 = 2(\text{二维}).$$

例 1 设 G 为 8 个元素构成的阿贝尔群，求其全部不可约表示的个数及相应维数.

$g=8$，共轭类个数 $K=8$，即不等价不可约表示的个数 $c=8$，由伯氏定理，$l_1=l_2=\cdots=l_8=1$，即全部为一维表示.

2. 构造特征标表

一般可以利用如下关系：

(1) 任何群的不可约表示 i：$\chi_i(E)=l_i$.

(2) 任何群 G 均存在平庸一维表示：$\Gamma^{(1)}(g_a)=1(\forall\ g_a\in G)$.

(3) 一维表示就是其特征标，其乘法关系，与群元间的乘法关系一致.

(4) 对于一维表示，若 $g_a^n=E$，则 $\chi^{(1)}(g_a)=1^{\frac{1}{n}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi/n}$.

(5) 两个特征标正交关系.

(6) 不可约判据 $\sum_{k=1}^{c} n_k|\chi_k|^2 = g$.

例 2 n 阶循环群 $G=\{E,a,\cdots,a^{n-1},a^n=E\}$，群的阶 $g=n$. 它是阿贝尔群，故 $c=K=g$，$l_1=l_2=\cdots=l_g=1$，全部是一维表示.

由于 $a^n=E$，故 $\Gamma(E)=\Gamma(a^n)=1$，即$[\Gamma(a)]^n=1$，就是 $\Gamma(a)=1^{\frac{1}{n}}=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}k/n}(k=0,1,\cdots,n-1)$. 这样得到 n 个不同的表示：

令 $\Gamma^{(p)}(a)=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(p-1)/n}(p=1,\cdots,n)$，共轭类 $e_1=\{E\}$，$e_2=\{a\}$，$\cdots$，$e_n=\{a^{n-1}\}$. 若对于 $\chi\in e_m$，应有

$$\begin{aligned}\Gamma^{(p)}(x) = \Gamma^{(p)}(x) &= \Gamma^{(p)}(a^{m-1}) = [\Gamma^{(p)}(a)]^{m-1}\\ &= [\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/n}]^{(p-1)(m-1)},\end{aligned}$$

其中 p 为不可约表示序数，m 为共轭类的序数. 其特征标 $\chi_p^{(m)}$ 亦等于此数，

$$\chi_p^{(m)} = [\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/n}]^{(p-1)(m-1)}.$$

此群的特征标表如表 2.1(令 $n=5$).

表 2.1 循环群 $G=\{E,a,\cdots,a^{n-1},a^n=E\}$ 特征标表

不可约表示 p \ 类元素 m	e_1 (E)	e_2 (a)	e_3 a^2	e_4 a^3	e_5 a^4
$\chi_1^{(m)}$	1	1	1	1	1
$\chi_2^{(m)}$	1	$e^{2\pi i/5}$	$e^{4\pi i/5}$	$e^{6\pi i/5}$	$e^{8\pi i/5}$
$\chi_3^{(m)}$	1	$e^{4\pi i/5}$	$e^{8\pi i/5}$	$e^{12\pi i/5}$	$e^{2\pi i/5}$
$\chi_4^{(m)}$	1	$e^{6\pi i/5}$	$e^{12\pi i/5}$	$e^{18\pi i/5}$	$e^{30\pi i/5}$
$\chi_5^{(m)}$	1	$e^{8\pi i/5}$	$e^{20\pi i/5}$	$e^{30\pi i/5}$	$e^{32\pi i/5}$

例 3 构造 C_{4v} 群的特征标表

表 2.2 C_{4v} 群的特征标表

表示脚标 i \ 类脚标 k	e_1 $\{E\}$	e_2 $\{C_4^1,C_4^3\}$	e_3 $\{C_4^2\}$	e_4 $\{m_X,m_Y\}$	e_5 $\{\sigma_u,\sigma_v\}$
$\chi_1^{(k)}$	1	1	1	1	1
$\chi_2^{(k)}$	1	1	1	-1	-1
$\chi_3^{(k)}$	1	-1	1	1	-1
$\chi_4^{(k)}$	1	-1	1	-1	1
$\chi_5^{(k)}$	2	0	-2	0	0

演算过程如下：

(1) 由 $\chi_i(E)=l_i$ 和恒等表示，可以填出表中第一行与第一列.

(2) 考虑第三列，$l_3=\{C_4^2\}$. 由于 $[C_4^2]^2=E$，由例 2，$\chi_2^{(3)}(C_4^2)=\pm 1$，$\chi_3^{(3)}(C_4^2)=\pm 1$，$\chi_4^{(3)}(C_4^2)=\pm 1$. 但 $\chi_i^{(2)}(C_4^1)=\chi_i^{(2)}(C_4^3)=[\chi_i^{(2)}(C_4^1)]^3$（第二列），可知，$[\chi_i^{(2)}(C_4^1)]^2=1=\chi_i^{(3)}(C_4^2)$，即是

$$\chi_i^{(3)}(C_4^2)=1,\chi_i^{(2)}=\pm 1,\quad (i=2,3,4).$$

(3) 由特征标第二正交定理

$$\sum_i \chi_i^{(k)}\chi_i^{(k')}=\frac{g}{n_k}\delta_{kk'},$$

令 $k=1$（l_1 类），$k'=3$（l_3 类），注意 $n_1=1,n_3=2$，可得 $\chi_5^{(3)}=-2$.

(4) 对于 $i=5$，由不可约表示判据：

$$\sum n_k |\chi_i^{(k)}|^2 = g \quad (g = 8),$$

注意到 $n_1=1, n_2=2, n_3=1, n_4=2, n_5=1$，得

$$\chi_5^{(2)} = \chi_5^{(4)} = \chi_5^{(5)} = 0.$$

（5）由于 $m_X^2=m_Y^2=\sigma_u^2=\sigma_v^2=E$，得

$$\chi_i^{(4)} = \pm 1, \quad \chi_i^{(5)} = \pm 1, \quad (i = 2,3,4).$$

表示 $i=2,3,4$ 实质上由于序号选择的任意性，对应三种等价选择. 只取一种就可以了. 令 $\chi_2^{(4)}=-1, \chi_3^{(4)}=1, \chi_4^{(4)}=-1$（注意正交关系），则

$$\chi_2^{(5)} = -1, \quad \chi_3^{(5)} = -1, \quad \chi_4^{(5)} = 1.$$

讨论 对于有多于一个以上的不等价的一维表示，找商群的表示甚为有效.

例 4 $C_{3v}=\{E, C_3^1, C_3^2, m_a, m_b, m_c\}$.

$g = 6$，由伯恩塞德定理 $g = \sum_i l_i^2$，有 $l_1 = l_2 = 1, l_3 = 2$. 有三个不等价表示，两个一维的：$\chi_1^{(1)}(E) = 1, \chi_2^{(1)}(E) = 1, \chi_3^{(1)}(E) = 2$. 此外，$\chi_1^{(1)} = \chi_1^{(2)} = \chi_1^{(3)} = 1$（平庸表示）.

由同态定理 $G/N \sim G$，商群的不等价不可约表示系群 G 的不等价不可约的非忠实表示. 令 $N=G$，则 G/N 为一阶群，对应平庸恒等表示 $\{\Gamma^{(1)}(g_a)\}=\chi_1^a=1, \forall\ g_a \in G$. 令 $N=\{E, C_3^1, C_3^2\}$ 则 G/N 为二阶群，除平庸表示外，还有一个反对称表示 $\chi_1^{(1)}=1, \chi_2^{(2)}=-1$（可以一般证明，从略）. 因为是一维表示，表示矩阵即为其特征标.

当 m 维不可约表示（$m>1$）有 n 个时，如习题中 C_{5v} 群. 设 $\{\Gamma^{(i)}\}$ 为群的一维表示，$\{\Gamma^{(j)}\}$ 是群的 m 维表示，则 $\{\Gamma^{(j)*}\}$ 与 $\{\Gamma^{(i)}\Gamma^{(j)}\}$ 亦为群 G 的 m 维表示，特征标为 $\chi_j^{(k)*}=1$ 和 $\chi_i^{(k)}\chi_j^{(k)}$. m 维表示只有一个不等价不可约时，特征标必为实数，必为自共轭表示，即特征标全为实数. 此时当 $\chi_i^{(k)} \neq 1$ 时，$\chi_j^{(k)}=0$.

对于例 4，不等价二维不可约表示只有一个. 容易由正交关系得到其余特征标.

表 2.3　C_{3v}群的特征标表

类 k / 不可约表示 i	$\{E\}$ l_1	$\{C_3^1, C_3^2\}$ l_2	$\{m_a, m_b, m_c\}$ l_3
$\chi_1^{(k)}$	1	1	1
$\chi_2^{(k)}$	1	1	-1
$\chi_3^{(k)}$	2	-1	0

3. 确定表示的具体形式

原则上可以通过约化群的正则表示得到，但过程繁琐. 因此往往需要使用适当技巧，直接找到不可约表示的具体形式.

(1) 矩阵群. 利用自身表示，再通过下节介绍的"表示直乘的分解"方法，找到不可约表示．此时可以视为线性空间坐标的齐次变换(被动观点)，然后定义坐标的函数的变换算符，找到相应变换的不变函数空间，从而得到其忠实表示．以后在李群中要详细讨论．

(2) 抽象群．先找到其忠实表示，然后利用(1)中谈及矩阵群中应用的方法．

例 5　求 C_{4v}群不等价不可约表示的具体形式．

建立坐标系如图 2.2. C_{4v}群的各群元的操作意义见第一章．设$\forall\ g_a\in C_{4v}$，g_a 为二维空间的变换：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{g_a} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \Gamma(g_a)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

当 $g_a=E$ 时，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\Gamma(E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，显然，

$$\Gamma(E)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

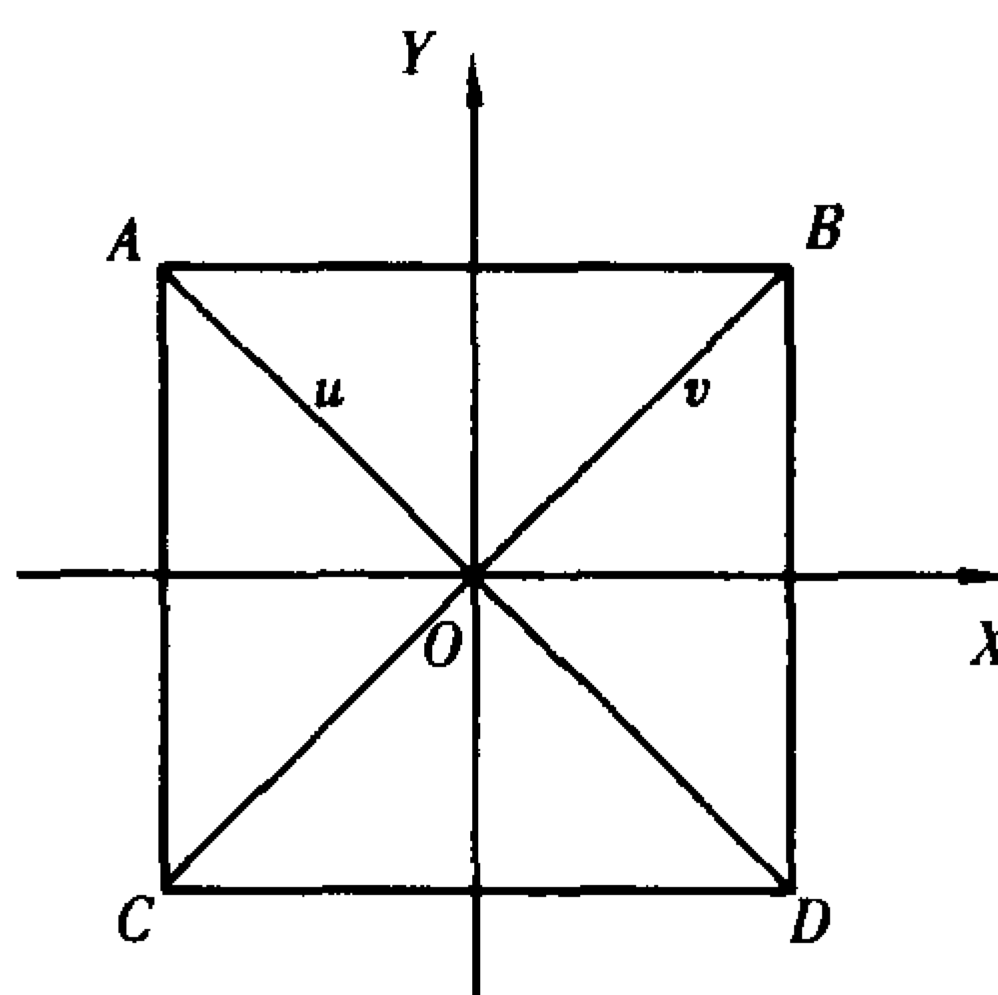


图 2.2

当 $g_a=C_4^3$ 时，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \Gamma(C_4^3)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11}(C_4^3)x + \Gamma_{12}(C_4^3)y \\ \Gamma_{21}(C_4^3)x + \Gamma_{22}(C_4^3)y \end{bmatrix}.$$

显然，对比两边，得 $\Gamma_{11}(C_4^3)=\Gamma_{22}(C_4^3)=0, \Gamma_{12}(C_4^3)=-1, \Gamma_{21}(C_4^3)=1$，即

$$\Gamma(C_4^3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

其余元素可以仿此得到．由于 C_{4v}群只有一个二维表示，就是说，群 C_{4v}的全部不等价不可约表示都已找到．它们是

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C_4^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_4^2=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C_4^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$m_X=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad m_Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_u=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

例 6 异常群(Ambivalent group)的特征标 $\chi(g_\alpha)=\chi^*(g_\alpha)$．异常群定义为对于某个 $g\in G$，及$\forall$ $g_\alpha\in G$，有 $g_\alpha=g^{-1}g_\alpha^{-1}g$（即每个共轭类中包含群元及其逆）．

证明 对于 G 的任意表示

$$\Gamma(g_\alpha) = \Gamma(g^{-1}g_\alpha^{-1}g) = \Gamma(g^{-1})\Gamma(g_\alpha^{-1})\Gamma(g),$$

因而

$$\begin{aligned}\chi(g_\alpha) &= \mathrm{Tr}[\Gamma(g^{-1})\Gamma(g_\alpha^{-1})\Gamma(g)] \\ &= \mathrm{Tr}[\Gamma(g_\alpha^{-1})] = \chi(g_\alpha^{-1}).\end{aligned}$$

但是 $\chi(g_\alpha^{-1})=\chi(g_\alpha)^{-1}$，故 $\chi(g_\alpha)=\chi^\alpha(g_\alpha)$．

二面体群 D_n、$SU(2)$是异常群，循环群 $SU(n)(n>3)$则是非异常群的实例．

问　题

1. 利用同态定理寻找 C_{4v} 群的一维表示．

2. 利用正则表示寻找 C_{3v} 群的全部不可约不等价表示．

3. 四元素集合 $\overline{Q}=\{1,i,j,k,\bar{1},\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$，其中 $i^2=j^2=k^2=-1$，$ij=-ji=k$（i,j,k 循环），$\bar{1}=-1$，$\bar{i}=-i$，$\bar{j}=-j$，$\bar{k}=-k$，乘法 $\bar{i}i=\bar{j}j=\bar{k}k=1$，$ji=\bar{k}$ 等证明 $\overline{Q}$ 构成一个群（称为四元素群）．

(i) 给出 $\overline{Q}$ 群的乘法表．

(ii) $\overline{Q}$ 分为 5 个等价类，群为异常群．

(iii) 寻找群 $\overline{Q}$ 的全部不等价不可约表示．

[提示：5 个异常共轭类为 $\{1\}$，$\{\bar{1}\}\{i,\bar{i}\}\{j,\bar{j}\}$，$\{k,\bar{k}\}$，验证 $\forall\ g_\alpha\in\overline{Q}$，$g_\alpha^{-1}\bar{i}g_\alpha=\{i$ 或 $\bar{i}\}$ 等．]

4. 给出 C_{5v} 对称性的全部操作元素集合，它们构成 C_{5v} 群．寻找 C_{5v} 群的全部不等价不可约表示．

[提示：由于二维表示有 2 个，请注意正文中讨论所述及的办法．]

5. 证明狄拉克的四维克里福特(Cliford)代数

$$r_\mu r_\nu + r_\nu r_\mu = 2\delta_{\mu\nu}E\ (\mu,\nu=1,2,3,\cdots,4),$$

在矩阵乘法下构成群 $G=\{E,\overline{E},r_\mu,\overline{r_\mu},r_\mu r_\nu(\mu>\nu),\overline{r_\mu r_\nu}(\mu>\nu),r_5,\overline{r_5},r_5r_\mu,\overline{r_5r_\mu}\}$，其中 $r_5=r_1r_2r_3r_4$ 及 $\forall\ g_\alpha\in G,\overline{g_\alpha}=-g_\alpha$. 求其不变子群 N 及相应商群；寻找此群的全部不等价不可约表示．

[提示：群 G 的阶 $g=2^5=32$，不变子群是 $N=\{E,\overline{E},r_1r_2,\overline{r_1r_2}$，$r_3r_4,\overline{r_3r_4},r_5,\overline{r_5}\}$，其阶 $h=8$，则商群 G/N 的维数 $d=\dfrac{32}{8}=4$. 若 p_i 为群 G 的第 i 个不可约表示的维数，则对子群 N，有 $d/p_i=$ 整数——艾托定理．本题 $4/p_i=$ 整数，故 G 的不可约表示的维数为一维、二维或四维．商群 $G/N=\{N,(r_3r_1)N,(r_4r_1)N,(r_3r_2)H\}$].

§ 2.7 表示的直积与直积群的表示

1. 表示的直积

设 $\{\Gamma^{(a)}(g_a)\}$ 与 $\{\Gamma^{(b)}(g_a)\}$ 为群 G 的两个 p 维与 q 维表示，则可用矩阵直积的方式构造集合

$$\{\Gamma(g_l)\} = \{\Gamma^{(a)}(g_l) \otimes \Gamma^{(b)}(g_l)\}, \quad \forall\ g_l \in G.$$

可以证明该集合构成群 G 的表示，称为直积表示．

$\Gamma^{(a)}(g_l) \otimes \Gamma^{(b)}(g_l)$ 可以显式地表为

$$\Gamma(g_a) = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^{(a)}[\Gamma^{(b)}] & \Gamma_{12}^{(a)}[\Gamma^{(b)}] & \cdots & \Gamma_{1p}^{(a)}[\Gamma^{(b)}] \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \Gamma_{p1}^{(a)}[\Gamma^{(b)}] & \cdots & \cdots & \Gamma_{pp}^{(a)}[\Gamma^{(b)}] \end{pmatrix}$$

其中 $\Gamma_{ij}^{(a)}[\Gamma^{(b)}]$ 表示矩阵元(数)与矩阵 $\Gamma^{(b)}$ 相乘．显然 $\Gamma(g_a)$ 为 $(p\times q)\times(p\times q)$ 矩阵．其矩阵元可表示为

$$\Gamma(g_a)_{m\alpha,n\beta} \equiv \Gamma^{(a)}(g_l)_{mn}\Gamma(g_t)_{\alpha\beta}(m,n = 1,\cdots,p;\alpha,\beta = 1,\cdots,q).$$

此外，有重要关系

$$\begin{aligned}
[\Gamma^{(a)}(g_l)\Gamma^{(b)}(g_t)] &= \sum_{i,j}\Gamma^{(a)}(g_l)_{m\alpha,ij}\Gamma^{(b)}(g_t)_{ij,n\beta} \\
&= \sum_{i,j}[\Gamma^{(a)}(g_l)_{mi}\Gamma^{(a)}(g_l)_{\alpha j}\Gamma^{(b)}(g_t)_{in}\Gamma^{(b)}(g_t)_{j\beta}] \\
&= \sum_{i,j}[\Gamma^{(a)}(g_l)_{mi}\Gamma^{(a)}(g_t)_{in}][\Gamma^{(b)}(g_l)_{\alpha j}\Gamma^{(b)}(g_t)_{j\beta}] \\
&= [\Gamma^{(a)}(g_l)\Gamma^{(a)}(g_t)]_{mn}[\Gamma^{(b)}(g_l)\Gamma^{(b)}(g_t)]_{\alpha\beta} \\
&= \{[\Gamma^{(a)}(g_l)\Gamma^{(a)}(g_t)] \otimes [\Gamma^{(b)}(g_l)\Gamma^{(b)}(g_t)]\}_{m\alpha,n\beta} \\
&\qquad (m,n = 1,\cdots,p;\alpha,\beta = 1,\cdots,q).
\end{aligned}$$

亦即

$$[\Gamma^{(a)}(g_l) \otimes \Gamma^{(b)}(g_l)][\Gamma^{(a)}(g_t) \otimes \Gamma^{(b)}(g_t)]$$

$$= [\Gamma^{(a)}(g_l)\Gamma^{(a)}(g_t)] \otimes [\Gamma^{(b)}(g_l)\Gamma^{(b)}(g_t)]. \qquad (2.25)$$

由此式易见$\{\Gamma\}$也构成群 G 的一个表示：

$$\begin{aligned}\Gamma(g_l)\Gamma(g_t) &= [\Gamma^{(a)}(g_l) \otimes \Gamma^{(b)}(g_l)][\Gamma^{(a)}(g_t) \otimes \Gamma^{(b)}(g_t)] \\ &= [\Gamma^{(a)}(g_l)\Gamma^{(a)}(g_t)] \otimes [\Gamma^{(b)}(g_l)\Gamma^{(b)}(g_t)] \\ &= [\Gamma^{(a)}(g_l g_t)] \otimes [\Gamma^{(b)}(g_l g_t)] = \Gamma(g_l g_t).\end{aligned}$$

例 1 设系统由两子系统构成，两子系统之间相互作用可以略去，且它们有共同的对称群 G，则两者的能量本征函数各自构成群 G 的不变子空间 L_a 与 L_b. 这些本征函数各自按群 G 的特定不可约表示$\{\Gamma^{(a)}\}$与$\{\Gamma^{(b)}\}$变换，即

$$P_\alpha \Psi_\mu^{(a)}(x) = \Psi_\mu^{(a)}(g_\alpha^{-1}x) = \sum_\nu \Psi_\nu^{(a)}(x)\Gamma^{(a)}(g_\alpha)_{\nu\mu},$$

$$P_\alpha \Phi_\rho^{(b)}(x) = \Phi_\rho^{(b)}(g_\alpha^{-1}x) = \sum_\lambda \Phi_\lambda^{(b)}(x)\Gamma^{(b)}(g_\alpha)_{\lambda\rho},$$

其中$\forall\ \Psi_\mu^{(a)}(x) \in L_a$，$\forall\ \Phi_\rho^{(b)}(x) \in L_b$（$\rho=1,\cdots,n;\mu=1,\cdots,m$）．$\forall\ g_\alpha \in G$，则系统的总波函数 $\Psi_{\mu\rho}^{[ab]}(x) \equiv \Psi_\mu^{(a)}(x)\Phi_\rho^{(b)}(x)$，总共有 $m \times n$ 个. 并且

$$\begin{aligned}P_\alpha \Psi_{\mu\rho}^{(ab)} &= \Psi_{\mu\rho}^{(ab)}(g_\alpha^{-1}x) \\ &= \sum_{\nu\lambda} \Psi_\nu^{(a)}(x)\Phi_\lambda^{(b)}(x)\Gamma^{(a)}(g_\alpha)_{\nu\mu}\Gamma^{(b)}(g_\alpha)_{\lambda\rho} \\ &= \sum_{\nu\lambda} \Psi_{\nu\lambda}^{(ab)} \cdot [\Gamma^{(a)}(g_\alpha) \otimes \Gamma^{(b)}(g_\alpha)]_{\nu\lambda,\mu\rho},\end{aligned}$$

其中$[\Gamma^{(a)}(g_\alpha) \otimes \Gamma^{(b)}(g_\alpha)]_{\nu\lambda,\mu\rho} = \Gamma(g_\alpha)_{\nu\lambda,\mu\rho}$是表示$\{\Gamma^{(a)}\}$与$\{\Gamma^{(b)}\}$为直积表示的矩阵元．如果把$\{\Psi_\mu^{(a)}\}$与$\{\Phi_\rho^{(b)}\}$分别视为线性空间 L_a 与 L_b 的基，则$\{\Psi_{\mu\rho}^{(a)}\}$正好生成 $L \equiv L_a \otimes L_b$，这里 L 称为 L_a 与 L_b 的直积空间．

回到本例，系统的总波函数$\{\Psi_{\mu\rho}^{(ab)}\}$按群 G 的表示$\{\Gamma^{(a)}\}$与$\{\Gamma^{(b)}\}$的直积表示$\{\Gamma^{(ab)}\}$变换．

直积表示的特征标有重要性质：

$$\mathrm{Tr}[\Gamma(g_\alpha)] = \mathrm{Tr}[\Gamma^{(a)}(g_\alpha)] \cdot \mathrm{Tr}[\Gamma^{(b)}(g_\alpha)], \qquad (2.26)$$

或

$$\chi(g_\alpha) = \chi^{(a)}(g_\alpha)\chi^{(b)}(g_\alpha), \quad \forall\ g_\alpha \in G.$$

2. 直积表示的约化

设直积表示$\{\Gamma(g_\alpha)\}$可以约化为

$$\Gamma(g_\alpha) = \sum_{\oplus_i} m_i \Gamma^{(i)}(g_\alpha), \quad \forall g_\alpha \in G,$$

则根据(2.13)式，应有

$$m_i = \frac{1}{g}\sum_\alpha \chi^{(i)*}(g_\alpha)\chi(g_\alpha) \quad (g = pq)$$

$$= \frac{1}{g}\sum_\alpha \chi^{(i)*}(g_\alpha)[\chi^{(a)}(g_\alpha)\chi^{(b)}(g_\alpha)]. \qquad (2.27)$$

例 2 设C_{4v}群的二维表示为$\Gamma^{(5)}$，则

$$\Gamma^{(5)} \otimes \Gamma^{(5)} = \Gamma^{(1)} \oplus \Gamma^{(2)} \oplus \Gamma^{(3)} \oplus \Gamma^{(4)}.$$

在量子力学中，两个不可约表示的直积的约化，通常称为对称群 G 的克莱布西-戈登(Clebsch-Gordon)级数．相应的相似变换(使表示幺正化)矩阵元素叫 C-G 系数．常用的 C-G 系数已制成 C-G 系数表，查阅十分方便．

3. 群的直积(直积群)表示

在§1.5 节我们已介绍过直积群．设 G 为群 H 与 K 所构成的直积群，$G=H\otimes K$. 现讨论 G 的表示与 H、K 的表示有什么关系．

设$\forall H_m \in H(m=1,2,\cdots,h)$，$\forall K_\alpha \in K(\alpha=1,\cdots,k)$，则$\forall G_{m\alpha} \in G$，有

$$G_{m\alpha} = H_m K_\alpha.$$

令 $H_m H_n = H_i$，$K_\alpha K_\beta = K_\gamma$，则有

$$G_{m\alpha}G_{n\beta} = (H_m,K_\alpha)(H_n,K_\beta) = (H_i,K_\gamma) = G_{i\gamma} \in G.$$

设$\{\Gamma^{(p)}(H_m)\}$与$\{\Gamma^{(q)}(K_\alpha)\}$为群 H 与 K 的两个表示，则

$$\Gamma^{(p)}(H_m)\Gamma^{(p)}(H_n) = \Gamma^{(p)}(H_i), \quad \Gamma^{(q)}(K_\alpha)\Gamma^{(q)}(K_\beta) = \Gamma^{(q)}(K_\gamma).$$

相应的直积，并用到上节证明的矩阵直积公式，

$$\Gamma^{(p)}(H_i) \otimes \Gamma^{(q)}(K_\gamma)$$
$$= [\Gamma^{(p)}(H_m)\Gamma^{(p)}(H_n)] \otimes [\Gamma^{(q)}(K_\alpha)\Gamma^{(q)}(K_\beta)]$$
$$= [\Gamma^{(p)}(H_m) \otimes \Gamma^{(q)}(K_\alpha)][\Gamma^{(p)}(H_n) \otimes \Gamma^{(q)}(K_\beta)].$$

令 $\Gamma^{(pq)}(G_{i\gamma})=\Gamma^{(p)}(H_i)\otimes\Gamma^{(q)}(K_\gamma)$,则上式变为

$$\Gamma^{(pq)}(G_{i\gamma}) = \Gamma^{(pq)}(G_{m\alpha})\Gamma^{(pq)}(G_{n\beta}),$$

其中 $G_{m\alpha},G_{n\beta}\in G,G_{i\gamma}=G_{m\alpha}G_{n\beta}\in G$,故$\{\Gamma^{(pq)}(G_{i\gamma})\}$也构成群的一个表示．换言之,用群 H 与群 K 表示的直积,提供了直积群的表示的构造方法．但应强调指出,并非直积群的所有表示都可以用这种方法提供．

进而讨论直积群的不等价不可约表示．设$\{\Gamma^{(p)}\}$与$\{\Gamma^{(q)}\}$为群 H 与 K 的两个不可约表示,则其直积$\{\Gamma^{(pq)}\}$是群 G 的一个表示,且它的特征标,

$$\chi_{pq}(G_{i\gamma}) = \chi_p(H_i)\chi_q(K_\gamma), \tag{2.28}$$

其中 $\chi^{(p)}(H_i)$与 $\chi^{(q)}(K_\gamma)$应满足不可约判据,

$$\sum_{\forall H_m\in H}\chi_p(H_m)\chi_p^*(H_m) = h \quad (\text{群 } H \text{ 的阶}),$$

$$\sum_{\forall K_\gamma\in K}\chi_q(K_\gamma)\chi_q^*(K_\gamma) = k \quad (\text{群 } K \text{ 的阶}).$$

上面两式的两边分别相乘,得

$$hk= g(G \text{ 的阶})$$
$$= \sum_{\substack{H_m\in H\\K_\gamma\in K}}[\chi_p(H_m)\chi_q(K_\alpha)][\chi_p(H_m)\chi_q(K_\alpha)]^*$$
$$= \sum_{G_{m\alpha}\in G}\chi_{pq}(G_{m\alpha})\chi_{pq}(G_{m\alpha})^*.$$

由此可见,$\{\Gamma^{(pq)}(G_{m\alpha})\}$构成群的不可约表示．亦即,若$\{\Gamma^{(p)}(H_m)\}$与$\{\Gamma^{(q)}(K_\alpha)\}$为群 H 与 K 的不可约表示,则$\{\Gamma^{(pq)}\}$构成直积群的不可约表示．事实上用这种方法可以构成群 G 的全部不等价不可约表示．

由伯恩塞德定理,对于$\{\Gamma^{(p)}\}$与$\{\Gamma^{(q)}\}$,有

$$\sum_{i=1}^{c_h} l_{(i)}^2 = h, \sum_{j=1}^{c_k} l_{(j)}^2 = k.$$

将两式两边分别相乘，得

$$hk = g = \sum_{i=1}^{c_h} \sum_{j=1}^{c_k} [l_i l_j]^2,$$

其中 $l_i l_j = l_{ij}$ 就是群 G 的一个表示的维数，c_h 与 c_k 分别为群 H 与群 K 的全部不等价不可约表示的个数．上式可改写为

$$\sum_{i,j} l_{ij}^2 = g.$$

由伯恩塞德定理可知，左边求和遍及所有群 G 的不等价不可约表示．由此有

推论 直积群的全部共轭类数 c_g 等于 H 与 K 的共轭类数的乘积，即 $c_g = c_h \cdot c_k$.

小结 用群 H 与 K 的表示直积的方法虽然不能构造群 G 的全部表示，但是，用群 H 与 K 的所有不等价不可约表示构成的直积表示，却可提供群 G 的全部不等价不可约表示．

例 3 Γ 矩阵群.

N 个 γ 矩阵满足对易关系

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = \gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu} I, \quad \mu, \nu = 1, 2, \cdots, N.$$

由 γ_μ 矩阵以及一切可能连乘的集合构成 Γ 矩阵群．

γ_μ 矩阵性质：

$$\gamma_\mu^2 = 1; \quad \gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 0 \quad (\mu \neq \nu).$$

对该群取一个忠实的自我不可约幺正表示：

$$\gamma_\mu^+ = \gamma_\mu^{-1} = \gamma_\mu. \tag{2.29}$$

令 $\gamma_\eta = \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_N$，则 $\gamma_\eta^2 = (-1)^{N(N+1)/2} \gamma_\eta$. N 为奇数时，γ_η 与 $\gamma_\mu (\mu = 1, \cdots, N)$ 对易，因此由舒尔引理，γ_η 应为常数矩阵，即有

$$\gamma_\eta = \begin{cases} \pm E, & N = 4n + 1 \quad (\text{不是新元素}), \\ \pm \mathrm{i}E, & N = 4n - 1. \end{cases}$$

当 $N = 4n + 1$ 与 $4n$ 时，两个矩阵群同构；当 $N = 4n - 1$ 时，生成元

为 $\gamma_\mu(\mu=1,2,\cdots,N-2)$ 和 $\mathrm{i}E$. 因此 $\{\Gamma(4n-1)\}=\{\Gamma(4n-2)\}\otimes\{E,\mathrm{i}E\}$. 以后只需讨论 $N=2n$ 的偶数 Γ 矩阵群.

Γ 矩阵群 G 是异常群.

$\forall\ g_\alpha\in G, -g_\alpha\in G$, 设所有"+"号 g_α 构成集合 Γ', 其元素个数 $=g/2$. Γ' 集合的元素, 即从 N 个 γ_μ 矩阵中取 m 个不同 γ_μ 矩阵 $(m=0,1,\cdots,N)$ 乘积的数目应为

$$g/2 = C_N^0 + C_N^1 + C_N^2 + \cdots + C_N^m + \cdots + C_N^N = 2^N,$$

故群的阶 $g=2^{N+1}(N=2n)$.

显然, 其特征标在自身表示中,

$$\chi(g_\alpha) = \begin{cases} \pm\, d(\text{矩阵维数}), & g_\alpha = \pm I, \\ 0, & g_\alpha \neq \pm I. \end{cases}$$

由不可约判据,

$$I = \frac{1}{g}\sum_{g_\alpha\in G}|\chi(g_\alpha)|^2 = \frac{2d^2}{2^{N+1}},$$

故得在最低维表示中的维数 $d=2^{N/2}, N=2n$.

此外, $\det\gamma_\mu=(-1)^{d/2}(N\geqslant 4$ 时, $\det\gamma_\mu=1)$.

由于 $\forall\ g_\alpha\in\Gamma'$, 有 $\mathrm{Tr}\{\Gamma(g_\alpha)\}=0$, 所有 g_α 构成完备线性空间 L_d. 事实上, 如果线性相关,

$$\sum_{g_\alpha\in\Gamma'} C(g_\alpha)g_\alpha = 0(\text{系数 } C(g_\alpha) \text{ 不全为零}).$$

用 $g_i^{-1}\in\Gamma'$ 右乘此式, 并取迹, 得 $C(g_i)=0$. 仿此可证全部 $C(g_i)=0, \forall\ g_i\in\Gamma'$. 故任何 $d\times d$ 矩阵 M 均可按 g_α 展开,

$$M = \sum_{g_\alpha\in\Gamma'} C(g_\alpha)\cdot g_\alpha, C(g_\alpha) = \frac{1}{d}\mathrm{Tr}(g_\alpha^{-1}\boldsymbol{M}).$$

一般说来, $N=4n$ 时, 除一维表示外, Γ 矩阵群只有一个 d 维表示; $N=4n-1$ 时, 有两个不等价不可约的 d 维表示. 可以证明, 两组等价的 d 维不可约表示 r 矩阵, 实际上只确定到一常数. 如限制相似变换矩阵的模为 1, 则常系数取 $\exp(\mathrm{i}2\pi m/d)$, 其中 $0\leqslant m\leqslant d$.

r_μ 矩阵群的具体形式(自身表示):

(i) $N=2$,可取泡利矩阵和单位矩阵,

$$\gamma_1=\sigma_1,\quad \gamma_2=\sigma_2,\quad \gamma_3=-\mathrm{i}\gamma_1\gamma_2=\sigma_3,\quad I.$$

(ii) $N=2$(狄拉克矩阵).

$$\gamma_1=\sigma_2\times\sigma_1,\quad \gamma_2=\sigma_2\times\sigma_2,\quad \gamma_3=\sigma_1\times I,$$

$$\gamma_4=\sigma_2\times\sigma_3,\quad \gamma_5=\sigma_3\times I=-\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4.$$

$\{\Gamma\}$矩阵群在旋量分析、量子场论、高能粒子物理的分立对称(电荷共轭、CP 共轭)中有广泛应用.

问　　题

1. 试证在 Γ 矩阵群中,有关系式

$$\gamma_\eta^2=(-1)^{N(N+1)/2}r_\eta,$$

式中 $\gamma_\eta=\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_N$.

2. 试证 $N=4n$ 与 $N=4n+1$ 的两 Γ 矩阵群同构.

3. 证明当 $N=2n$ 时,满足反对易关系

$$\{\gamma_\mu,\gamma_\nu\}=2\delta_{\mu\nu}I\quad(\mu,\nu=1,\cdots,N)$$

的两组 d 维不可约表示$\{\gamma_\mu\}$与$\{\gamma_\mu{}'\}$必等价,

$$\gamma_\mu{}'=X^{-1}\gamma_\mu X(\text{其中 } X \text{ 为 } d\times d \text{ 矩阵},\det X\neq 0)$$

[提示:证明其特征标相同. 注意到 γ_μ 矩阵是零迹、厄米、幺正的,本征值为±1,且成对出现,否则不会零迹. 故

$$\chi'(\gamma_\mu{}')=\chi(\gamma_\mu)=\begin{cases}\pm d, & \gamma_\mu=\pm I,\\ 0, & \gamma_\mu\neq\pm I.\end{cases}$$]

4. 证明两循环群 $G_1=\{E,\sigma_u\}$ 与 $G_2=\{E,\sigma_v\}$(其中 σ_u 与 σ_v 为绕 u 轴与 v 轴转动 180°,u 与 v 轴同在一个平面上,且互相垂直)的直积群为 $G_1\otimes G_2=G=\{I,C_2^1,\sigma_u,\sigma_v\}$(其中 C_2^1 为绕 z 轴的旋转 π). 由 G_1 与 G_2 的不等价不可约表示构造群 G 的全部不等价不可约表示.

第三章　物理学中的置换群

本章及第四章我们初步介绍群论在量子力学及晶体物理中的应用，主要涉及有限群论. 同时还比较详细地介绍置换群与点群. 实际上，这些内容限于群论的初步应用，但已足以使我们相信，群论在自然科学与工程技术中有无限光明的前景.

§3.1　维格纳(Wigner)-爱卡特(Eckart)定理

1. 定态波函数按对称群分类

在第二章的开始，我们已经谈到在线性对称变换下，能量为 E 的本征函数按对称群 G 的表示 $\{\Gamma(g_\alpha)\}$ 变换，

$$P_\alpha \Phi_\rho(x) = \Phi_\rho(g_\alpha^{-1}x) = \sum_{\lambda=1}^{m} \Phi_\lambda(x)\Gamma(g_\alpha)_{\lambda\rho}, \qquad (3.1)$$

式中 m 个本征函数 $\{\Phi_\rho(x)\}(\rho=1,2,\cdots,m)$ 对应同一本征值，术语叫 m 重简并. $\{\Gamma(g_\alpha)\}$ 称为对应能量 E 的表示. $\{\Phi_\rho(x)\}$ 构成希尔伯特空间中的不变子空间. 选取幺正幺模表示作为所有等价表示的标准形式，则可作如下约化：

$$\Gamma(g_\alpha) = \sum_{\oplus i} m_i \Gamma^{(i)}(g_\alpha), \quad \forall\, g_\alpha \in G, \qquad (3.2)$$

$$\chi(g_\alpha) = \sum_i m_i \chi_i(g_\alpha),$$

其中
$$m_i = \frac{1}{g}\sum_{\forall g_\alpha \in G} \chi_i^*(g_\alpha)\chi(g_\alpha).$$

若 $\{\Gamma(g_\alpha)\}$ 为非标准形式，可以按照标准的线性代数方法对角化，即 $\Gamma'(g_\alpha)=X^{-1}\Gamma(g_\alpha)X$，这相当于空间基矢 $\{\Phi_\rho(x)\}$ 变换到

$\{\Psi_\rho(x)\}$，其中

$$\Psi_\rho^{(jr)}(x) = \sum_\rho \Phi_\rho(x) X_{\rho\mu}^{(ir)}, \tag{3.3}$$

符号 i 表示约化(3.2)式中所含的低维不可约序号，r 则表示按 $\{\Gamma^{(i)}(g_\alpha)\}$ 表示变换的子函数集合 $\{\Phi_\mu^{(i)}\}$. 因此，若 P_α 表示元素 g_α 对应的变换算符，则

$$P_\alpha \Psi_\mu^{(ri)}(x) = \sum \Psi_\nu^{(ri)}(x) \Gamma^{(i)}(g_\alpha)_{\nu\mu}, \quad \forall\, g_\alpha \in G$$

相应(3.3)式的逆变换是

$$\Phi_\rho(x) = \sum_{i\mu r} \Psi_\mu^{(ri)}(x)((X^{(ir)})^{-1})_{\mu\rho}. \tag{3.4}$$

这里，$\Psi_u^{(ir)}(x)$ 称为属于不可约表示 $\{\Gamma^{(i)}(g_\alpha)\}$ 的第 μ 行的函数.

令 $P_\mu^{(i)}$ 为作用在任意函数 $\Phi(x)$ 上，并可以把属于不可约表示 $\{\Gamma^{(i)}(g_\alpha)\}$ 的第 μ 行函数挑选出来的投影算子. 令

$$P_\mu^{(i)} \equiv \frac{m_i}{g} \sum_{g_\alpha \in G} \Gamma^{(i)*}(g_\alpha)_{\mu\nu} P_\alpha. \tag{3.5}$$

事实上，

$$\begin{aligned} P_\mu^{(i)} \Phi_\rho(x) &= \sum_{i',\mu',r} \frac{m_i}{g} \sum_{g_\alpha \in G} (\Gamma^{(i)}(g_\alpha)_{\mu\mu'})^* P_\alpha \Psi_{\mu'}^{(ir)} (X_{\mu'\rho}^{(i'r)})^{-1} \\ &= \sum_{i'\mu' r} \frac{m_i}{g} \sum_{g_\alpha \in G} (\Gamma^i(g_\alpha)_{\mu\mu'})^* \\ &\quad \cdot \sum_\nu \Psi_\nu^{(i'r)}(x) \Gamma^{(ir)}(g_\alpha)_{\nu\mu'} (X^{(i'r)})_{\mu'\rho}^{-1} \\ &= \sum_\gamma \Psi_\mu^{(ir)}(x)(X^{(ir)})_{\mu\rho}^{-1}. \end{aligned}$$

此式右边表示的确实是 $\Phi_\rho(x)$ 中属不可约表示 $\{\Gamma^{(i)}(g_\alpha)\}$ 的第 μ 行的函数成分.

由定义式(3.5)，即

$$P^{(i)} = \sum_{\mu=1}^{m} P_\mu^{(i)} = \frac{m_i}{g} \sum_{g_\alpha \in G} \chi_i^*(g_\alpha) P_\alpha, \tag{3.6}$$

即是

$$P^{(i)}\Phi_\rho = \sum_{r,\mu}\Psi_\mu^{(ri)}(x)(X_{\mu\rho}^{(ri)})^{-1} = \sum_{i=1}^{n}\Phi_\rho^{(i)},$$

其中$\{\Phi_\rho^{(i)}\}(i=1,\cdots,n)$属于不可约表示$\{\Gamma^{(i)}(g_\alpha)\}$的函数组. 容易证明由(3.5)与(3.6)式所定义的投影算符满足完备性、正交性、等幂性(见习题).

维-爱定理 幺正线性变换群 P_G 的两不等价不可约幺正表示的函数(行矢量)相互正交;同一不可约幺正表示不同行的函数(行矢量)正交,而同一行函数的内积(即模)与行序号无关.

证明 令(上、下标意义同上)

$$\begin{cases} P_\alpha\Psi_\mu^{(i)}(x) = \sum_\nu \Psi_\nu^{(i)}\Gamma^{(i)}(g_\alpha)_{\nu\mu}, \\ P_\alpha\Phi_\rho^{(j)}(x) = \sum_\lambda \Psi_\lambda^{(j)}\Gamma^{(j)}(g_\alpha)_{\lambda\rho} \end{cases} \quad (\forall\ g_\alpha \in G),$$

以及内积(不同表示的行矢量)

$$\langle \Phi_\rho^{(i)}, \Psi_\mu^{(i)} \rangle \equiv X_{\rho\mu}^{ji},$$

则由(3.3)式,可得

$$\begin{aligned} \langle \Phi_\rho^{(j)}, P_\alpha\Psi_\mu^{(i)} \rangle &= \sum_\nu \langle \Phi_\rho^{(j)}, \Psi_\nu^{(i)} \rangle \Gamma^{(i)}(g_\alpha)_{\nu\mu} \\ &= \sum_\nu X_{\rho\nu}^{ji}\Gamma^{(i)}(g_\alpha)_{\nu\mu} \quad (\forall\ g_\alpha \in G). \end{aligned} \tag{3.7}$$

由内积的性质

$$\begin{aligned} \langle \Phi_\rho^{(j)}, P_\alpha\Psi_\mu^{(i)} \rangle &= \langle \Phi_\rho^{(j)}, P_\alpha\Psi_\mu^{(i)} \rangle^+ = \langle P_\alpha^{-1}\Phi_\rho^{(j)}, \Psi_\mu^{(i)} \rangle \\ &= \sum_\lambda \Gamma^{(j)}(g_\alpha^{-1})_{\lambda\rho}{}^* \langle \Phi_\lambda^{(j)}, \Psi_\mu^{(i)} \rangle \\ &= \sum_\lambda X_{\lambda\mu}^{ji}\Gamma^{(i)}(g_\alpha)_{\rho\lambda} \end{aligned}$$

即是说,

$$X^{ji}\Gamma^{(j)}(g_\alpha) = \Gamma^{(i)}(g_\alpha)X^{ji}, \quad \forall\ g_\alpha \in G. \tag{3.8}$$

由舒尔第二引理,

$$X^{ji} = \begin{cases} 0 & (j \neq i, \text{即不同表示}), \\ \lambda I & (j = i, \lambda\ \text{常数}). \end{cases}$$

当然，常数 λ 与矩阵元的脚标无关.

2. 正则简并与偶然简并

若能级 E 对应的表示是不可约的，则简并($m>1$)称为正则简并；若对应可约表示则称偶然简并.

设系统的哈密顿量为 $H=H_0+H_1$，其中微扰 H_1 与 H_0 有相同对称性，即

$$[P_\alpha, H_0] = 0, \quad [P_\alpha, H_1] = 0.$$

设$\{\Gamma^{(i)}(g_\alpha)\}$为确定波函数 $\Psi_\mu^{(i)}(x)$的不可约表示，

$$P_\alpha \Psi_\mu^{(i)}(x) = \sum_\nu \Psi_\nu^{(i)}(x) P^{(i)}(g_\alpha)_{\nu\mu}, \quad \forall\, g_\alpha \in G,$$

且

$$\begin{aligned} P_\alpha[H_1 \Psi_\mu^{(i)}(x)] &= H_1 P_\alpha \Psi_\mu^{(i)}(x) \\ &= \sum_\nu [H_1 \Psi_\nu^{(i)}(x)] \Gamma^{(i)}(g_\alpha)_{\nu\mu}. \end{aligned}$$

对于正则简并，能量一级微扰矩阵元

$$E_{\nu\mu}^{(i)} = \langle \Psi_\nu^{(i)}, \quad H_1 \Psi_\mu^{(i)} \rangle = \delta_{\nu\mu} \Delta E,$$

其中 $H_0 \Psi_\mu^{(i)}(x) = E \Psi_\mu^{(i)}, H_1 \Psi_\mu^{(i)}(x) = \Delta E \Psi_\mu^{(i)}(x)$.

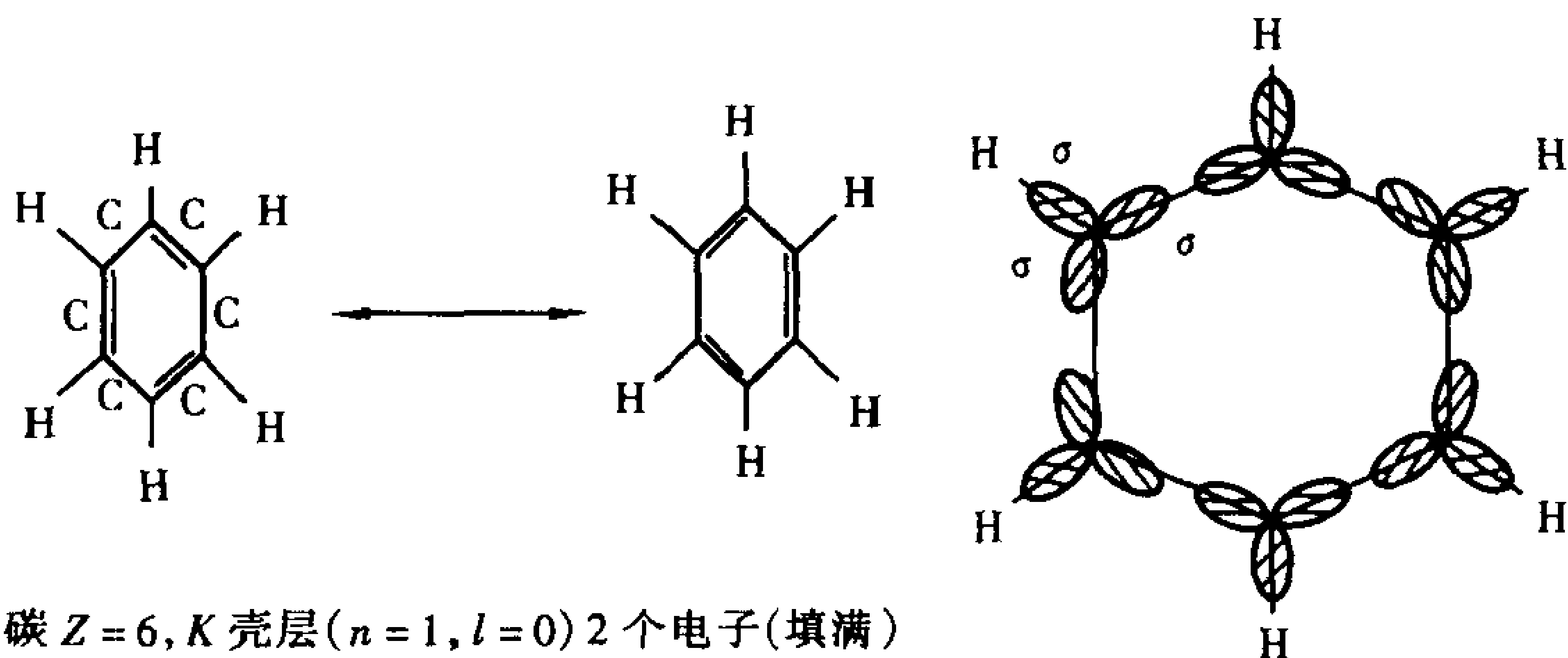
即是说，能级发生平移，但未分裂. 此种对称微扰不会消除正则简并.

对于偶然简并，属同一不可约表示的各行的波函数，能级有相同移动不会分裂. 但对属于两个不等价不可约表示的波函数，能级移动不相等，能级会发生分裂，简并会部分消除，直到变成正则简并. 一般有

$$\langle \Psi_\mu^{(i)}, H_1 \Psi_\nu^{(j)} \rangle = \delta_{\mu\nu} \delta_{ij} \Delta E.$$

例 二面体群 D_6 对苯分子能级的计算中的简化

图 3.1 为苯(C_6H_6)分子结构图. 其中每个碳原子的 4 个价电子，有 3 个 σ 电子紧紧束缚在碳原子上，其波函数主要分布在碳-碳与碳-氢的主键上. 另一个价电子即 π 电子绕苯环转动，主要垂直于环平面(见图 3.2).



(a)分子结构　　　　(b)σ 电子波函数分布示意图

图 3.1　苯分子结构图

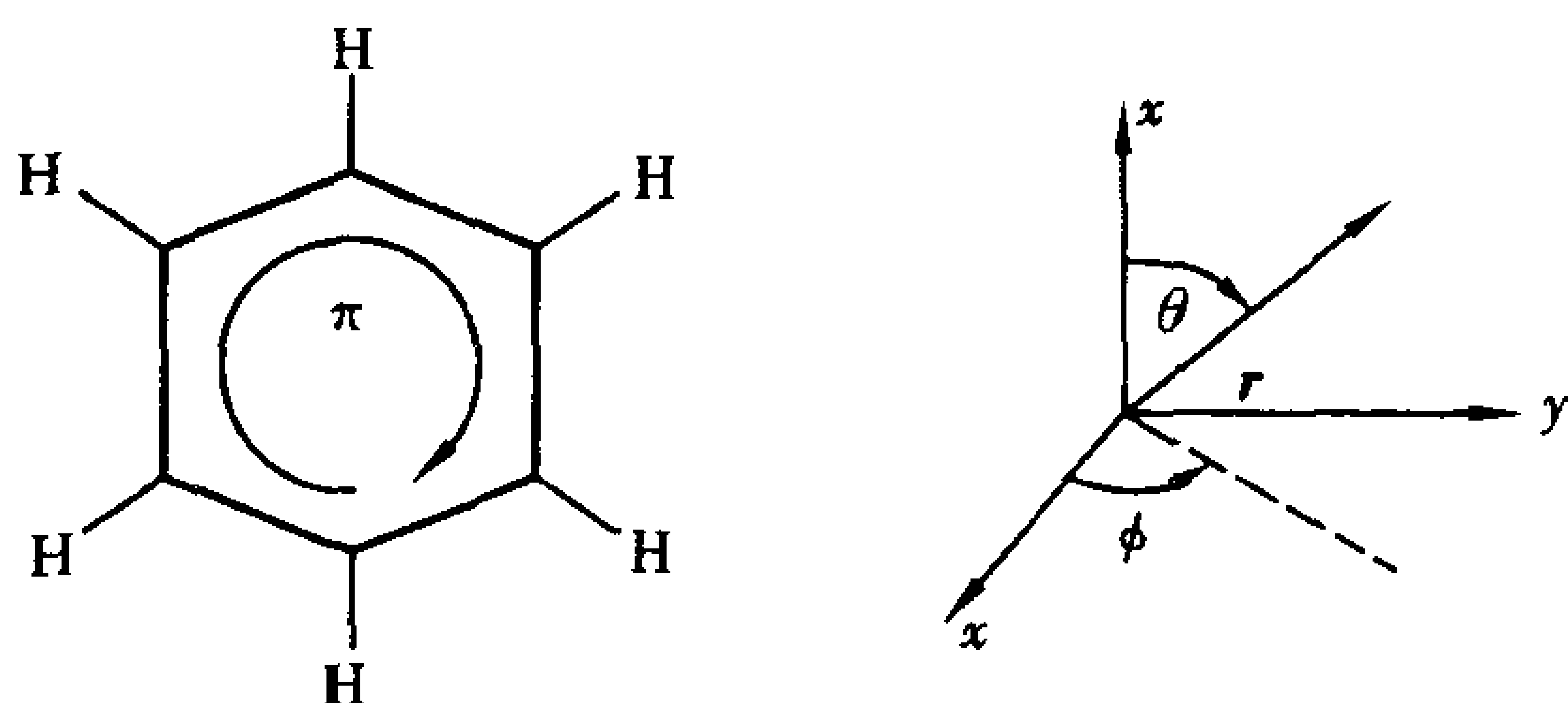


图 3.2　苯分子中局域化的 π 电子

设系统的哈密顿方程为

$$H\Psi = E\Psi,$$

其中 $H=H_0+H_1$，$H_0=\dfrac{p_i^2}{2m}$（p_i 与 m 为第 i 个电子的动量和质量），$H_1=-\sum\limits_i \dfrac{ze^2}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|}$表示电子与碳原子核的相互作用. 采用变分法解决此问题.

$$\delta E = \delta \frac{\langle \Psi | H | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle} = 0. \tag{3.9}$$

其中 $\Psi(\boldsymbol{r})$ 表示内部 π 电子(p 波)的近似波函数,$\Psi(\boldsymbol{r}) = \sum_{l=1}^{6} a_i \Phi(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i)$,a_i 为待定函数,$\boldsymbol{r}_i$ 表示第 i 个碳原子的位置. 简记 $\Phi_i = \Phi(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i)(i=1,2,\cdots,6)$. 解本征值方程以确定$\{a_i\}$,$i=1,2,\cdots,6$(令$\Phi(\boldsymbol{r}) = br\cos\theta e^{-ar}$,$b$ 为常数),

$$(H_{ij})\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_6 \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_6 \end{pmatrix} \quad (i,j = 1,2,\cdots,6) \tag{3.10}$$

或等价的久期方程

$$\det|H_{ij} - E\delta_{ij}| = 0,$$

其中 $H_{ij} = \langle \Phi_i | H | \Phi_j \rangle = \int d^3x \Phi_i^*(\boldsymbol{r}) H \Phi_j(\boldsymbol{r})$.

注意到 H 在二面体群 D_6 下具有不变性,令 $a = C'_6$(转动 $2\pi/6$),b 为对 x 轴的反射操作(如图 3.3),则有

$$a^6 = b^2 = I(\text{恒等变换}), \quad aba = b,$$

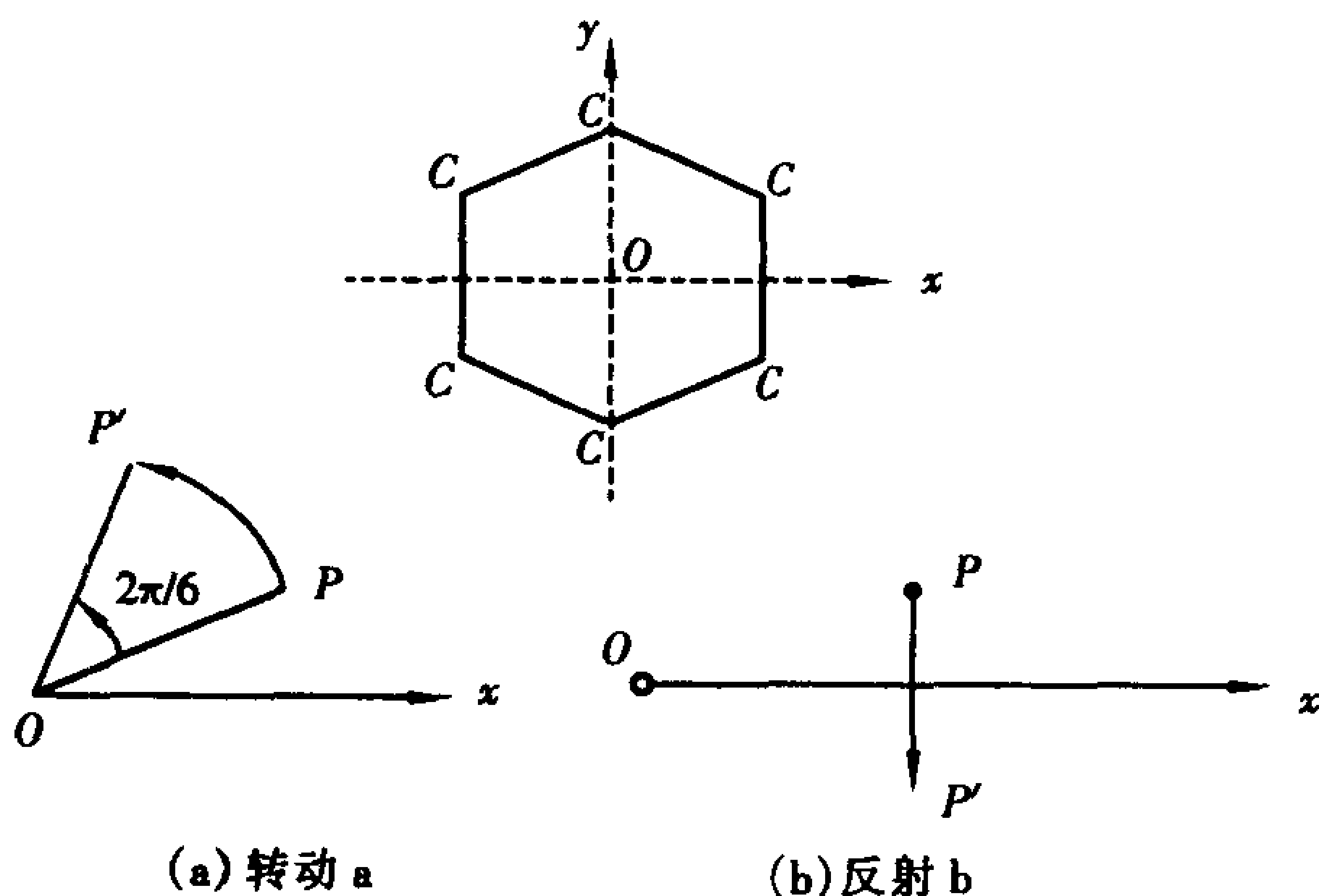


图 3.3 D_6 二面体对称操作

集合 $D_6 = \{I, a, a^2, a^3, a^4, a^5, b, ba, ba^2, ba^3, ba^4, ba^5\}$阶 $g=12$. 有 6

个类($c=K=6$):

$$e_1=\{I\},n_1=1;e_2=\{a^3\},n_2=1;e_3=\{a,a^{-1}\},n_3=2;$$

$$e_4=\{a^2,a^{-2}\},n_4=2;e_5=\{a^3,a^{-3}\},n_5=2;$$

$$e_6=\{b,ba^2,a^2b\},n_6=3$$

(注意:$a^n=a^{-(b-n)},n\leqslant 5$).

由伯恩塞德定理 $g=\sum_{i=1}^{6}l_i^2=12$,有 $l_1=l_2=l_3=l_4=1,l_5=l_6=2$.

利用维-爱定理,$\forall\ g_a\in D_6,g_aH=Hg_a$,有

$$\langle\Phi_\rho^{(i)}|H_1|\Phi_\sigma^{(j)}\rangle=\delta_{ij}\delta_{\rho\sigma}\langle i|H_1|i\rangle,$$

其中 $\Phi_\rho^{(i)}$ 为群 D_6 的第 i 个不可约表示$\{\Gamma_g^{(i)}\}$的相应表示空间的基,$\rho=1,2,\cdots,6$,即

$$P_a\Phi_\rho^{(i)}(x)=\sum_{\sigma=1}^{6}\Phi_\sigma^{(i)}(x)\Gamma_{\sigma\rho}^{(i)}(g_a).\qquad(3.11)$$

$\Phi_\sigma^{(j)}$ 亦作如此观;$\langle i\|H_1\|i\rangle$为与表示 i 和 j(或者量子数 i 和 j)无关的约化矩阵元.如此会将久期方程约化为几个独立小块,而每小块又相应更小的不可约表示矩阵.换言之,苯分子能级按 D_6 的不可约表示分类,每个表示的维数相应于能级的简并度(不计偶然简并).

先寻找 D_6 的生成元 a 与 b 的 6×6 表示矩阵 $\Gamma(a)$与 $\Gamma(b)$,再将它们约化,提出较低维的不可约表示分量.

注意图 3.4 中 x 轴连接第一与第四个碳原子,与图 3.3 不同.令 P_a 与 P_b 表示生成元 a 与 b 操作($\boldsymbol{r}_j$ 为固定矢量).

$$\begin{aligned}P_a\Phi_i(\boldsymbol{r})&=P_a\Phi(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i)=\Phi(P_a\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i)\\&=\Phi(P_a(\boldsymbol{r}-P_a^{-1}\boldsymbol{r}_i))\\&=\Phi(\boldsymbol{r}-P_a^{-1}\boldsymbol{r}_i),\end{aligned}$$

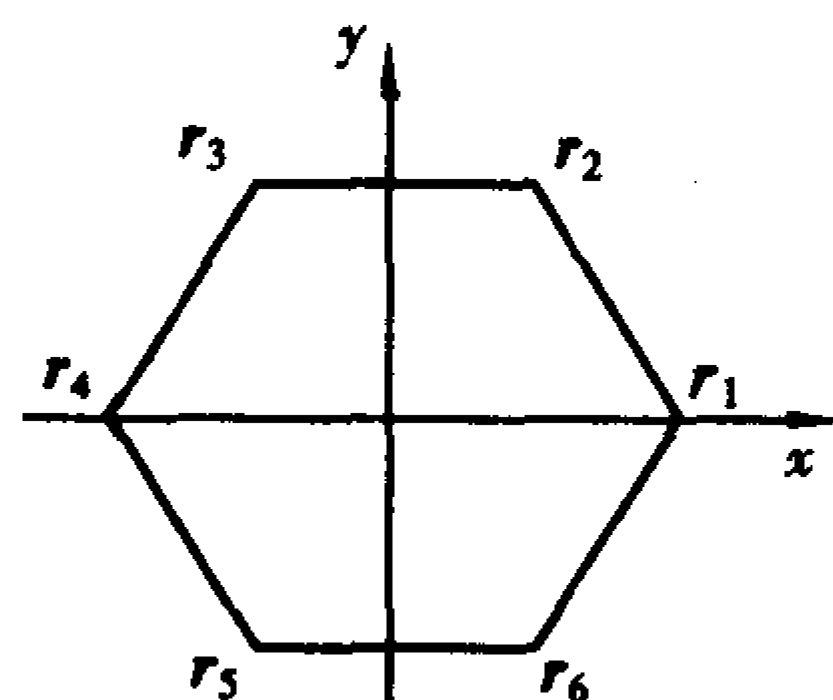


图 3.4 苯分子示意图

其中利用了对称关系 $\Phi(P_a\boldsymbol{r})=\Phi(\boldsymbol{r})$.对于近似波函数 $\Phi(\boldsymbol{r})=b\cos\theta e^{-ar}$具有更高

的轴对称性.

$$P_b\Phi_i(\boldsymbol{r}) = P_b\Phi_i(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i) = \Phi_i(b\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i) = \Phi_i(\boldsymbol{r}-b^{-1}\boldsymbol{r}_i),$$

亦即 P_a 与 P_b 的作用使得

$$P_a: \Phi_1\to\Phi_2\to\Phi_3\to\Phi_4\to\Phi_5\to\Phi_6\to\Phi_1\text{(轮换)},$$

$$P_b: \Phi_1\to\Phi_1, \Phi_2\leftrightarrow\Phi_6, \Phi_3\leftrightarrow\Phi_5, \Phi_4\leftrightarrow\Phi_4.$$

由 $P_a\Phi_\rho = \sum_\sigma \Phi_b\Gamma_{\sigma\rho}(a)$,写成矩阵形式,

$$(\Phi_1\ \Phi_2\ \Phi_3\ \Phi_4\ \Phi_5\ \Phi_6)\begin{pmatrix}\Gamma(a)_{11} & \Gamma(a)_{12} & \cdots & \Gamma(a)_{16}\\ \vdots & & & \vdots\\ \vdots & & & \vdots\\ \Gamma(a)_{16} & \cdots & \cdots & \Gamma(a)_{66}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\Phi_2\\ \Phi_3\\ \Phi_4\\ \Phi_5\\ \Phi_6\\ \Phi_1\end{pmatrix}, \tag{3.12}$$

易得 $\Gamma(a)$的显示表达式.同样方法可得 $\Gamma(b)$.

$$\Gamma(a) = \begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0\end{pmatrix}, \Gamma(b) = \begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

现在约化这个表示,为此必须找到不可约表示的基.利用 D_6 群的特征标表 3.1(D_6 群为异常群,特征标均为实数)和约化公式

$$\Gamma(g_\alpha) = \sum_{\oplus i=1}^{b} m_i\Gamma^{(i)}(g_\alpha), \forall\ g_\alpha \in G = D_6,$$

$$\chi(g_\alpha) = \sum_i m_i\chi_i(g_\alpha), \tag{3.13}$$

其中 $\Gamma^{(i)}(g_\alpha)$为群 D_6 的第 i 个不可约表示,

$$m_i = \frac{1}{12}\sum_{k=1}^{6} n_k\chi_i^{(k)}\chi^{(k)} \quad (k\text{ 为群元类序号}).$$

表 3.1　D_6 群的特征标表

k 类序号 / i 不可约表示序号	e_1 $n_1=1$	e_2 $n_2=1$	e_3 $n_3=2$	e_4 $n_4=2$	e_5 $n_5=3$	e_6 $n_6=3$
$\chi_1^{(k)}$	1	1	1	1	1	1
$\chi_2^{(k)}$	1	1	1	1	-1	-1
$\chi_3^{(k)}$	1	-1	-1	1	1	-1
$\chi_4^{(k)}$	1	-1	-1	1	-1	1
$\chi_5^{(k)}$	2	2	-1	-1	0	0
$\chi_6^{(k)}$	2	-2	1	-1	0	0

由 $\Gamma(a)$、$\Gamma(b)$ 显示已知，同样可得同一表示中全部群元的具体表示式，因而易得其特征标.

$$\chi_{\mathrm{I}}^{(1)} = \mathrm{Tr}[\Gamma(E)] = 6,\quad \chi_{\mathrm{IV}}^{(4)} = \mathrm{Tr}[\Gamma(a^3)] = 0,$$

$$\chi_{\mathrm{II}}^{(2)} = \mathrm{Tr}[\Gamma(a)] = 0,\quad \chi_{\mathrm{V}}^{(5)} = \mathrm{Tr}[\Gamma(a^2)] = 0,$$

$$\chi_{\mathrm{III}}^{(3)} = \mathrm{Tr}[\Gamma(ab)] = 0,\quad \chi_{\mathrm{VI}}^{(6)} = \mathrm{Tr}[\Gamma(b)] = 2.$$

由(3.6)式得，

$$m_i = \frac{1}{12}\{6\chi_i^{(1)*} + 6\chi_i^{(6)*}\} = \frac{1}{2}\{\chi_i^{(1)*} + \chi_i^{(6)*}\}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} m_1 = \dfrac{1}{2}\{\chi_1^{(1)*} + \chi_1^{(6)*}\} = \dfrac{1}{2}(1+1) = 1, \\ m_2 = \dfrac{1}{2}\{\chi_2^{(1)*} + \chi_2^{(6)*}\} = \dfrac{1}{2}(1-1) = 0, \\ m_3 = 0,\quad m_4 = 1,\quad m_5 = 1,\quad m_6 = 1. \end{cases}$$

由此可见，$$\chi^{(k)} = \chi_1^{(k)} + \chi_4^{(k)} + \chi_5^{(k)} + \chi_6^{(k)}$$

或 $$\Gamma(g) = \Gamma_1 + \Gamma_4 + \Gamma_5 + \Gamma_6.$$

注意到投影算符(3.6)式，现可写作

$$P^{(i)} \equiv \frac{m_i}{g}\sum_{k=1}^{C_k}\chi_i^{(k)*}\sum_{g_a\in G_j}\Gamma(g_a) \equiv \frac{m_i}{g}\sum\chi_i^{(k)*}S_k,$$

其中 $S_k \equiv \sum_{g_a \in c_j} \Gamma(g_a)$ 只对属 c_k 类群元求和. 因而

$$P^{(1)} = \frac{1}{12}\sum_{k=1}^{6} S_k = \frac{1}{12}(S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6)$$

$$P^{(4)} = \frac{1}{12}(S_1 - S_2 - S_3 + S_4 - S_5 + S_6),$$

$$P^{(5)} = \frac{1}{6}(2S_1 + 2S_2 - S_3 - S_4),$$

$$P^{(6)} = \frac{1}{6}(2S_1 - 2S_2 + S_3 - S_4), \tag{3.14}$$

其中 S_k 可以显式表示, 因为全部 $\{\Gamma(g_a)\}$ 已经知道. 结果是

$$S_1 = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \overset{\leftarrow 3 \rightarrow \leftarrow 3 \rightarrow}{\begin{pmatrix} O & E \\ E & O \end{pmatrix}} \begin{matrix} \}3 \\ \}3 \end{matrix}$$

$$S_3 = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}, \qquad S_4 = \begin{pmatrix} B & A \\ A & B \end{pmatrix},$$

$$S_5 = \begin{pmatrix} A & C \\ C & A \end{pmatrix}, \qquad S_6 = \begin{pmatrix} C & A \\ A & C \end{pmatrix},$$

其中 A、B 和 C 为 3×3 矩阵,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

代入(3.7)式,得各个不可约表示的投影算子,

$$P^{(1)} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P^{(4)} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P^{(5)} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$P^{(6)} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

将它们作用于原来正交基矢,然后只挑出独立分量,并归一化. 例如

$$P^{(5)}\begin{pmatrix}\Phi_1\\\Phi_2\\\Phi_3\\\Phi_4\\\Phi_5\\\Phi_6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\Phi_1-\Phi_2-\Phi_3+2\Phi_4-\Phi_5-\Phi_6\\-\Phi_1+2\Phi_2-\Phi_3-\Phi_4+2\Phi_5-\Phi_6\\-\Phi_1-\Phi_2+2\Phi_3-\Phi_4-\Phi_5+2\Phi_6\\2\Phi_1-\Phi_2-\Phi_3+2\Phi_4-\Phi_5-\Phi_6\\-\Phi_1+2\Phi_2-\Phi_3-\Phi_4+2\Phi_5-\Phi_6\\-\Phi_1-\Phi_2+2\Phi_3-\Phi_4-\Phi_5+2\Phi_6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Psi_1^{(5)}\\\Psi_2^{(5)}\\\Psi_3^{(5)}\\\Psi_4^{(5)}\\\Psi_5^{(5)}\\\Psi_6^{(5)}\end{pmatrix}.$$

在行矢量$\{\Psi_m^{(5)}\}$中($m=1,2,\cdots,6$)中，只有两个独立分量$\Psi_1^{(5)}=b[2\phi_1-\phi_2-\phi_3-2\phi_4-\phi_5-\phi_6]$，$\Psi_2^{(5)}=c[\phi_1-2\phi_2+\phi_3+\phi_4-2\phi_5+\phi_6]$，其中归一化常数容易定出$b=c=\dfrac{1}{\sqrt{12}}$. 这是二维表示空间的基底，其余可仿此得到：

$$\Gamma_1:\Psi^{(1)}=\frac{1}{\sqrt{6}}(\Phi_1+\Phi_2+\Phi_3+\Phi_4+\Phi_5+\Phi_6),$$

$$\Gamma_2:\Psi^{(2)}=\frac{1}{\sqrt{6}}(\Phi_1-\Phi_2+\Phi_3-\Phi\varphi_4+\Phi_5-\Phi_6),$$

$$\Gamma_6:\Psi_1^{(6)}=\frac{1}{\sqrt{12}}(2\Phi_1+\Phi_2-\Phi_3-2\Phi_4-\Phi_5+\Phi_6),$$

$$\Psi_2^{(6)}=\frac{1}{\sqrt{12}}(\Phi_1+2\Phi_2+\Phi_3-\Phi_4-2\Phi_5-\Phi_6).$$

但Γ_5与Γ_6表示中，$\Psi_1^{(5)}$和$\Psi_2^{(5)}$，$\Psi_1^{(6)}$和$\Psi_2^{(6)}$尚待正交化，正交化后的$\Psi^{(5)\prime}{}_1$和$\Psi^{(5)\prime}{}_2$，$\Psi^{(6)\prime}{}_1$和$\Psi^{(6)\prime}{}_2$应为(去掉撇号)

$$\Gamma_5:\Psi_1^{(5)}=\frac{1}{\sqrt{12}}(2\Phi\varphi_1-\Phi_2-\Phi_3+2\Phi_4-\Phi_5-\Phi_6),$$

$$\Psi_2^{(5)}=\frac{1}{\sqrt{12}}(-\Phi\varphi_1+2\Phi_2-\Phi_3-\Phi_4+2\Phi_5-\Phi_6),$$

$$\Gamma_6:\Psi_1^{(6)}=\frac{1}{\sqrt{12}}(2\Phi_1+\Phi_2+\Phi_3-2\Phi_4-\Phi_5+\Phi_6),$$

$$\Psi_2^{(6)}=\frac{1}{\sqrt{12}}(\Phi_1+2\Phi_2+\Phi_3-\Phi_4-2\Phi_5-\Phi_6).$$

实际上，在新的正交归一基矢，表示矩阵 $\Gamma(a)$ 与 $\Gamma(b)$ 对角化了. 即

$$\langle \Psi_i^{(k)} | H | \Psi_j^{(k')} \rangle = \delta_{ij}\delta_{kk'}\langle i \| H \| i \rangle = \delta_{ij}\delta_{kk'}E_i, \quad (E_i = \langle i \| H \| i \rangle), \tag{3.15}$$

其中 i 与 j 为不同表示的序号，k 与 k' 为维数更小的不可约表示的序号. 因此，

$$\det|\langle \Psi_i | E | \Psi_j \rangle - E\delta_{ij}| = \begin{vmatrix} E_1 - E & & & & \\ & E_4 - E & & & \\ & & E_5 - E & & \\ & & & E_5 - E & \\ & & & & E_6 - E \end{vmatrix} = 0 \tag{3.16}$$

其中 E_1、E_4、E_5 和 E_6 为本征值，具体数值应由数值计算. 计算表明，$E_1 < E_4 < E_5 < E_6$. 能级 E_1、E_6 有两个 π 电子，E_5 和 E_6 则有 4 个 π 电子. 苯分子系统基态是 $2\Gamma_1 + 4\Gamma_6$ 态，激发态是 $2\Gamma_1 + 3\Gamma_6 + \Gamma_5$ 态. 维-爱定理在原子核核谱的计算、量子力学中 K-G(Klein-Gordon)系数的计算中还有广泛的应用.

问　题

1. 完成 D_6 群特征标表的具体计算.

2. 证明由(3.3)式定义的投影算符具有性质：

$$P_\mu^{(i)} P_\nu^{(j)} = \delta_{iu}\delta_{\mu\nu} P_\mu^{(i)} \text{（正交性、等幂性）},$$

$$P^{(i)} P^{(j)} = \delta_{ij} P^{(i)},$$

$$\sum_i P^{(i)} = \sum_{i,\mu} P_\mu^{(i)} = I \text{（单位矩阵）},\text{（完备性）}.$$

3. 具有方形势阱的二维薛定谔方程（取“自然”单位制，令 $\hbar = 2m = 1$），

$$-\frac{d^2\Psi}{dx^2}-\frac{d^2\Psi}{dy^2}+V(x,y)\Psi=E\Psi,$$

其中

$$V(x,y)=\begin{cases}0 & (|x|<\pi,|y|<\pi),\\ \infty & (|x|\geqslant\pi,|y|\geqslant\pi).\end{cases}$$

求该系统能级，并分析相应的简并性质.

[提示：H 具有 C_{4v} 对称性. C_{4v} 表示空间有 5 个不变子空间，相应能级与波函数为：

(a) $E=2\left(m+\frac{1}{2}\right)^2$，$\Psi=\cos\left(m+\frac{1}{2}\right)x\ \cos\left(m+\frac{1}{2}\right)y$，对应恒等表示 $\{\Gamma^{(1)}\}$；

(b) $E=2m^2$，$\Psi=\sin mx\ \sin my$，生成元 $m_x, C'_4 \Longrightarrow P_m\Psi=P_c\Psi=-\Psi$，对应 $\{\Gamma^{(4)}(g_a)\}$；

(c) $E=m^2+n^2$，$\Psi_1=\sin mx\ \sin ny$，$\Psi_2=\sin nx\ \sin my$，$P_m\Psi_1=-\Psi_1$，$P_c\Psi_1=-\Psi_2$，$P_m\Psi'_2=-\Psi_2$，$P_c\Psi_2=-\Psi$，对应

$$\Gamma(m_x)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad \Gamma(C'_4)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix},$$

$$X=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

不可约表示

$$\Gamma'(m_x)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad \Gamma'(C'_4)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$\Phi_{1,2}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_1\pm\Psi_2),\quad \Phi_1\ 属\{\Gamma^{(4)}\},\Phi_2\ 属\{\Gamma^{(2)}\};$$

(d) $E=\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2$，$\Psi_1=\cos\left(m+\frac{1}{2}\right)$ $\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)y$，$\Psi_2=\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\ \cos\left(m+\frac{1}{2}\right)y$，$P_m\Psi_1=\Psi_1$，$P_m\Psi_2=\Psi_2$，$P_c\Psi_1=\Psi_2$，$P_c\Psi_2=\Psi_1$. 与此类似，取新基 $\Phi_{1,2}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_1\pm$

Ψ_2)，有 $\Gamma'(m_x)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，$\Gamma'(C'_4)=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$. Φ_1 属 $\{\Gamma^{(1)}\}$，Φ_2 属 $\{\Gamma^{(3)}\}$；

(e) $E=m^2+\left(n+\frac{1}{2}\right)^2$，$\Psi_1=\sin mx\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)y$，$\Psi_2=\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\sin my$；由 $P_m\Psi_1=\Psi_1$，$P_m\Psi_2=-\Psi_2$，$P_c\Psi_1=\Psi_2$，$P_c\Psi_2=-\Psi_1$，$\Gamma(m_x)=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$，$\Gamma(C'_4)=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$，属表示 $\{\Gamma^{(5)}(g_a)\}$. 其中(e)是正则简并，(c)与(d)是偶然简并].

4. 上题中，引入微扰 $H_1=\varepsilon x^2y^2(|\varepsilon|\ll 1)$，研究系统能级简并和大小变化情况.

[提示：H_1 亦具有 C_{4v} 对称性. (e)类能级移动，简并未消除 $\langle\Psi_1|H_1|\Psi_2\rangle=\langle\Psi_2|H_1|\Psi_1\rangle=0$，$\langle\Psi_1|H_1|\Psi_1\rangle=\langle\Psi_2|H_1|\Psi_2\rangle=\varepsilon\left(\frac{\pi^3}{3}-\frac{\pi}{2m^2}\right)\left(\frac{\pi^3}{3}-\frac{2\pi}{(2n+1)^2}\right)$. (e)与(d)类简并消除，如(c)类，

$$\langle\Phi_1|H_1|\Phi_1\rangle=\varepsilon\left(\frac{\pi^3}{3}-\frac{\pi}{2m^2}\right)\left(\frac{\pi^3}{3}-\frac{\pi}{2n^2}\right)+\varepsilon\left(\frac{2\pi}{(m-n)^2}-\frac{2\pi}{(m+n)^2}\right)^2,$$

$$\langle\Phi_2|H_1|\Phi_2\rangle=\varepsilon\left(\frac{\pi^3}{3}-\frac{\pi}{2m^2}\right)\left(\frac{\pi^3}{3}-\frac{\pi}{2n^2}\right)-\varepsilon\left(\frac{2\pi}{(m-n)^2}-\frac{2\pi}{(m+n)^2}\right),$$

$$\langle\Phi_1|H_1|\Phi_2\rangle=\langle\Phi_2|H_1|\Phi_1\rangle=0.$$]

§3.2 置换群的概念

置换群又称对称群，不仅广泛应用于量子理论中多粒子体系的研究，而且也是研究其它群的有力工具(见习题中凯莱定理).

1. 置换群定义

设有 $1,2,\cdots,n$，n 个编号的对象，r_i 与 $s_i(i=1,\cdots,n)$，均是编号 $1,2,\cdots,n$ 的排列，则称

$$P = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_n \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

为一个置换. 由置换的定义显见, 这种记号显然与列的编序无关. 因此总可以通过适当调整列的排列顺序, 将(3.17)式中的两个排列等价地表示为

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{bmatrix}. \tag{3.18}$$

两个置换 R 与 Q 的连续置换 QR, 定义为置换的乘积. 亦即第 l 个对象经过 R 置换为 i_l, 再经过 Q 置换到 j_l.

例 1 给出

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix},$$

则

$$\begin{aligned} QP &= \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

一般有

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} QP &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

置换中恒等变换就是不变序号

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{bmatrix}.$$

但 P 的逆变换就是 P 中上、下两行交换. 事实上,

$$P^{-1}P=\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{bmatrix}=I. \tag{3.20}$$

容易证明，n 个对象所有置换操作的集合，在置换乘积定义下构成群，称为置换群，记为 S_n.

2. 置换的奇偶性

先定义轮换操作，即 l 个对象的顺序置换可表为

$$Q=(i_1\, i_2 \cdots i_l)=\left[\begin{array}{cccc:ccc} i_1 & i_2 & \cdots & i_l & i_{l+1} & \cdots & i_n \\ i_2 & i_3 & \cdots & i_1 & i_{l+1} & \cdots & i_n \end{array}\right],$$

其中 l 称为轮换长度. 轮换符号中，数字排序不能改变，但允许数字顺序移动. 如

$$(i_1\, i_2 \cdots i_n)=(i_2\, i_3 \cdots i_n\, i_1)=(i_3\, i_4 \cdots i_n\, i_1\, i_2)=\cdots$$

任一置换均可化为一些独立的(彼此无公共元素)轮换的乘积，与乘积顺序无关. 如

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 8 & 1 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}=(13725)(48)(6),$$

其中单元素(6)可以不记. 一般地，如用 $l_i(i=1,2,\cdots,n)$ 表示相应轮换长度，则 P 的轮换结构可记为 $[l_1,l_2,\cdots,l_N]$，其中 $\sum_{i=1}^{N} l_i=n$. 若调整序号，使得 $l_1 \geqslant l_2 \geqslant l_3 \geqslant \cdots \geqslant l_N \geqslant 0$，则集合 $\{l_i\}$ 称为 n 的一组配分数.

令 P 与 Q 由(3.19)式给出，考虑 P 的共轭元素

$$Q^{-1}PQ\left(Q=\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{bmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{vmatrix}\right):$$

$$Q^{-1}PQ=\begin{vmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{vmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

（相当于 P 的上、下两行均 Q^{-1} 置换）. (3.21)

将此法则运用于置换的轮换乘积表示时，只需对轮换符号内的数字施行置换 Q^{-1} 即可.

例 2 $P=(124)(36)(5)$,

$$Q=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\5 & 6 & 4 & 1 & 3 & 2\end{bmatrix},$$

则

$$Q^{-1}=\begin{bmatrix}5 & 6 & 4 & 1 & 3 & 2\\1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\end{bmatrix}=(1435)(26),$$

$$Q^{-1}PQ=(463)(54)(4).$$

即是说，取共轭操作并未改变置换的轮换结构. 于是有重要结论，置换群的共轭类与其配分是一一对应的. 由此可见，置换群的不等价不可约表示的个数等于其一切可能配分的数目.

轮换长度 $l=2$ 的轮换，称为对换. 例如，

$$Q=(i_1\,i_2\,i_3\cdots i_r)=(i_1\,i_2)(i_2\,i_3)\cdots(i_{r-1}\,i_r). \quad (3.22)$$

这些对换包含有公共元素，彼此不独立，故乘积顺序不能变动. 任何置换都可以分解为不独立对换的乘积. 但是这种分解不是唯一的，例如可以任意添加偶数个像(12)(21)一类的对换.

例 3 $P=(13725)(46)(6)=(13)(37)(72)(25)(46)$,

轮换次数 $\lambda=5$（奇数）. 但

$$P=(13)(37)(72)(25)(46)(12)(21)(35)(53),$$

现在 $\lambda=9$，仍然是奇数.

因而有重要结论，任一置换可以化为一系列对换乘积，这样分解不是唯一的，甚至对换的个数 λ 也是可变的，但是 λ 的奇偶性都是不变的. 据此所有置换可以分为奇置换（λ 为奇数）和偶置换（λ 为偶数）两大类. 恒元归属于偶置换.

设两置换对换数分别为 λ_1 与 λ_2，则其乘积的对换数为 $\lambda_1+\lambda_2$. 若 λ_1 与 λ_2 均为偶数，则其和必为偶数，故所有偶置换的集合构成置换群 S_n 的一个子群，称为交错群（Alternative group），记为 A_n. 群 S_n 的元素为 $n!$ 个，而交错群的元素为 $n!/2$ 个.

商群 $S_n/A_n=(A_n,B_n)$，其中 B_n 为奇置换的集合. 商群为二阶阿贝尔群除有一个恒等表示外，还有一个反对称表示，其中 A_n 对应 1，而 B_n 对应 -1. $\Gamma(S_n)=\Gamma(A_n)\{1,-1\}$.

问　题

1. 验证三元素置换的集合 S_3:

$$E=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{bmatrix},$$

$$D=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{bmatrix},\quad F=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{bmatrix}$$

构成群，并给出其群表及全部不等价不可约表示.

2. 任何轮换均可从任意元素处断开，分解为两个轮换的乘积，即

$$(i_1\, i_2 \cdots i_p \cdots i_r) = (i_1 \cdots i_p)(i_p\, i_{p+1} \cdots i_r).$$

此可否破坏置换的奇偶性?

3. 证明凯莱(Caylay)定理：每一个有限群均同构于由群元素集合所构成的一个置换群(S_n 的一个子群).

[提示：构造映射 $f(g_\alpha)$，$\forall\, g_\alpha\in G$，

$$f(g_\alpha)=\begin{bmatrix}g_1&g_2&\cdots&g_n\\g_\alpha g_1&g_\alpha g_2&\cdots&g_\alpha g_n\end{bmatrix},$$

$$f(g_\beta)=\begin{bmatrix}g_\alpha g_1&g_\alpha g_2&\cdots&g_\alpha g_n\\g_\beta(g_\alpha g_1)&g_\beta(g_\alpha g_2)&\cdots&g_\beta(g_\alpha g_n)\end{bmatrix}$$

$$f(g_\alpha)f(g_\beta)=\begin{bmatrix}g_1&g_2&\cdots&g_n\\(g_\beta g_\alpha)g_1&(g_\beta g_\alpha)g_2&\cdots&(g_\beta g_\alpha)g_n\end{bmatrix}=f(g_\beta g_\alpha)$$

单位元 $f(E)$. 再证，如 $g_\alpha\neq g_\beta$，则 $f(g_\alpha)\neq f(g_\beta)$].

§3.3 置换群的正则表示与维数定理

我们进而研究 S_n 群的群结构及各类表示.

正则表示是有限群的忠实表示,其一般定义已经谈及,本节讨论置换群的正则表示.

1. 正则表示的构造

给出映射

$f:P\longrightarrow n\times nf(P)$矩阵.矩阵中只有 n 个元素等于1,其余均为0;置换 P 的每一列确定 $f(P)$的一个非零矩阵元 $f(P)_{ij}$;其中的第一行数字为列脚标 j,第二行数字为行脚标.置换对象的一种排列即视为行矢量.

例 1

$$P=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{bmatrix}^{(j)}_{(i)}\longrightarrow f(P)=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$(a_1\ a_2\ a_3\ a_4)\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}=(a_4\ a_1\ a_3\ a_2).$$

显见 P 与 $f(P)$有一一对应的关系,效果完全相同.

一般规则:设有

$$P_i=\begin{bmatrix}1&2&\cdots&n\\i_1&i_2&\cdots&i_n\end{bmatrix},$$

则 $f(P)$的矩阵元按上述规则,有

$$[f(P_i)]_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha i_1}\delta_{1\beta}+\delta_{\alpha i_2}\delta_{2\beta}+\cdots+\delta_{\alpha i_n}\cdot\delta_{n\beta}$$
$$(\alpha,\beta=1,2,\cdots,n).\tag{3.23}$$

容易验证集合$\{f(P_\alpha)\,|\,\forall\ P_\alpha\in G\}$是群的一个忠实表示,常称其为

正则表示. 正则表示的维数等于置换群 S_n 的阶 $n!$(即 S_n 的元素的个数).

由凯莱定理,任何有限群 G 都等价于在其群元集合上的置换群$\{P(g_\alpha)\}$,其中

$$P(g_\alpha)=\begin{bmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ g_\alpha g_1 & g_\alpha g_2 & \cdots & g_\alpha g_n \end{bmatrix}.$$

应用上述规则,可得到正则矩阵的集合:$\{\Gamma^{\text{reg}}(g_\alpha)\}$,给出群 G 的正则表示. 这里的定义与我们在第二章的定义是完全等价的.

2. 维数定理

由于整数 n 的可能配分数等于 S_n 群的不等价不可约表示的数目,故可以用配分作为 S_n 的不可约表示的标记. 尤其用杨图(Yong Pattern)表示配分极其简易直观.

所谓杨图就是对整数 n 按一种配分$[\lambda]=[\lambda_1\ \lambda_2\cdots\ \lambda_K]$,将 n 个方格按如下规则排列起来的方格图,其中第 i 行的格子数为 $\lambda_i(1\leqslant i\leqslant K)$. 由于配分的规定,$\lambda_{i+1}\leqslant\lambda_i$,因此杨图的下一行格子数不会超过上面各行的格子数.

例 2 配分[421]对应的杨图及其共轭杨图.



$[\lambda]=[4\ 2\ 1]$ $[\tilde{\lambda}]=[3\ 2\ 1\ 1]$

行列互换的杨图称为原杨图的共轭杨图,其配分称为共轭配分,可以证明共轭表示的特征标有关系 $\chi^{[\lambda]}=\chi^{[\tilde{\lambda}]}\cdot\chi^{[1\,1\,\cdots\,1]}$.

对应 S_n 群的杨图,将用 $1,2,\cdots,n$,n 个整数填充杨图,使每一行的数字从左到右不减少,每一列的数字从上到下不减少,所得到

的若干填满数字的杨图，称为杨盘(Young tableau)．杨盘与 S_n 的不可约表示关系密切，有如下重要的维度定理．

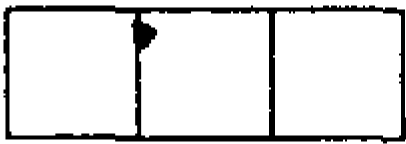
维数定理 S_n 群的配分[λ]所对应的不可约表示的维数等于该配分杨图可以填充的杨盘的个数．

维数定理我们不拟证明[证明请参阅 H. Boerner, Representations of Group, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1963.]，但可以验证．

例 3 $S_3(g=3!=6)$ 共 3 个共轭类 $(K=3)$，对应 3 种配分 [3]、[2 1]和[1 1 1]，代表 3 个不等价不可约表示，记为 $\Gamma^{[3]}$、$\Gamma^{[21]}$ 和 $\Gamma^{[111]}$．

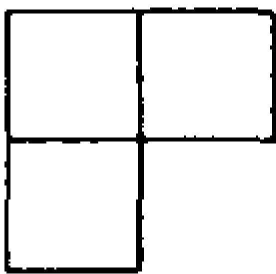
伯恩塞德定理： $6=1^2+1^2+2^2$．

杨图：
(配分)



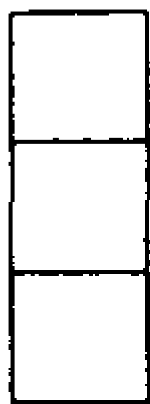
[3]

一维



[2 1]

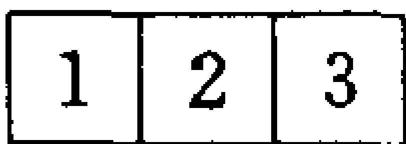
二维

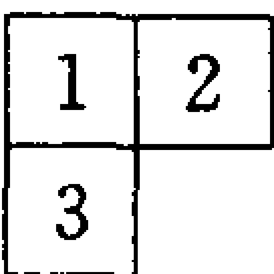


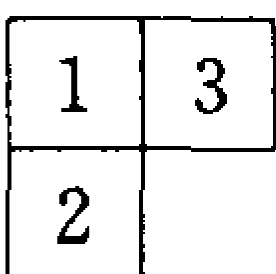
[1 1 1]

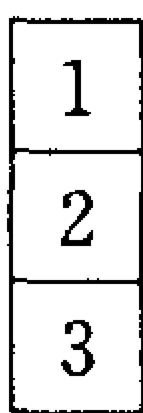
一维

杨盘









不可约表示　一维(对称)　二维(混合对称)　一维(反对称)

可以证明，对应配分 $[\lambda]=[\lambda_1\ \lambda_2 \cdots\ \lambda_K]$ 的杨图，总计杨盘数有

$$f(S_n:[\lambda]) = \frac{n!}{m_1!m_2!\cdots m_K!}\prod_{i<j}^{k}(m_i - m_j), \qquad (3.24)$$

其中 $m_i=\lambda_i+K-i$，K 为杨图实际行数．

3. S_n 群的标准表示

显然 S_{n-1}是 S_n 的子群，依此类推，得到置换群的子群约化链

$$S_n \supset S_{n-1} \supset S_{n-2} \supset \cdots \supset S_2 \supset S_1. \qquad (3.25)$$

另一方面，对于 S_n 的一个表示 A_n，从 A_n 中抽出与 S_{n-1}对应的元素 A_{n-1}，则 A_{n-1}也是 S_{n-1}的元素，我们也可以得到表示的所谓“子表示”链，

$$A_n \supset A_{n-1} \supset A_{n-2} \cdots \supset A_2 \supset A_1. \qquad (3.26)$$

它们的相应表示空间亦有如此链式结构. 但对子群来说，A_{n-1}，A_{n-2}，…，A_2，A_1 等不一定是不可约的. 所谓标准表示就是，通过基底变换，使 A_n 都是完全约化的形式，或 A_{n-1}，A_{n-1}，…，A_1 均成为相应子群的不可约表示. 现介绍标准表示的普遍求法，不拟对有关结果进行证明.

$\forall\, P_i \in S_n$，设将 P_i 约化为一系列对换乘积，再利用恒等式：

$$(ab\cdots de\cdots h) = (ab\cdots d)(de\cdots h),$$

$$(ab) = (ca)(cb)(ca),$$

总可以把置换的乘积改写为相邻对象的对换算符 $P_{k-1,k}(k=2,3,\cdots,n)$的乘积. 只要能给出 $P_{k-1,k}$的表示矩阵，就可以用矩阵相乘，得到任何置换的表示. $\{P_{k-1,k}\}$是 S_n 群的生成元. 令$\{U^{(\lambda)}_{k-1,k} | k=2,3,\cdots,n\}$标记对应配分[λ]的不可约表示的相邻对换算子的标准表示矩阵(共 $n-1$ 个). 其矩阵元

$$(\Gamma^{[\lambda]}_{k-1,k})_{rs} \equiv \langle [\lambda]r | P_{k-1,k} | [\lambda]s \rangle, \qquad (3.27)$$

其中 r 和 s 为[λ]杨图中不同杨盘的标记. 对于 r 和 s 标记的杨盘，矩阵元$(U^{[\lambda]}_{k-1,k})_{rs}$，由下式确定：

$$
(\Gamma^{[\lambda]}_{k-1,k})_{rs} = \begin{cases} (\Gamma^{[\lambda]}_{k-1,k})_{rs} = \langle [\lambda]r \mid P_{k-1,k} \mid [\lambda]_r \rangle \\ (\text{对角元}) = [\rho_{k-1,k}([\lambda]r)]^{-1} \\ \begin{matrix}(\Gamma^{[\lambda]}_{k-1,k})_{rs} = \\ (r \neq s)\ \text{非对角元}\end{matrix} \begin{cases} [1 - (\rho_{k-1,k}([\lambda])r))^{-2}]^{\frac{1}{2}}, \\ \qquad \text{当}\ k\ \text{与}\ k-1\ \text{互换时,} \\ \qquad \text{杨盘}\ r\ \text{与}\ s\ \text{亦互换,} \\ 0, \qquad \text{其它,} \end{cases} \end{cases}
$$

(3.28)

其中 $\rho_{k-1,k}([\lambda]r)$为 r 所标记的杨盘中 k 与 $k-1$ 的轴距离，其定义是

$$
\rho_{k-1,k}([\lambda]r) = \text{col}(k) - \text{col}(k-1) - [\text{row}(k) - \text{row}(k-1)], \qquad (3.29)
$$

符号 col(k)和 row(k)分别表示数字 k 所在的列和行的序数. 矩阵 $\Gamma^{[\lambda]}_{k-1,k}$是实正交的.

例 4 求 S_3 群的标准表示.

表示 $\Gamma^{[3]}$对应 1 个杨盘(见例 3)，系一维表示.

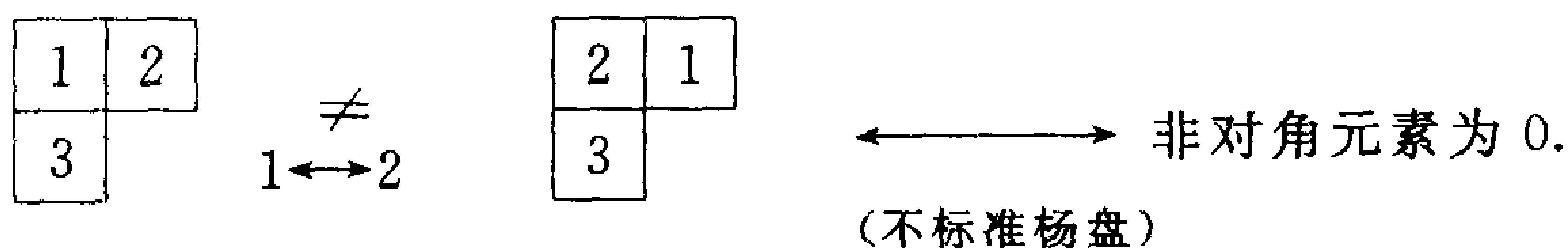
$$
\rho_{12} = \text{col}(2) - \text{col}(1) - [\text{row}(2) - \text{row}(1)]
$$

$$
= 2 - 1 - [1 - 1] = 1.
$$

$\rho_{23}=1$，相应相邻对换算符表示为 1. 其它所有置换的表示当然也为 1.

表示 $\Gamma^{[111]}$对应 1 个杨盘，系一维表示. 利用(3.13)式，有 $\rho_{12} = \rho_{23} = -1$，即 $\Gamma^{[111]}_{1,2} = \Gamma^{[111]}_{2,3} = -1$. 其它的如 $\Gamma^{[111]}_{13} = \Gamma^{[111]}_{23}\Gamma^{[111]}_{21} \times \Gamma^{[111]}_{23} = (-1)^3 = -1$，$\Gamma^{[111]}_{132} = \Gamma^{[111]}_{13}\Gamma^{[111]}_{32} = (-1)^3 \cdot (-1) = 1$. 即奇置换为$-1$，偶置换为 1.

表示 $\Gamma^{[21]}$对应两个杨盘，记为 1 和 2($r=1,2$)，系二维表示. 对于杨盘 1，当数字 $1 \longleftrightarrow 2$ 时，$\Gamma^{[21]}_{12}$的



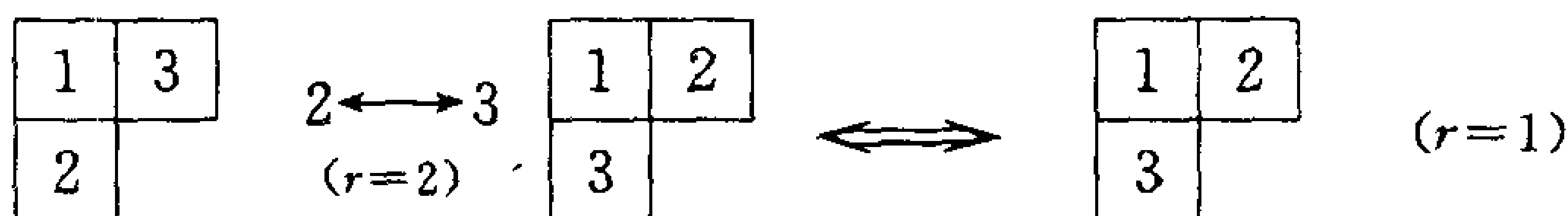
对角元素

$$(\Gamma_{12}^{[21]})_{11}=\langle[21]1|P_{1,2}|[21]1\rangle_{11}=\rho_{12}^{-1}([21]1)=1,$$

$$(\Gamma_{12}^{[21]})_{22}=\langle[21]2|P_{12}|[21]r\rangle=\rho_{12}^{-1}([21]2)=-1,$$

即
$$\Gamma_{12}^{[21]}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}.$$

再考虑表示矩阵 $\Gamma_{23}^{[21]}$,注意到杨盘 $2(r=2)$,当 $2\longleftrightarrow 3$,



亦即此时矩阵的非对角矩阵元不为零. 由(3. 12)、(3. 13)式有

$$(\Gamma_{2,3}^{[21]})_{12}=\langle[21]1|P_{2,3}|[21]2\rangle=(1-(\rho_{2,3}([21]2)^{-2})^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}=(\Gamma_{23}^{[21]})_{21}.$$

至于对角元

$$(\Gamma_{23}^{[21]})_{11}=\langle[21]1|P_{23}|[21]1\rangle=\rho_{23}([21]1)^{-1}(\text{第一杨盘})$$

$$=\frac{1}{(-2)}=-\frac{1}{2},$$

$$(\Gamma_{23}^{[21]})_{22}=\rho_{23}([21]2)^{-1}=\frac{1}{2},$$

即
$$\Gamma_{23}^{[21]}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix}.$$

其余表示矩阵可以同样得到. 见表 3. 2.

表 3.2 S_3 群的标准表示

群元 \ 表示	$\Gamma^{[3]}$	$\Gamma^{[21]}$	$\Gamma^{[111]}$
E	1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	1
(123)	1	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$	1
(23)	1	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$	−1
(13)	1	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$	−1
(132)	1	$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$	+1
(12)	1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	−1

所谓标准表示又称山内彦雄(Yamanouchi)表示. 由于表示具有正交性,因此在应用中,只要习惯其符号的确切含义,十分便捷. 在量子力学中,多粒子体系的状态可按 S_n 群的不可约表示分类.

问　　题

1. 用归纳法证明下面公式:

$$(1,2,\cdots,m-1,m)=(m,m-1)(m,m-2)(m,m-3)\cdots(m,2)(m,1).$$

2. S_n 中任一元素分解为对换乘积时,对换总数的奇偶性不变.

[提示：构造范德蒙特(Vandermonde)行列式

$$D(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ & \cdots & \cdots & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{i>j}(x_i-x_j),$$

在任何对换作用下，$D(x_1,x_2,\cdots,x_n)$改变符号．$\forall\ g_\alpha\in S_n$，且g_α分解为k个对换，则$g_\alpha D=(-1)^k D$，因子$(-1)^k$与分解的方式无关．]

3. 设$\forall\ g_\alpha\in S_n$，$a_i^{(j)}(j=1,\cdots,n;i=1,\cdots,j)$取$1,2,\cdots,n$，若有$x\in L_G$，$x=(a_1)^{\alpha_1}(a_1^{(2)},a_2^{(2)})^{\alpha_2}\cdots(a_1^{(n)},a_2^{(n)}\cdots,a_n^{(n)})^{\alpha_n}$，则

$$g_\alpha^{-1}\chi g_\alpha=(b_1)^{\alpha_1}(b_1^{(2)},b_2^{(2)})^{\alpha_2}\cdots(b_1^{(n)},b_2^{(n)},\cdots,b_n^{(n)})^{\alpha_n},$$

其中$b_i^{(j)}(i=1,\cdots,j;j=1,\cdots,n)$取$1,2,\cdots,n$．亦称共轭变换不改变结构$(1^{\alpha_1}2^{\alpha_2}\cdots n^{\alpha_n})$，$S_n$群共轭类可以用配分$n=\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+n\alpha_n$表征．

[提示：$(i,j)^{-1}=(j,i)=(i,j)$，故$(i,j)^{-1}(a_1,a_2,\cdots,a_n)\ (i,j)=(a'_1,a'_2,\cdots,a'_n)$，轮换长度不变．此外，$\forall\ g_\alpha\in S_n$，总可以分解为$g_\alpha=(b_1,b'_1)(b_2,b'_2)\cdots(b_p,b'_p)$，$g_\alpha^{-1}=(b_p,b'_p)^{-1}(b_{p-1},b'_{p-1})^{-1}\cdots(b_1,b'_1)^{-1}$，故$g_\alpha^{-1}(a_1,a_2,\cdots,a_k)g_\alpha=(a'_1,a'_2,\cdots,a'_k)$，如此等等．]

4. 试证明由(3.23)式给出的矩阵集合$\{f(P_\alpha)\}$，是群S_n的一个忠实表示．

[提示：$[f(P_i)f(P_j)]_{\alpha\beta}=\sum\limits_{r}[f(P_i)]_{\alpha\gamma}[f(P_j)]_{\gamma\beta}=\sum\limits_{r}(\delta_{\alpha i_1}\delta_{1\gamma}+\cdots+\delta_{\alpha i_n}\delta_{n\gamma})\cdot(\delta_{\gamma 1}\delta_{k_1\beta}+\cdots+\delta_{\gamma n}\delta_{k_n\beta})=\delta_{\alpha i_1}\delta_{k_1\beta}+\cdots+\delta_{\alpha i_n}\delta_{k_n\beta}=[f(P_iP_j)]_{\alpha\beta}$，其中用到

$$P_i=\begin{bmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n\end{bmatrix},$$

$$P_j=\begin{bmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_1 & k_2 & \cdots & k_n\\ 1 & 2 & \cdots & n\end{bmatrix},$$

$$P_iP_j = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ i_1 & i_2 & \cdots & k_n \end{bmatrix}.\ ]$$

5. 对于 S_n 中配分$[\lambda]=[3,1]$，画出相应的杨图和杨盘，指出对应不可约表示的维数，并给出相应的标准表示 $\Gamma_{34}^{[31]}$.

$$\left(答案：\Gamma_{34}^{[31]} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \right)$$

§ 3.4 置换群的分支律与外直积

置换群的可约表示，当然可以用标准的特征标方法进行约化. 找到标准表示，意味着找到了 S_n 群的全部不等价不可约表示，因此一般表示，包括群的两个表示的直积表示（习惯也称内直积）的约化问题，无庸赘述. 但是对于置换群的表示的约化却有特别简易可行的特殊办法. 本节所讨论的就是这些特殊办法.

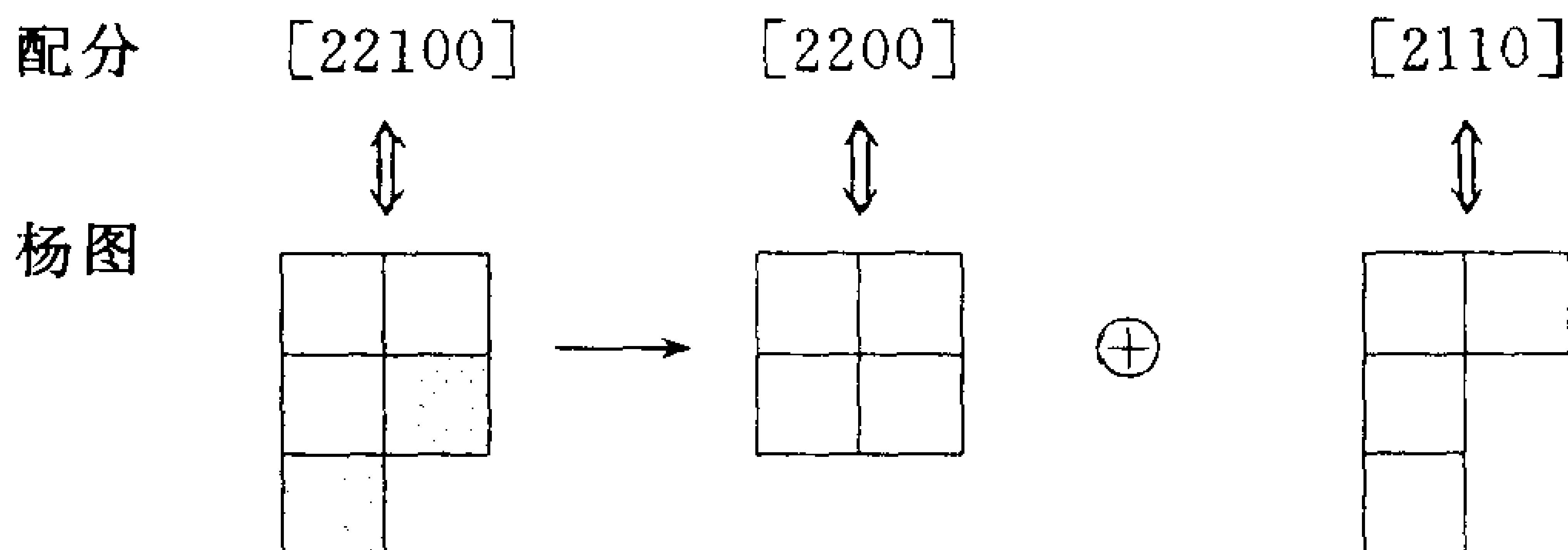
1. S_n 群的分支律

S_n 群的不可约表示，一般说来，对于 $S_{n'}$ $(n'<n)$ 群是可约表示. 我们往往希望探明，在 S_n 群的不可约表示 $\{\Gamma_n^{[\lambda]}\}$ 中包含 $S_{n'}$ 群的哪些不可约表示. 为此只需研究包含 S_{n-1} 群的不可约表示就可以了. 然后采取逐步递推的办法，问题会得到解决.

将对应 S_n 群不可约表示 $\{\Gamma_n^{[\lambda]}\}$ 的 n 个格子构成的杨图，以不破坏杨图规则为原则，用各种可能的方式去掉 1 个小方格，所得到的 $(n-1)$ 个方格构成的杨图，对应着在 $\{\Gamma_n^{[\lambda]}\}$ 中所包含的所有 S_{n-1} 群的不可约表示 $\{\Gamma_{n-1}^{[\lambda']}\}\cdots$. 这就是所谓的分支律. 可以用如下简单方式表述：

$$\Gamma_n^{[\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n]} = \sum_{\oplus\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_{i-1}\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n} \Gamma_{n-1}^{[\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_i^{-1}\cdots\lambda_n]} \qquad (3.30)$$

例 1 将 S_5 的不可约表示 $\Gamma_5^{[2210]}$ 约化为 S_4 的不可约表示 $\{\Gamma_4^{[\lambda']}\}$.



$$\Gamma_5^{[22100]} = \Gamma_4^{[2200]} \oplus \Gamma_4^{[2110]}.$$

例 2 $\Gamma_7^{[3221]} = \Gamma_6^{[322]} \oplus \Gamma_6^{[3211]} \oplus \Gamma_6^{[2221]}$.

S_n 群不可约的两个表示的直积称为内积，也是 S_n 的一个表示. 其约化用杨图很方便.

例 3 $SU(3)$群中的内积.

若用 1 个方格代表 $SU(3)$的一个基础表示的基矢(如夸克)，数字 1,2,3…有五种填充方法(杨盘)，故基础表示维数为 3. 两夸克态可表示为

$$\square \otimes \square = \square\square \oplus \begin{matrix}\square\\\square\end{matrix}$$

(对称)

(反对称)

其中□□用 1,2,3 填充可得 6 个杨盘(6 维表示)，置二格图则对应 3 个杨盘(3 维表表).

如果 3 个夸克构成重子，则用杨图表示为

$$\square \otimes \square \otimes \square = \begin{array}{|c|c|}\hline \ & \ \\ \hline \ & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|}\hline \ & \ & \ \\ \hline \end{array}$$

此时注意，有补充规则，凡三格一列应删去. 则右边第一图对应 8 个杨盘，即相应 8 维表示.

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 2 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

即是夸克模型中重子八重态(八正道一词亦由此来历). 右边第二图，对应 1 个杨盘，是全对称单态.

可见，所谓求内积实质上也是利用分支律，不过是反过来应用罢了. 本例的方法可推广到 $SU(n)$的情况. 读者不妨试试.

2. S_n 与 $S_m(n \neq m)$群表示的外直积

所谓外直积就是 S_n 的不可约表示 $\Gamma_n^{[\lambda]}$ 与 S_m 的不可约表示 $\Gamma_m^{[\mu]}$ 的直积. 我们的目的在于探求外直积中包含 S_{n+m}群的那些不可约表示. 这就是外直积的约化问题.

将$[\lambda]$对应 n 个方格构成的杨图，按照所谓里特尔伍德-理查逊(Littlewood Richardson)规则，加在$[\mu]$对应的 m 个方格构成的杨图上，形成 $n+m$ 个方格的杨图，对应于所寻找的 S_{n+m}群的不可约表示.

里-理氏规则是：

(1) 在$[\mu]$对应的杨图第一行方格中标记字母 α，在第二行标

记 β,依次类推.

(2) 在$[\lambda]$所对应的杨图上,用构成杨图的标准方法,加上带有 α 字母的方格(μ_1 个).添加附加条件有:在同一列不允许有两个带 α 的方格出现.

(3) 用(2)所叙述方法,再在$[\lambda]$杨图上添加带 β 的格子(有 μ_2 个).但注意从右上角开始,从上到下逐行从右到左阅读,在任何时候,保证 β 格子所出现的次数不超过 α 格子出现的次数.

(4) 用同样方法添加带 γ 的格子,如此类推.

例 4 用里氏规则计算 $\Gamma_3^{[21]} \otimes \Gamma_3^{[21]}$.

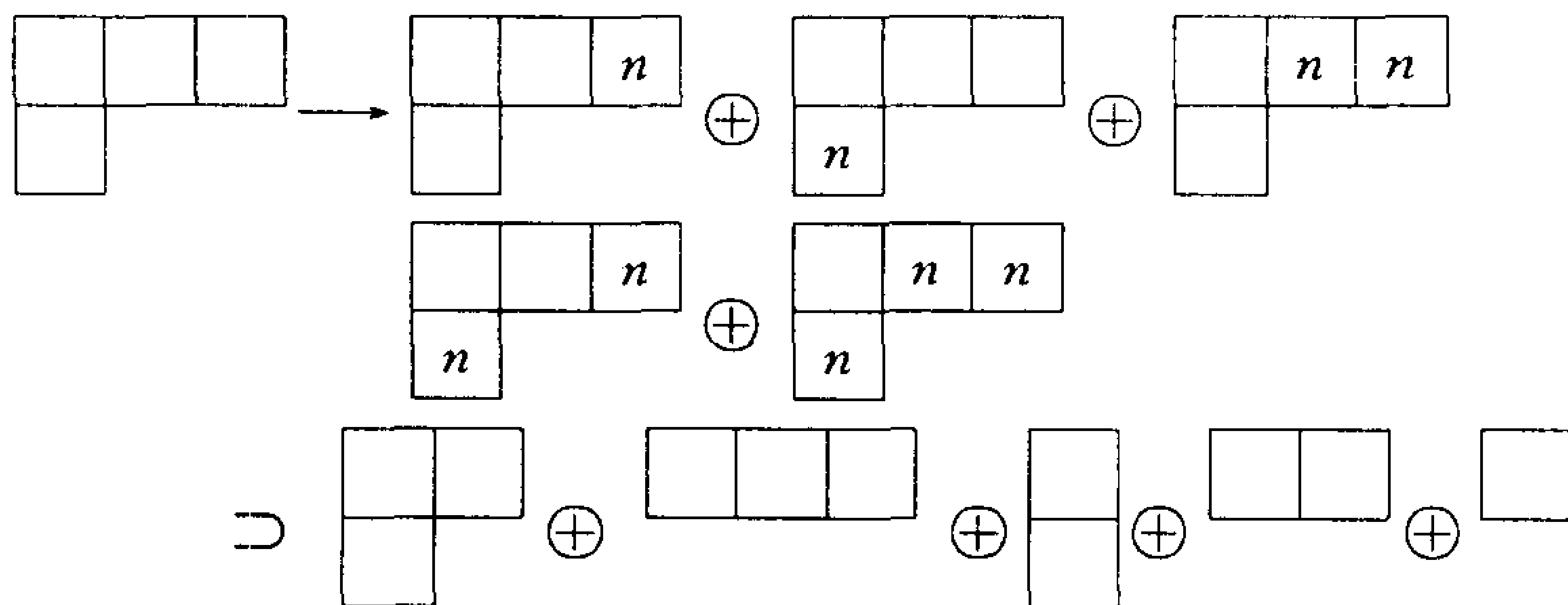
$\mu_1=2$ $\mu_1=1$

$\Gamma_6^{[4\,1\,1]}$ $\Gamma_6^{[4\,2]}$ $\Gamma_6^{[3\,3]}$ $\Gamma_6^{[3\,2\,1]}$ $\Gamma_6^{[3\,2\,1]}$ $\Gamma_6^{[3\,1\,1\,1]}$ $\Gamma_6^{[2\,2\,2]}$ $\Gamma_6^{[2\,2\,1\,1]}$

$$\Gamma_3^{[2\,1]} \otimes \Gamma_3^{[2\,1]} = \Gamma_6^{[4\,2]} \oplus \Gamma_6^{[3\,3]} \oplus \Gamma_6^{[4\,1\,1]} \oplus \Gamma_6^{[3\,2\,1]} \oplus \Gamma_6^{[3\,2\,1]} \oplus \Gamma_6^{[3\,1\,1\,1]} \oplus \Gamma_6^{[2\,2\,2]} \oplus \Gamma_6^{[2\,2\,1\,1]}.$$

例 5 $SU(n)$群约化为$SU(n-1)$的规则.

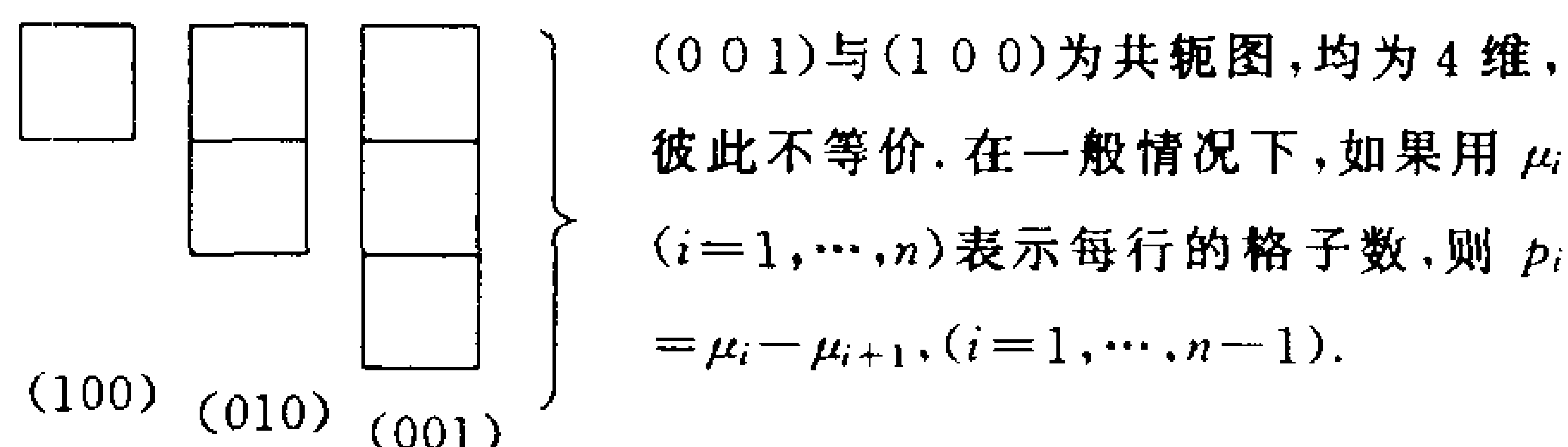
从$SU(n)$表示对应的标准杨图中用一切不破坏杨图规则的办法在格子上标记n,然后去掉带n的方格,余下的这些杨图,对应$SU(n-1)$的不可约表示.例如,



当$n=4$时,$SU(n-1)$的维数依次为20维、20维,6维、10维和4维

例 6 $SU(n)$群的维度公式.

设$SU(n)$群的$n-1$基础表示用$(n-1)$个单列杨图表示,每行格子数为$i(i=1,2,\cdots,n-1)$,用$(n-1)$个整数表征$P_i=1,P_f=0(f\neq i)$.如$SU(4)$,



一般有递推公式,$SU(n+1)$群,维数

$$N_{n+1}(p_1,p_2,\cdots,p_n)$$

$$=\frac{1}{n!\ \cdots 2!}(p_1+1)(p_1+p_2+2)\cdots+(p_1+p_2+\cdots p_n+n)$$

$$\cdot(p_2+1)(p_2+p_3+2)\cdots(p_2+\cdots p_{n-1}+n-1)\cdots(p_n+1),$$

或

$$N_{n+1}(p_1,p_2,\cdots,p_n)$$

$$=\frac{(p_n+1)(p_n+p_{n-1}+2)\cdots(p_n+p_{n-1}+\cdots+p_1+n)}{n!}. \quad (3.31)$$

特别地，对于 $SU(2)$ 有，

$$N(p)=p+1,$$

对于 $SU(3)$ 和 $SU(4)$ 有

$$N_3(p_1p_2)=\frac{1}{2}(p_1+1)(p_1+p_2+2)(p_2+1),$$

$$N_4(p_1p_2p_3)=\frac{1}{2!3!}(p_1+1)(p_1+p_2+2)$$
$$\cdot(p_1+p_2+3)(p_2+1)$$
$$\cdot(p_2+p_1+2)(p_3+1).$$

对于 $SU(n)$ 第一个与第二个基础表示的直积（第二表示实际上是第一个共轭表示），

$$\square\otimes\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline\end{array}=\begin{array}{|c|c|}\hline \ & 1\\\hline 2 & \\\hline\end{array}\oplus\begin{array}{|c|}\hline \ \\\hline 1\\\hline 2\\\hline\end{array}$$

$$(1\ 0^{n-2})\otimes(0\ 1\ 0^{n-3})=(1\ 1\ 0^{n-3})+(0\ 0\ 1\ 0^{n-4}).$$

右边第一个杨图，$(1\ 1\ 0^{n-3})\longrightarrow p_1=p_{n-1}=1$，余则为 0，因此由 (3.16) 式 $N_n(p_1=1,0,\cdots,0,p_{n-1}=1)=n^2$；第二杨图，$N_n(0,\cdots,p_{n-2}=1,0)=1$ 或表为数码字.

$$ⓝ\otimes\tilde{ⓝ}=(n^2-1)\oplus①.$$

对于 $SU(3)$，$③\otimes\tilde{③}=⑧\oplus①$.

例 7 $SU(3)$ 群的混合表示 $(1,1)\otimes(1,1)$ 中的不可约表示分解.

利用里-理氏规则，

$$\begin{array}{|c|c|}\hline \ & \ \\\hline \ & \\\hline\end{array}\otimes\begin{array}{|c|c|}\hline \beta & \alpha\\\hline \alpha & \\\hline\end{array}=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \ & \ & \alpha & \alpha\\\hline \ & \beta & & \\\hline\end{array}\oplus\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \ & \ & \alpha & \alpha\\\hline \ & & & \\\hline \beta & & & \\\hline\end{array}$$

$$\oplus \begin{array}{|c|c|c|}\hline \ & \ & \alpha \\ \hline \ & \alpha \\ \cline{1-2} \beta \\ \cline{1-1}\end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|}\hline \ & \ & \alpha \\ \hline \ & \alpha & \beta \\ \hline\end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|}\hline \ & \ \\ \hline \ & \alpha \\ \hline \alpha & \beta \\ \hline\end{array}$$

对于 $SU(n)$ 群维度的计算，满格子列可以去掉，即上式右边可以表示为

$$\begin{array}{|c|c|}\hline \ & \ \\ \hline \ \\ \cline{1-1}\end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|}\hline \ & \ \\ \hline \ \\ \cline{1-1}\end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \ & \ & \ & \ \\ \hline \ & \ \\ \cline{1-2}\end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|}\hline \ & \ & \ \\ \hline\end{array}$$

$$\oplus \begin{array}{|c|c|c|}\hline \ & \ & \ \\ \hline \ & \ & \ \\ \hline\end{array} \oplus \begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline \ \\ \hline \ \\ \hline\end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|}\hline \ & \ \\ \hline \ \\ \cline{1-1}\end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|}\hline \ & \ \\ \hline \ \\ \cline{1-1}\end{array}$$

$$(p_1,p_2)=(1,1)\otimes(1,1)=(2,2)\oplus(3,0)\oplus(0,3)$$
$$\oplus(0,0)\oplus(1,1)\oplus(1,1)$$
$$⑧ \otimes ⑧ = ㉗ \oplus ⑩ \oplus \overline{⑩} \oplus ① \oplus ⑧ \oplus ⑧.$$

注意本例与例 4 的异同. 本例的杨图行、列数$\leqslant 3$.

$SU(n)$群在粒子物理与核物理中有广泛应用. 此处介绍的方法直观、方便、简捷，其证明多有省略，有兴趣的读者可以参阅 M. Hamermesh,《Group Theory and its Application to Physical Problems》Addison-Wesley Publishing Co., Massachusetts, 1962; Group Theory and It's Applications, (Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ), Edited by Ernest M. Lober, United Kingdom Edition Published by Academec Press Inc. (London) LTD, 1968.

问　　题

1. 用 S_6 群的表示 $\Gamma_6^{[321]}$ 将 $S_3 \otimes S_3$ 的不可约表示约化，并检验相应表示维数(16 维$=1\times2+2\times1+2\times2\times2+2\times1+1\times2$).

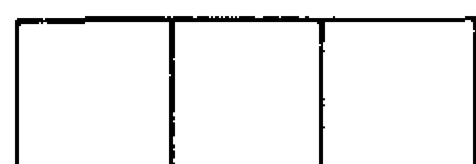
2. 写出表示 $\Gamma_5^{[32]}$ 的相应杨图以及所有允许的杨盘；求各共

轭类的特征量以及此不可约表示的标准基.

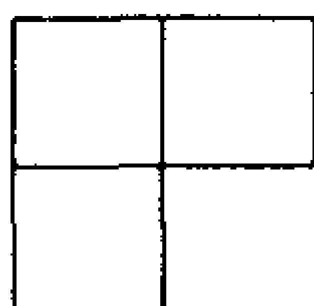
3. 利用 S_4 的特征标表,将 $\Gamma_4^{[4]}\otimes\Gamma_4^{[31]}$,$\Gamma_4^{[31]}\otimes\Gamma_4^{[31]}$,$\Gamma_4^{[4]}\otimes\Gamma_4^{[22]}$ 进行直积分解.

4. 求 S_3 的 $\Gamma_3^{[21]}\otimes\Gamma_3^{[21]}\otimes\Gamma_3^{[21]}$.

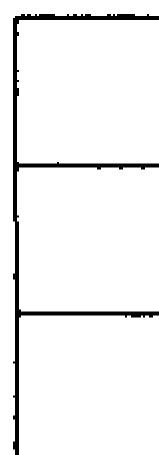
5. 给出 $SU(6)$ 群下述杨图的 $\{p_1,p_2,p_3,p_4,p_5\}$ 表示,并根据(3.16)、(3.15)式计算其相应维度.



(a)



(b)



(c)

杨图(a)、(b)、(c)在 $SU(3)$ 群和 $SU(2)$ 群相应表示的维度是多少.

(答案:(a) $d_{(6)}=56$,$d_{(3)}=10$,$d_{(2)}=4$;(b) $d_{(6)}=70$,$d_{(3)}=8$,$d_{(2)}=2$;(c) $d_{(6)}=20$,$d_{(3)}=1$,$d_{(2)}$ 无此图.)

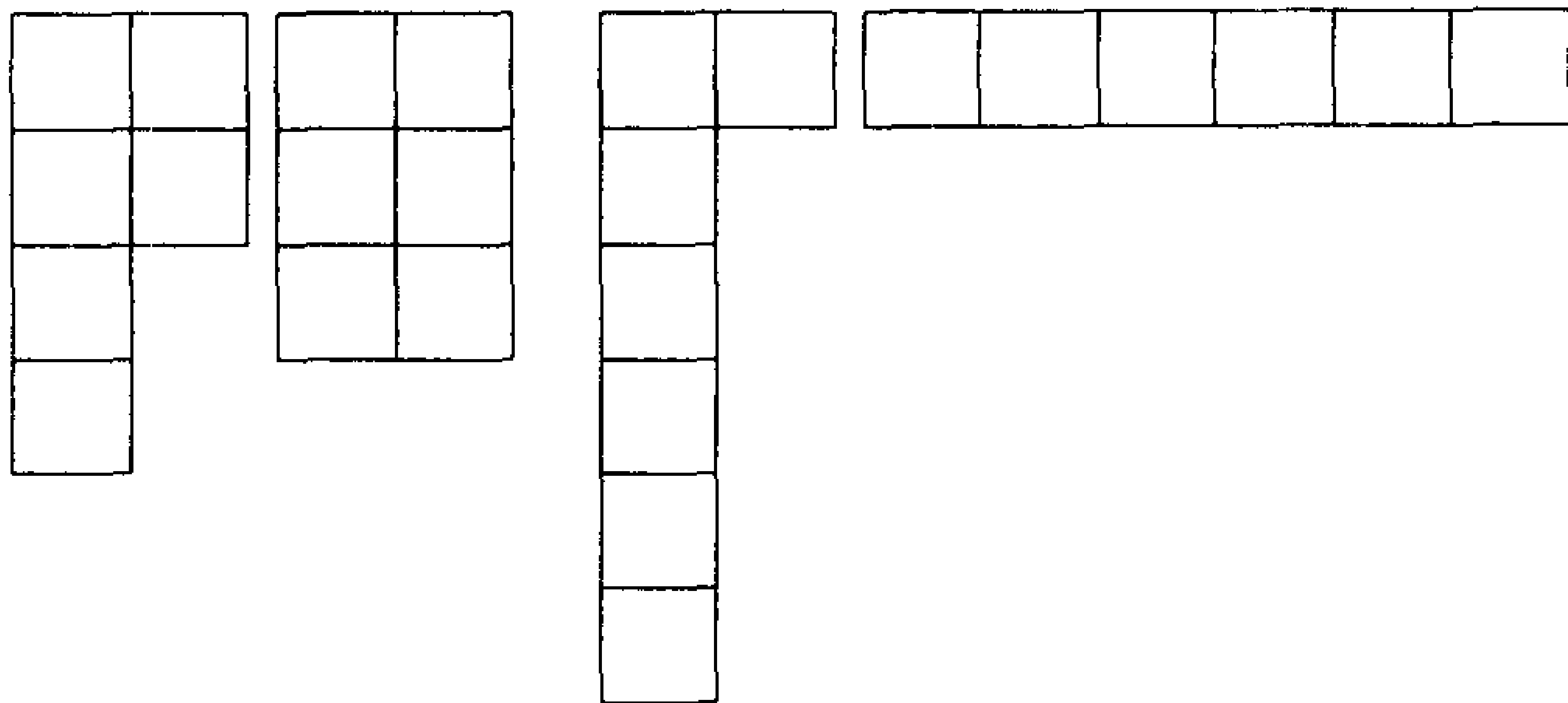
6. 试根据表示的对称性,分析并指出上题各杨图对应的 $SU(6)$ 多重态(multiplet,即表示维度)所包含的 $SU(3)$ 和 $SU(2)$ 多重态.

(答案:㊿$\supset$⑩$^4\oplus$⑧^2;⑰$\supset$⑩$^2+$①$+$①$+$⑧$^4\oplus$⑧^2,㉚$\supset$①$^4\oplus$⑧^2. 符号⑩^4 指 $SU(3)$ 的全对称的 10 重态,4 表示 $SU(2)$ 全对称的 4 重态,等等.)

7. 在 $SU(6)$ 中;作直积表示 $\Gamma_6^{[30^5]}\otimes\Gamma_6^{[21^4]}$,写出相应杨图算式.

(答案:56$\otimes$30 = 56$\otimes$70$\oplus$700 + 1134.)

8. 在 $SU(6)$ 群中,下列杨图,



分别表示是 $SU(6)$ 群的多少重态？

（答案：189，175，35，1.）

8. 给出 $SU(4)$ 的所有不等价不可约表示以及相应的标准表示. $SU(5)$ 的不可约表示 $\Gamma_5^{[3\,2\,0^3]}$ 包含 $SU(4)$ 哪些不可约表示（多重态），指出表示相应的维度.

§3.5 杨对称子、杨氏基与 S_n 的基矢

置换群 S_n 的基矢当然也可以用一般有限群中构造基矢的方法求得，但实际上用所谓杨对称子的办法却更有效、更方便. 同样的方法，可以推广到 $SU(n)$、$O(n)$、$SO(n)$ 等经典群中. 在物理学中，可用同样的方法解决多粒子体系波函数的对称化问题.

1. 杨(Yong)对称子

设用 p 表示只改变列，而不改变行的置换；反之，q 则表示只改变行，而不改变列的置换.

1	2
3	4

令 $\forall\ p_i \in S_n, \forall\ q_j \in S_n$，则集合

$$a[f] = \sum_i p_i, \quad b[f] = \sum_j \delta_j q_j,$$

其中，当 q_j 为偶置换时，$\delta_j = 1$；当 q_j 为奇置换时，$\delta_j = -1$，f_i 表示第 i 行格子数. 分别构成群空间中的子代数.

例 1 S_4；$f_1 = f_2 = 2, f_3 = f_4 = 0$.

$\{p_i\}$: E, (1,2), (3,4), (1,2), (3,4).

其中如(1,2)(3,4) $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline 4 & 3 \\ \hline\end{array}$.

$\{q_i\}$: E, (1,3), (2,4), (1,3)(2,4).

其中如(1,3)(2,4) $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline\end{array}$.

$$a[f] = E + (1,2) + (3,4) + (1,2)(3,4),$$
$$b[f] = E - (1,3) - (2,4) + (1,3)(2,4).$$

显然，对于此图，a 与 b 分别为对称算符与反对称算符. 容易验证，

$$a[f] \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline\end{array} ;\quad b[f] \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline\end{array} = -\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline\end{array} .$$

杨对称子亦称杨算符，其定义是

$$c[f] = \sum_{i,j} \delta q_j p_i. \tag{3.32}$$

对于例 1，(3.32)式右边有 19 项，

$$\begin{aligned} c[f] = E &+ (1,2) + (3,4) + (1,2)(3,4) \\ &- (1,3) - (2,4) + (1,3)(2,4) \\ &- (1,3) - (2,4) + (1,3)(2,4) - (1,3)(1,2) \\ &- (1,3)(3,4) - (1,3)(1,2)(3,4) \\ &- (2,4)(1,2) - (2,4)(3,4) \\ &- (2,4)(1,2)(3,4) + (1,3)(2,4)(1,2) \\ &+ (1,3)(2,4)(3,4) + (1,3)(2,4)(1,2)(3,4). \end{aligned}$$

根据杨对称子，可以定义 S_n 群的不可约表示空间的投影算符(或原始等幂元)：

$$P_{[f]} = \frac{d[f]}{n!} c[f], \tag{3.33}$$

其中 $d[f]$ 为相应杨图维数. 它具有下列性质*：

(1) $P_{[f]} \cdot P_{[f]} = P_{[f]}$.

1	2
3	

(2) 原始性：若 $P_{[f]} = P_{[1]} + P_{[2]}$，且 $P_{[1]}P_{[1]} = P_{[1]}$，$P_{[2]}P_{[2]} = P_{[2]}$，$P_{[1]}P_{[2]} = P_{[2]}P_{[1]} = 0$，则 $P_{[1]} = 0$ 或 $P_{[2]} = 0$. 每一个杨图 $[f]$，对应一个原始等幂元. 所有杨图对应的原始等幂元彼此相互独立，构成一组完备的集合.

例 2 S_3 的杨对称子与原始等幂元.

杨对称子：$c[f] = c[210] = \sum_{i,j} \delta_j q_j p_i$.

其中 $a[210] = E + (1,2)$，$b[210] = E - (1,3)$.

$$\begin{aligned} c[210] &= \sum_{j,i=1}^{2} \delta_j q_j p_i \\ &= I + (1,2) - (1,3) - (1,3)(1,2) \\ &= I + (1,2) - (1,3) - (1,2,3). \end{aligned}$$

原始等幂元

$$P_{[210]} = \frac{d[f]}{3!} c[210] = \frac{2}{3 \times 2 \times 1} c[210] = \frac{1}{3} c[210].$$

为了构造相应的幺正表示，令

$$\Phi_{\mu\nu\lambda} = \xi_\mu(1)\xi_\nu(2)\xi_\lambda(3)$$

为粒子 1、2、3 三个波函数的乘积，$\mu, \nu, \lambda = 1,2,3$，它们是三阶张量. 易得

$$\begin{aligned} c[210]\Phi_{\mu\nu\lambda} &= [\xi_\mu(1)\xi_\nu(2) + \xi_\nu(1)\xi_\mu(2)]\xi_\lambda(3) \\ &\quad - [\xi_\lambda(1)\xi_\nu(2)\xi_\mu(3) + \xi_\lambda(1)\xi_\mu(2)\xi_\nu(3)] \\ &= \Phi_{\mu\nu\lambda} + \Phi_{\nu\mu\lambda} - \Phi_{\lambda\nu\mu} - \Phi_{\lambda\mu\nu} \equiv \Psi_{\mu\nu\lambda}. \end{aligned}$$

形式上记为

μ	ν
λ	

.

即对脚标 μ、ν 是对称化的，对 μ 与 λ 是反对称化的，亦即

---

* 证明请见 H. Wegl. The Classical Group. Princeton University Press, Princeton, 1946；马中骐，戴安英. 群论及其在物理中的应用. 北京：北京理工大学出版社，1988.

(1) $\Psi_{\mu\nu\lambda}=\Psi_{\nu\mu\lambda}$;

(2) $\Psi_{\mu\nu\lambda}+\Psi_{\nu\lambda\mu}+\Psi_{\lambda\mu\nu}=0$(消除全对称部分 $\boxed{\mu \mid \nu \mid \lambda}$ 的条件，即单态). 由于

$$(1,2)\Psi_{\mu\nu\lambda}\equiv\xi_{\mu\nu\lambda}\Longrightarrow(1,2)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

即 $(1,2)\xi_{\mu\nu\lambda}=\Psi_{\mu\nu\lambda}$,

$$\left.\begin{aligned}(1,3)\Psi_{\mu\nu\lambda} &= -\Psi_{\mu\nu\lambda}\\ (1,3)\xi_{\mu\nu\lambda} &= \xi_{\mu\nu\lambda}-\Psi_{\mu\nu\lambda}\end{aligned}\right\}\Longrightarrow(1,3)=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

其中 $\xi_{\mu\nu\lambda}\equiv\phi_{\nu\mu\lambda}+\phi_{\mu\nu\lambda}-\phi_{\nu\lambda\mu}-\phi_{\mu\lambda\nu}$,

$$\left.\begin{aligned}(2,3)\Psi_{\mu\nu\lambda} &= \Psi_{\mu\nu\lambda}-\xi_{\mu\nu\lambda}\\ (2,3)\xi_{\mu\nu\lambda} &= -\xi_{\mu\nu\lambda}\end{aligned}\right\}\Longrightarrow(2,3)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

S_n 的正交基矢及幺正表示.

继续讨论例 1,现将表示幺正化,就是找到在 S_3 变换下使二次型

$$f(\Psi,\xi)=\alpha\Psi^2+\beta\Psi\xi+\gamma\xi^2$$

保持不变的表示.

由于 $(1,2)f(\Psi,\xi)=f(\Psi,\xi)((1,2)\Psi=\xi)$,即

$$\gamma\Psi^2+\beta\Psi\xi+\alpha\xi^2=\alpha\Psi^2+\beta\Psi\xi+\gamma\xi^2\Rightarrow\alpha=\gamma.$$

也由于 $(1,3)\Psi=\Psi-\xi$, $(1,3)f(\Psi,\xi)=f(\Psi,\xi)$,即

$$\alpha\Psi^2+\beta(-\Psi)(\xi-\Psi)+\gamma(\xi-\Psi)^2=\alpha\Psi^2+\beta\Psi\xi+\gamma\xi^2$$
$$\Longrightarrow\alpha+\beta=0,$$

即是 $f(\Psi,\xi)=\alpha\Psi^2-\alpha\Psi\xi+\alpha\xi^2=\alpha(\Psi^2-\Psi\xi+\xi^2)$,在 S_3 置换下保持不变. 注意到,

$$\begin{aligned}2(\Psi^2+\xi^2-\Psi\xi) &= \frac{3}{2}(\Psi-\xi)^2+\frac{1}{2}(\Psi+\xi)^2\\ &= (\Phi^{(1)}\boldsymbol{i})^2+(\Phi^{(2)}\boldsymbol{j})^2,\end{aligned}$$

其中单位矢量 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=0$, $\Phi^{(1)}=\sqrt{\frac{1}{2}}(\Psi-\xi)$ 与 $\Phi^{(2)}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi+\xi)$ 为正交矢量. 由于

$$\left.\begin{aligned}(1,2)\Phi^{(1)} &= \Phi^{(1)},\\ (1,2)\Phi^{(2)} &= -\Phi^{(2)}\end{aligned}\right\}\Longrightarrow(1,2)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},$$

$$\left.\begin{aligned}(1,3)\Phi^{(1)}&=-\frac{1}{2}\Phi^{(1)}-\frac{\sqrt{3}}{2}\Phi^{(2)}\\(1,3)\Phi^{(2)}&=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Phi^{(1)}+\frac{1}{2}\Phi^{(2)}\end{aligned}\right\}\Rightarrow(1,3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}, & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

$$\left.\begin{aligned}(2,3)\Phi^{(1)}&=-\frac{1}{2}\Phi^{(1)}+\Phi\frac{\sqrt{3}}{2}\Phi^{(2)}\\(2,3)\Phi^{(2)}&=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Phi^{(1)}+\frac{1}{2}\Phi^{(2)}\end{aligned}\right\}\Rightarrow(2,3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}, & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

这正好是我们早先求得的 S_3 的标准表示.

为方便以后应用,我们再介绍杨对称子的一般性质与原始等幂元的正交化一般方法.

杨对称子可以视为置换群代数中的矢量,一般可表为

$$c[f]=\sum_{\forall g_\alpha\in S_n}F(g_\alpha)g_\alpha=\sum\delta_q qp,\tag{3.34}$$

其中系数 $F(g_\alpha)=0,\pm1$,当组合置换不能表为 q_jp_i 形式时,$F(g_\alpha)=0$. 其实 $F(g_\alpha)$即(3.15)式中 δ_j.

根据$\{p_i\}$与$\{q_j\}$的定义,显然,有

$$pa[f]=a[f]p=a[f].\tag{3.35}$$

注意 $a[f]$并不属于 S_n,它等价于先取杨图$[f]$中每行的所有置换变换加起来,然后再将这些和式相加(横向置换):

$$a[f]=\sum p=\sum(\prod_i p_i)=\prod(\sum p_i),$$

其中 p_i 表示杨图中第 i 行数字间的任意置换,$p=\prod\limits_i p_i$,即各行 p_i 的乘积. 同样,

$$b[f]=\sum\delta_q q=\sum(\prod_k\delta q_kq_k)=\prod_k(\sum\delta_{q_k}\cdot q_k).$$

与(3.18)式一样,有

$$qb[f]=b[f]q=\delta_qQ.\tag{3.36}$$

由(3.18)、(3.19)式,得到杨对称子重要性质:

$$c[f]=pc[f]=\delta_qc[f]=\delta_qpc[f]q,\tag{3.37}$$

由(3.17)、(3.20)式可得组合系数

$$F(g_a)=F(pg_a)=\delta_q F(g_a q)=\delta_q F(pq), \qquad (3.38)$$

尤其是若 $c[f]$ 中包含的置换 pq，有

$$1=F(E)=F(p)=\delta_q F(q)=\delta_q F(pq). \qquad (3.39)$$

一般说来，一个杨图如果对应 f_i 个杨盘，则亦对应 f_i 个正则杨对称子 $c_{[f]}^{(i)}$，它们可将由 S_n 所负载的 $n!$ 个函数基. $\forall\ p_i\in S_n$，

$$\phi_i(1,2,\cdots,n)=p_i\phi(1,2,\cdots,n) \quad (i=1,2,\cdots,f_i),$$

$$\sum_{i=1}^{n} f_i=n!.$$

其中的 f_i 个函数 $\{\phi_i\}$ 按标准杨氏盘的混合对称性来对称化：

$$c^{(i)}[f]\phi_i(1,2,\cdots,n)=\Psi_i(1,2,\cdots,n) \quad (i=1,2,\cdots,f_i).$$

f_i 个函数 $\{\Psi_i\}$ 将构成 S_n 的一个不变子空间，负载 S_n 的不可约表示 $[f]$. 与标准基比较，有寻找方便的优点. 对于每一个不可约表示，对应一个杨图，只要找到所有杨图，就可利用杨对称子得到杨氏基. 但缺点是并非幺正的，而标准基却是幺正的.

利用杨对称子，构造正交的原始等幂元就是为了解决杨氏基的上述缺点. f_i 个互相正交的原始等幂元 $e_i(i=1,2,\cdots,3)$ 是

$$e_i e_j=\delta_{ij}e_i \quad (i,j=1,2,\cdots,f_i),$$

其中 $e_i=c^{(i)}y^{(i)}$. 可以证明 $y^{(i)}$ 定义如下：

$$y^{(i)}=E-\sum_{j=i+1}^{f_i} p_{ij}y^{(j)}, \quad y_{f_i}=E, \quad i\leqslant f_i, \qquad (3.40)$$

相应构造的 $\{e_i\}$ 满足正交条件，其中第二项是下列形式之和

$$(-1)^m p_{ik}p_{kl}p_{lt}\cdots, i<k<l<t<\cdots,$$

m 为所包含的 p 因子个数.

所谓杨对称子的正交性系指

$$c'\cdot c=0.$$

其中并不具备相互性，即上式并不表明 $c\cdot c'=0$. 在讨论正交性时，定义杨对称子大小是重要的. 若两杨图对应的配分为$[f_1,f_2,$

$\cdots]$与$[f'_1, f'_2, \cdots]$，逐步考察$(f_i - f'_i)$，其中第一个不为零的差是正的，则$[f]$对应杨图大于$[f']$杨图. 反之，杨图$[f]$小于杨图$[f']$. 对于同属一个杨图的诸杨盘，将第二行数字放在第一行的右边，第三行数字又放在第二行的右边，则应有 N 个数字. 对应 N 个数字较大者，称为较大的杨盘. 若杨图 C 大于杨图 C'，或杨盘 C 大于杨盘 C'，则有

$$C' \cdot C = 0.$$

例 3 杨图$[3,2,0^3]$对应 5 个杨盘，按标号小者较小的规则编号，应为

$$C^{(1)} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array}; \qquad C^{(2)} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array};$$

$$C^{(3)} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array}; \qquad C^{(4)} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 4 \\ \cline{1-2}\end{array};$$

$$C^{(5)} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 \\ \cline{1-2}\end{array}.$$

显然，$C^{(5)} \cdot C^{(4)} = C^{(4)} \cdot C^{(3)} = C^{(3)} \cdot C^{(2)} = C^{(2)} \cdot C^{(1)} = 0$.

但是 $C^{(1)} \cdot C^{(5)} \neq 0$（正交性不要求 $C^{(4)} \cdot C^{(5)} = 0$，等）.

由(3.23)式，$y_1 = E - R_{15} y_5$，$y_i = E (i = 2,3,4,5)$，但 R_{15}是将$C^{(5)}$变为 $C^{(1)}$的置换

$$R_{15} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} = (2453) = [(24)(35)](34),$$

即 $y_1 = E - (24)(35)$，注意(34)为 $C^{(5)}$中纵向置换而在 $C^{(1)}$的横向置换中没有者.

故得相应的正交等幂元为$\left(\dfrac{d(\lambda)}{n!} = \dfrac{5}{5!} = \dfrac{1}{24}\right)$

$$P_{[f]}^{(1)} = \frac{1}{24} C^{(1)} [f] [E - (2,4)(3,5)],$$

$$P_{[f]} = \frac{1}{24}c^{(i)}[f] \quad (i = 2,3,4,5).$$

正交等幂元构成群空间的完备集合

$$E = \sum_{[f]}\sum_{i} P_{[f]}^{(i)} = \frac{1}{n!}\sum_{[f]} d(\lambda)\sum_{i} c^{(i)}[f]y^{(i)}[f].$$

S_n 群有 2 个一维表示，一个是用一列杨图表示$[n]$的全对称表示（恒等表示），另一个是用分杨图表示的$[1^n]$的全反称表示，设 $f(1,2,\cdots,n)$为 n 个对象（粒子）的函数，则

全对称函数 $\Psi^{[n]} \equiv \hat{S}f \equiv \sum_{g_a \in S_n} P_a f(1,2,\cdots,n)$,

全反对称函数 $\Psi^{[1n]} \equiv \hat{A}f \equiv \sum_{g_a \in S_n} (-1)^p P_a f(1,2,\cdots,n)$;

其中 p 为置换 P_a 相应的对换的次数. 在杨盘计算，尤其是 $SU(n)$ 等计算，常常略而不计. 更一般地，有福克条件，反映由于对称或反对称化造成的同一杨盘的各杨盘之间的关联. 设杨对称子 $c[f]$ 中，其第 j 行与 j' 行各 f_j 格和 $f_{j'}$ 格，且 $f_j \geqslant f_{j'}$，现在第 j 行 μ 列和第 j' 行 ν 列填上数字 a_μ 与 b_ν，则有

$$[E + \sum_{\mu=1}^{f_j}(a_\mu b_\nu)]c[f] = 0. \tag{3.41}$$

此式实际上表明，在 $c[f]$中，将 b_ν 与所有 a_μ 全对称化会得到零的结果. 设杨盘 $c[f]$中第 i 行和 i' 列各有 r_i 与 $r_{i'}$ 格，$r_i \geqslant r_{i'}$，在 μ 行 i 列与 ν 行 i' 列，填入数字 c_μ 与 c_ν，则有

$$c[f][E - \sum_{\mu=1}^{r_i}(c_\mu d_\nu)] = 0. \tag{3.42}$$

此式反映，在 $c[f]$中将 c_μ 与所有 d_ν 反对称化会得到零.

例 4 $c\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \\ \cline{1-1}\end{array}\right) = -c\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \\ \cline{1-1}\end{array}\right)(1,2)$

$$= -(1,2)c\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \cline{1-1}\end{array}\right) \quad \text{（此处用到(3.20)式）}$$

$$c\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 3&2\\\hline 1\\\cline{1-1}\end{array}\right)=-c\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 3&2\\\hline 1\\\cline{1-1}\end{array}\right)(1,3)=(-1,3)\,c\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\right),$$

$$c\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 2&1\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\right)=c\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 2&1\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\right)[(1,2)+(1,3)]\quad [\text{由}(3.42)]$$

$$=(1,2)c\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\right)-(1,3)\,c\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 2&3\\\hline 1\\\cline{1-1}\end{array}\right)$$

$$=c\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\right)-(3\ 2\ 1)\,c\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\right),$$

$$=c\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\right)-(2,3)c\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\right)$$

$$c\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 3&1\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\right)=(2,3)\,c\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 2&1\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\right)(2,3)$$

$$=-(2,3)\,c\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\right)+c\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\right)(\text{代入上式}).$$

作为置换群的约化、杨氏基、标准基的综合训练，再举二例.

例 5 S_6 群的表示[3,2,1]按 $S_3\otimes S_3$ 群的不可约表示约化.

按里氏规则，从相反的程序出发，

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline \times&\times&\times\\\hline 1&1\\\cline{1-2} 2\\\cline{1-1}\end{array}\oplus\begin{array}{|c|c|c|}\hline \times&\times&1\\\hline \times&1\\\cline{1-2} 1\\\cline{1-1}\end{array}\oplus\begin{array}{|c|c|c|}\hline \times&\times&1\\\hline \times&1\\\cline{1-2} 2\\\cline{1-1}\end{array}\oplus$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline \times&\times&1\\\hline \times&2\\\cline{1-2} 1\\\cline{1-1}\end{array}\oplus\begin{array}{|c|c|c|}\hline \times&\times&1\\\hline \times&2\\\cline{1-2} 2\\\cline{1-1}\end{array}\oplus\begin{array}{|c|c|c|}\hline \times&1&1\\\hline \times&2\\\cline{1-2} \times\\\cline{1-1}\end{array}$$

（其中序数表示格与约化后的行数）$\Longrightarrow$ $\cong$ $\otimes$ $\oplus$

$\otimes$ $\oplus$ $\otimes$ $\oplus$

$\otimes$ $\oplus$ $\otimes$

相应表示维数，

$$16 = 1 \times 2 + 2 \times 1 + 2(2 \times 2) + 2 \times 1 + 1 \times 2.$$

例 6 计算 S_3 群的表示(2,1)按 $S_2 \otimes S_1$ 群不可约表示约化的相似变换矩阵.

表示(2,1)，即杨图，相应两种杨盘：

1	2
3	

1	3
2	

$$c^{(1)}[2,1] = [E + (1,2)][E - (1,3)]$$
$$= E + (1,2) - (3,1) - (3,2,1)$$
$$c^{(2)}[2,1] = E + (3,1) - (1,2) - (1,2,3)$$
$$\frac{d[3,2]}{3!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$
$$c^{(1)}[2,1] \cdot c^{(2)}[2,1] = c^{(2)}[2,1] \cdot c^{(1)}[2,1] = 0,$$

相应的正交等幂元为 $P^{(1)}[2,1] = \frac{1}{3}c^{(1)}[2,1]$，$P^{(2)}[2,1] = \frac{1}{3}c^{(2)}[2,1]$.

由于 $(2,3)c^{(1)}[2,1] = c^{(2)}[2,1]$，即 $R_{12} = (2,3)$.

取表示的基 $b_{\mu\nu} = \frac{1}{3}R'_{\mu\nu}c^{(\nu)}[2,1](\mu,\nu = 1,2)_{[2,1]}$，即

$$b_{11}=\frac{1}{3}c^{(1)}[2,1](R_{11}=1),b_{12}=\frac{1}{3}(2,3)c^{(2)}[2,1],$$

$$b_{21}=\frac{1}{3}(2,3)c^{(1)}[2,1](R_{21}=R_{12}),b_{22}=\frac{1}{3}c^{(2)}[2,1].$$

由于这些正交性，元素(2,3)与(1,2,3)的表示矩阵容易列表得到(表 3.3).

表 3.3

$c^{(\nu)}$	$c^{(\nu)}$	$c^{(\nu)}[2,3]$ \ $c^{(\nu)}$	$c^{(1)}\Rightarrow\begin{smallmatrix}1&2\\3&\end{smallmatrix}$	$c^{(2)}\Rightarrow\begin{smallmatrix}1&3\\2&\end{smallmatrix}$
$c^{(2)}[2,1]$	$\begin{smallmatrix}1&2\\3&\end{smallmatrix}\Rightarrow c^{(1)}$	$\begin{smallmatrix}1&3\\2&\end{smallmatrix}\Rightarrow c^{(2)}$	0	1
$c\left(\begin{smallmatrix}3&1\\2&\end{smallmatrix}\right)$	$\begin{smallmatrix}1&3\\2&\end{smallmatrix}\Rightarrow c^{(2)}$	$\begin{smallmatrix}1&2\\3&\end{smallmatrix}\Rightarrow c^{(1)}$	1	0
$=(E+(3,1))$	$c^{(\nu)}$	$c^{(\nu)}[1,2,3]$ \ $c^{(\nu)}$	$c^{(1)}\Rightarrow\begin{smallmatrix}1&2\\3&\end{smallmatrix}$	$c^{(2)}\Rightarrow\begin{smallmatrix}1&3\\2&\end{smallmatrix}$
$\cdot(E-(3,2))$ $=E+(3,1)$	$\begin{smallmatrix}1&2\\3&\end{smallmatrix}\Rightarrow c^{(1)}$	$\begin{smallmatrix}3&1\\2&\end{smallmatrix}$	-1	1
$-(3,2)$ $-(3,2,1)$	$\begin{smallmatrix}1&3\\2&\end{smallmatrix}\Rightarrow c^{(2)}$	$\begin{smallmatrix}3&2\\1&\end{smallmatrix}$	-1	0

故得

$$\Gamma^{[2,1]}[(2,3)]=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},$$

$$\Gamma^{[2,1]}[(1,2,3)]=\begin{pmatrix}-1&1\\-1&0\end{pmatrix}.$$

将其幺正化，可令

$$X^{-1}\Gamma^{[2,1]}X=\Gamma'^{[21]}(\text{对角矩阵})$$

即解本征值方程，得

$$\Gamma'^{[2\,1]}[(2,3)]=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

$$\Gamma'^{[21]}[(2,3)] = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

易证 $\Gamma'^{[21]}[(2,3)] \cdot \Gamma'^{[21]}[(1,2,3)]=0$.

相应的变换矩阵是

$$X = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -3/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -3/2 \end{pmatrix},$$

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ -1/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

问 题

1. 在例 1 中的对称化条件 $\Psi_{\mu\nu\lambda}=\Psi_{\nu\mu\lambda}$与全反对称条件 $\Psi_{\mu\nu\lambda}+\Psi_{\nu\lambda\mu}+\Psi_{\lambda\mu\nu}=0$ 可以用杨对称子表示吗？它与福克条件有何关系？

2. 如果重新定义杨对称子为 $c'[f]=a[f]\cdot b[f]$，并令 $\Phi_{\mu\nu\lambda}=\frac{1}{\sqrt{3}}(\Psi_{\mu\lambda\nu}-\Psi_{\nu\lambda\mu})$，则有反对称条件(i) $\Phi_{\mu\nu\lambda}=-\Phi_{\nu\mu\lambda}$；(ii) $\Phi_{\mu\nu\lambda}+\Phi_{\nu\lambda\mu}+\Phi_{\lambda\mu\nu}=0$. 后一条件保证全反对称组合 $\begin{array}{|c|}\hline \mu \\ \hline \nu \\ \hline \lambda \\ \hline\end{array}$ 被剔去. 试有 $c'[f]$解例 1.

3. 求 S_4 的不可约表示$[2,1^2]$的杨氏基和不可约表示矩阵. [提示：有 3 个杨盘，相应杨对称子，$c^{(1)}[2,1^2]=[E-(1,3)-(1,4)-(3,4)+(1\ 3\ 4)+(1\ 4\ 3)][E+(1,2)]$；$c^{(2)}[2,1^2]=[E-(1,2)-(1,4)-(2,4)+(1\ 2\ 4)+(1\ 4\ 2)][E+(1\ 3)]$；$c^{(3)}[2,1^2]=[E-(1,2)-(1,3)-(2,3)+(1\ 2\ 3)+(1\ 3\ 2)][E+(1,4)]$. 3 个杨氏基为 $\Psi_1=c^{(1)}[2,1^2]\phi(1,2,3,4)$；$\Psi_2=c^{(2)}[2,1^2]\phi(1,2,3,4)$；$\Psi_3=c^{(3)}[2,1^2]\phi(1,2,3,4)$. 由于$(1,2)\Psi_1=\Psi, -\Psi_2$, $(1,2)\Psi=$

$-\Psi_2+\Psi_3$，$(1,2)\Psi_3=-\Psi_3$，故

$$\Gamma^{[2,1^2]}(2,1)=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&-1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix};$$

$$\Gamma^{[2,1^2]}(1,3)=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\0&1&0\\0&-1&-1\end{pmatrix}$$

$$\Gamma^{[2,1^2]}(1,4)=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&-1\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$(132)=(12)(13),$$

$$(1432)=(12)(13)(14),$$

$(14)(23)=(14)(132)(2)$，等等.]

4. 利用杨图作外积分解

(1) $\boxed{3^2}\otimes\boxed{3}$；(2) $[2,1]\otimes\boxed{1^3}$.

[答案：$[6,3]\oplus[5,3,1]\oplus[4,3,2]\oplus[3^3]$；$[2,1^4]\oplus[2^2,1^2]\oplus[3,1^3]\oplus[3,2,1]$.]

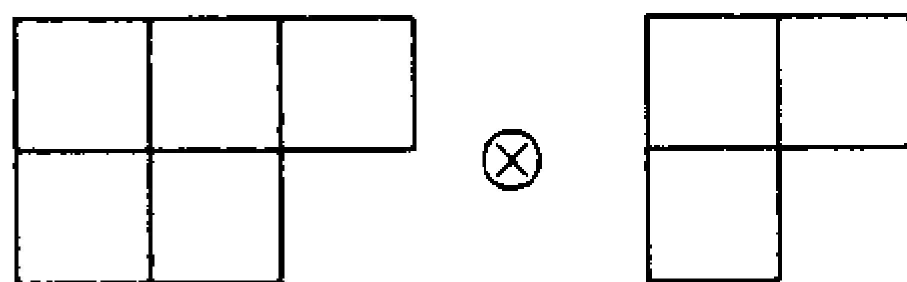
5. 证明：

(1) $[2,1]=[2]\otimes[1]\ominus[3]$；

(2) $[f]\otimes[2,1]=[f]\otimes\{[2]\otimes[1]\ominus[3]\}$；

(3) $[f]\otimes[3,1]=[f]\otimes\{[3]\otimes[1]\ominus[4]\}$，此处$\ominus$表示剔去某杨图.

6. 完成外积分解.



并写出相应的维数等式，并将最后结果所代表的不可约表示用标准基和杨氏基表示之.

第四章　点群与晶体对称性

本章先较系统地介绍空间对称操作，然后讨论点群的一般特征与分类，最后分析、讨论晶体的对称性.

§4.1　空间对称操作

我们首先直观地描述空间对称操作. 如果在有限几何形体的所有对称操作中，至少有一点不动，则相应的对称操作构成的群称为点群. 所谓对称操作的概念及相应乘法的定义在第一章已经叙述过了.

以不动点为坐标原点，建立坐标系. 所有保持空间任一点矢径的长度不变的对称变换集合构成三维实正交群 $O(3)$，点群实质上是其子群.

设矢径 $\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3$，其中 $\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\delta_{ij}(i,j=1,2,3)$，或用列矩阵表示. 试用 3×3 矩阵 $\{a_{ij}\}$ 表示三维定点转动，即

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

设

$$x_\mu'=a_{\mu\nu}x_\nu \qquad (\mu,\nu=1,2,3),$$

矢径长度不变，即 $x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2$，

$$\sum_{\sigma,\nu=1}^{3}\delta_{\sigma\nu}x_\sigma x_\nu=\sum_{\nu,\sigma=1}^{3}a_{\mu\sigma}a_{\mu\nu}x_\sigma x_\nu.$$

对比两边，得到

$$\sum_{\mu} a_{\mu\sigma} a_{\mu\nu} = \delta_{\sigma\nu} \Longrightarrow \tilde{a}_{\sigma\mu}\, a_{\mu\nu} = (\tilde{A}A)_{\sigma\nu} = \delta_{\sigma\nu},$$

用矩阵表示上式，即为

$$\tilde{A}A = E. \tag{4.2}$$

由(4.2)式可知，变换矩阵集合$\{A\}$正是$O(3)$群. 由(4.2)式，得

$$\det A = \pm 1. \tag{4.3}$$

$\det A = 1$，表示纯转动. 只含纯转动元素的点群称为第一类点群；$\det A = -1$，对应纯转动与空间反射元素的组合称为第二类点群.

如果将固定点条件放弃，(4.1)式推广到下式

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

它表示空间一般操作. 若(4.4)式中，$a_{13} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = 0$，$a_{33} = 1$，$b_1 = b_2 = 0$，则表示绕第三轴的转动，并沿此轴平移 b_3，这种操作叫螺旋转动. 当所有的 $a_{ij} = 0$ 时，则表示空间纯平移操作. 此类操作可视为螺旋转动的特例. 螺旋转动含纯转动元素，称为第一类操作，见图 4.1.

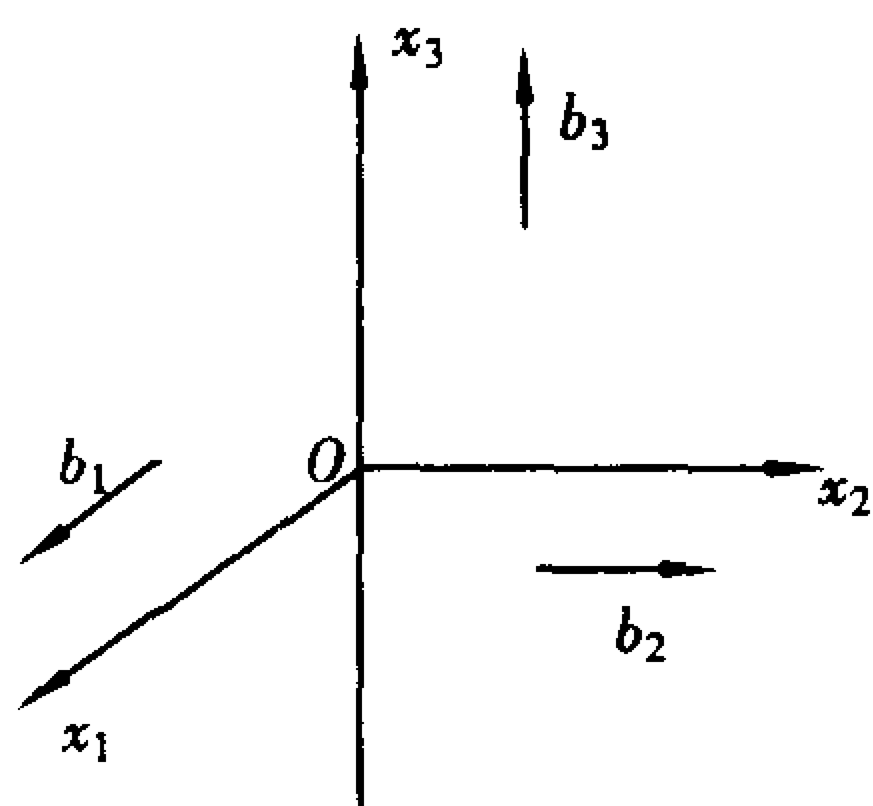


图 4.1

若(4.4)式简化为

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

由于 $\det A = -1$，相应操作称为第二类操作. (4.5)式表示对 x_1-x_2 平面反映并沿 x_1-x_2 平面有滑移(b_1, b_2).

当(4.5)式变为

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

时，则表示沿 x_3 轴转动 α 角，并对平面 x_1-x_2(垂直于 x_3 轴)进行反映. 这种操作称为转动反映，也属第二类操作. 上式中令 $\alpha=\pi+\beta$，则矩阵 A 可表示为转第三轴转动 β 的矩阵与反射矩阵($-E$)的乘积，即操作变为令 x_3 转动 β 角，再相对原点反演，称为转动反演.

综上所述，任一空间操作，大而言之可分为三大类：螺旋转动(包含平移)，滑移反映与旋转反演. 除第一种为第一类操作外，其余二种属于第二类操作. 因此空间操作有 8 种：

(1) 反演(相对于对称中心)——i，

(2) 反映(相对于映面 $\boldsymbol{m}$)——$\sigma(\boldsymbol{m})$，

(3) 旋转(相对于转轴 $\boldsymbol{n}$)——$C(\boldsymbol{n},\alpha)$，

(4) 旋转反演——$iC(\boldsymbol{n},\alpha)$，

(5) 旋转反映——$S(\boldsymbol{n},\alpha)=\sigma(\boldsymbol{n})C(\boldsymbol{n},\alpha)=iC(\boldsymbol{n},\alpha+\pi)$，

(6) 平移——$(\alpha|t)$，其中 α 表示对原点的操作，相当于(4.5)式中 $\{a_{ij}\}$，t 表示纯平移，相当于(b_1,b_2,b_3)，

(7) 滑移反映——$i(\alpha|t)$，

(8) 螺旋旋转——$(\alpha|t)\cdot C(\boldsymbol{n},\alpha)$.

其中前 4 种是点操作. 在这 4 种操作中，只有纯旋转为第一类操作，其余为第二类操作群.

在纯转动中，对于晶体受到晶格周期性的限制，转角只能是 $\frac{2\pi}{n}$，其中整数 $n=1,2,3,\cdots$ 当 $n=2,3,\cdots$时，分别把转轴 $\boldsymbol{n}$ 称为二度、三度等轴，相应转动记为 $C_2,C_3,\cdots,C_n$.

在镜面反映中，反射面与 C_n 轴垂直记为 σ_h；反射面通过转轴 C_n 者记为 σ_v. 如果 σ_h 为独立元素，则 $C_2\sigma_h=i$，其中 i 的反演中心为转轴与映射面 σ_h 相交的点. 同样，$C_n'\sigma_h=S(\boldsymbol{n})$，$(C_n'\sigma_h)^2=(S(\boldsymbol{n}))^2$，等等.

其中点操作有如下运算性质：

$$\begin{cases} i^2 = I \text{（恒等操作）}, \\ \sigma(\boldsymbol{m})^2 = I, \\ \sigma(\boldsymbol{m}_1)\sigma(\boldsymbol{m}_2) = C(\boldsymbol{m}_1 \times \boldsymbol{m}_2, 2\phi(\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2)) \end{cases} \tag{4.7}$$

其中 ϕ 为法线 $\boldsymbol{m}_1$ 与 $\boldsymbol{m}_2$ 的夹角．显然

$$\begin{cases} \mathrm{i}\sigma(\boldsymbol{m}) = C(\boldsymbol{m}, \pi), \\ C(\boldsymbol{n}, \beta) \cdot C(\boldsymbol{n}, \alpha) = C(\boldsymbol{n}, \alpha + \beta), \\ C(\boldsymbol{n}_1, \alpha) \cdot C(\boldsymbol{n}_2, \beta) = C(\boldsymbol{n}_3, \gamma), \end{cases}$$

其中$\frac{\alpha}{2}$，$\frac{\beta}{2}$和$\frac{\gamma}{2}$为 $\boldsymbol{n}_1$、$\boldsymbol{n}_2$ 与 $-\boldsymbol{n}_3$ 在单位球面上形成球面三角形的三内角；此外还有

$$\begin{cases} \mathrm{i}g = g\mathrm{i} \ (g \text{ 为任意操作}), \\ g^{-1}\sigma(\boldsymbol{m})g = \sigma(g\boldsymbol{m}), \\ g^{-1}C(\boldsymbol{n}, \alpha)g = C(\pm g\boldsymbol{n}, \alpha). \end{cases}$$

关于点群共轭类的划分，在第一章已介绍三个经验判据，现进一步深入讨论如下．

（1）关于不同转轴 C_n 与 C_n' 的转动元素．容易证明，如果存在 C_n 轴与垂直于它的二阶轴（C_2'），则必存在 n 个垂直于它的二阶轴．有鉴于此，若存在另一个转轴 C'_m（可能与 C_n 有一定交角），则由乘法的封闭性，

$$(C'^{i}_{m})^{-1}C^k_n C'^{i}_{m} \equiv C'^{k}_{n} \in G,$$

亦即在群 G 中存在等价的转轴 C'_n，而且由于 $C^i_m \in G$，（$i=1,2,\cdots,m$），会产生 m 条 n 阶等价轴．相对于这些等价转轴的相同转角元素，均为同一共轭类．反之，C_n 轴也会产生与 C'_m 等价的 n 条转轴，相对这些转轴的相同转角元素，亦属同一类．

其中一个特例是 C'_m 为与 C_n 轴垂直的 C'_2 轴，则

$$(C_2^{-1})C^k_n C'_2 = C_n^{-k}(C'^{k}_{n}),$$

注意到 $C'_2=(C'_2)^{-1}$，得 $C'^{-k}_{n}=C'^{k}_{n}$．可见 C_n 与 C'_n 轴重合，但反向（转动反向），这样的轴叫双向轴．

(2) 关于不同反射面的反射元素的共轭元. 若反射面 σ_h 垂直于转轴 C_n，则由于

$$C_n^k \sigma_h = \sigma_h C_n^k,$$

此时不会产生新的共轭元. 若反射面 σ_v 通过 C_n 轴，则由于 $\sigma_v = iC_2$，且 i 与所有操作元素对易，应有

$$\sigma_v^{-1} C_n^k \sigma_v = \sigma_v C_n^k \sigma_v = C_2 C_n^k C_2 = C_n^{-k},$$

亦即 C_n 轴成为双向轴. 若既不存在与 i 垂直，又不存在通过它反射面，则转轴一定为单向轴.

注意，当存在通过 C_n 轴的反射面 σ_v 时，则必存在 n 个通过转轴的等价反射面. 事实上，

$$(C_n^i)^{-1} \sigma_v C_n^i = \sigma'_v. \tag{4.8}$$

当 $i=1,2,\cdots,n$，分别产生 n 个等价反射面.

我们一般称转轴 C_n 为 n 次轴. 一次轴即恒等变换. 在晶体点群中，由于空间周期性结构，只存在一次、二次、三次、四次及六次轴. 以后我们要证明这一点.

问　题

1. 证明若相交 O 点的两个二次轴 C_{2A} 与 C_{2B} 夹角为 θ，C 轴垂直于 C_{2A} 与 C_{2B} 所在的平面，则有关系 $C'_{2B}C'_{2A} = C_C(2\theta)$，其中 $C_C(2\theta)$ 表示操作：绕 C 轴转动 2θ.

[提示：设 A 轴为 Ox 轴，B 轴单位矢为 $\boldsymbol{i}_B$，则用并矢表示

$$C'_{2A} = \boldsymbol{ii} + [\boldsymbol{jj} + \boldsymbol{kk}]\cos\pi$$

$$= \boldsymbol{ii} - \boldsymbol{jj} - \boldsymbol{kk} = 2\boldsymbol{ii} - E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix},$$

$\boldsymbol{i}_B = \boldsymbol{i}\cos\theta + \boldsymbol{j}\sin\theta$. 类似于上式有

$$C'_{2B} = 2\boldsymbol{i}_B\boldsymbol{i}_B - \overleftrightarrow{E} \quad (\overleftrightarrow{E} = \overleftrightarrow{\boldsymbol{ii}} + \overleftrightarrow{\boldsymbol{jj}} + \overleftrightarrow{\boldsymbol{kk}}),$$

$$C'_{2B}(C'_{2A}\boldsymbol{r}) = [2\boldsymbol{i}_B\boldsymbol{i}_B - \overset{\leftrightarrow}{E}][2(\boldsymbol{ii} - \overset{\leftrightarrow}{E})\boldsymbol{r}]$$
$$= \boldsymbol{r} + 4\boldsymbol{i}_B(\boldsymbol{i}_B\boldsymbol{i})(\boldsymbol{ir}) - 2\boldsymbol{i}_B(\boldsymbol{i}_B\boldsymbol{i}) - 2\boldsymbol{i}(\boldsymbol{ir})$$
$$= \boldsymbol{i}(x\cos 2\theta - y\sin 2\theta) + \boldsymbol{j}(x\sin 2\theta + y\cos 2\theta) + \boldsymbol{k}z.$$

但用并矢表示的绕 Oz 轴转动 ϕ 的操作是

$$C_C(\phi) = \boldsymbol{kk} + (\boldsymbol{ii} + \boldsymbol{jj})\cos\phi + \overset{\leftrightarrow}{E} \times \boldsymbol{k}\sin\phi,$$
$$C_C \cdot \boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}(x\cos\phi - y\sin\phi) + \boldsymbol{j}(y\cos\phi + x\sin\phi) + \boldsymbol{k}z.]$$

2. 证明对于平面 A 与 B 的两个反射 σ_A 与 σ_B 的乘积，等价于绕两平面交线的转动，转角等于两平面交角的两倍，即 $\sigma_A\sigma_B = C(2\phi_{AB})$.

[提示：设两平面法线矢量 $\boldsymbol{n}_A=\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{n}_B=i\cos\theta+j\sin\theta$，$\theta=\phi_{AB}$，则 $\sigma_A = \overset{\leftrightarrow}{E} - 2\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{n}_A$，$\sigma_B=\overset{\leftrightarrow}{E}-2\boldsymbol{n}_B\boldsymbol{n}_B$，$\sigma_A(\sigma_B\boldsymbol{r})=\boldsymbol{i}(x\cos 2\theta-y\sin 2\theta)+\boldsymbol{j}(y\cos 2\theta+z\sin\phi)+\boldsymbol{k}z$，此外，交线单位矢为 $\boldsymbol{k}$，

$$C(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{kk} + (\overset{\leftrightarrow}{E} - \boldsymbol{kk})\cos\phi + (\overset{\leftrightarrow}{E} \times \boldsymbol{k})\sin\phi$$
$$C(\boldsymbol{k})\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}(x\cos\phi - y\sin\phi) + \boldsymbol{j}(y\cos\phi + z\sin\phi) + \boldsymbol{k}z.]$$

3. 证明一个转动 ϕ 的操作与通过转轴平面 A 的反射 σ_A 的乘积，等于过该轴的另一平面 B 的反射 σ_B，A 与 B 的夹角为 $\phi/2$.

[提示：令转轴 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{i}$，则 $C(\phi)=\boldsymbol{ii}+(\boldsymbol{jj}+\boldsymbol{kk})\cos\phi-[-\boldsymbol{jk}+\boldsymbol{kj}]\sin\phi$. 令平面 A 法向 $\boldsymbol{n}_A=\boldsymbol{j}$，则 $\sigma_A=\overset{\leftrightarrow}{E}-2\boldsymbol{jj}=\boldsymbol{ii}+\boldsymbol{kk}-\boldsymbol{jj}$.

$$C(\phi)\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}x + (\boldsymbol{j}y + \boldsymbol{k}z)\cos\phi + [-\boldsymbol{j}z + \boldsymbol{k}y]\sin\phi,$$
$$\sigma_A = [C(\phi)\boldsymbol{r}] = \boldsymbol{i}x - \boldsymbol{k}(z\cos\phi + y\sin\phi)$$
$$- \boldsymbol{j}(y\cos\phi - z\sin\phi).$$

设 $\boldsymbol{n}_B$ 与 y 轴夹角为 θ，则 $\boldsymbol{n}_B=j\cos\theta+k\sin\theta$，

$$\sigma_B = \overset{\leftrightarrow}{E} - 2\boldsymbol{n}_B\boldsymbol{n}_B = \boldsymbol{ii} + 2(j\cos\theta + k\sin\theta)(j\cos\theta + k\sin\theta)$$
$$= (\boldsymbol{ii} + \boldsymbol{jj} + \boldsymbol{kk}) - 2(j\cos\theta + k\sin\theta)(j\cos\theta + k\sin\theta)$$
$$= \boldsymbol{ii} - \boldsymbol{jj}\cos 2\theta - (\boldsymbol{jk} + \boldsymbol{kj})\sin 2\theta + \boldsymbol{kk}\cos 2\theta$$
$$\sigma_B\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}x - \boldsymbol{j}(y\cos 2\theta + z\sin 2\theta) + \boldsymbol{k}(z\cos 2\theta - y\sin 2\theta).$$

当 $\theta=-\phi/L$ 时，$\sigma_B=\sigma_A C(\phi)$.]

4. 若在循环转动群中只有五种固有循环群，即在$\{C_n\}$中，$n=1,2,3,4,6$. 证明在包含两个或两个以上转轴的固有点群中各次转轴数目 $n_i(i=1,2,3,4,6)$之间有关系 $n_2=3+n_4+3n_6$.

[提示：C_n 群有 n 个不等价不可约表示，显然有群的阶 $g=1+n_2+2n_3+3n_4+5n_6$，其中各子群有共同元素：恒元. 平庸表示 $\mathrm{Tr}\Gamma(E)=3$，子群$\{C_n\}$的三维自然表示$\{\Gamma_a^{\mathrm{reg}}(n)\}$，在正交归一基中，每个表示矩阵只有一个对角元为 1，其余对角元为零，可以用并矢表为 $\boldsymbol{nnn}$. 由此

$$\sum_{g_a\in G}\mathrm{Tr}[\Gamma^{\mathrm{reg}}(g_a)]=3+(2-3)n_2+(3-3)n_3+(4-3)n_4+(6-3)n_6.$$

但是，$\left[\sum_{g_a\in G}g_a\right]\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}$，故$\left[\sum_{g_a\in G}g_a\right]\boldsymbol{r}$ 必然是其转轴可以不重合的，$\sum_a g_a=0$.]

5. 试用球坐标导出绕空间任意轴转动 ψ 的表达式，见图 4.2.

[提示：设转轴 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦为 l、m、n，其中 $l=\sin\theta\cos\phi, m=\sin\theta\sin\phi, n=\cos\theta$. $P(x,y,z)$为空间任一点，绕 $\boldsymbol{n}$ 轴转动 ψ 到 $P'=(x',y',z')$. 用符号表示：$\boldsymbol{r}\xrightarrow{R}\boldsymbol{r}'$，或

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\Gamma(\psi,\boldsymbol{n})\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

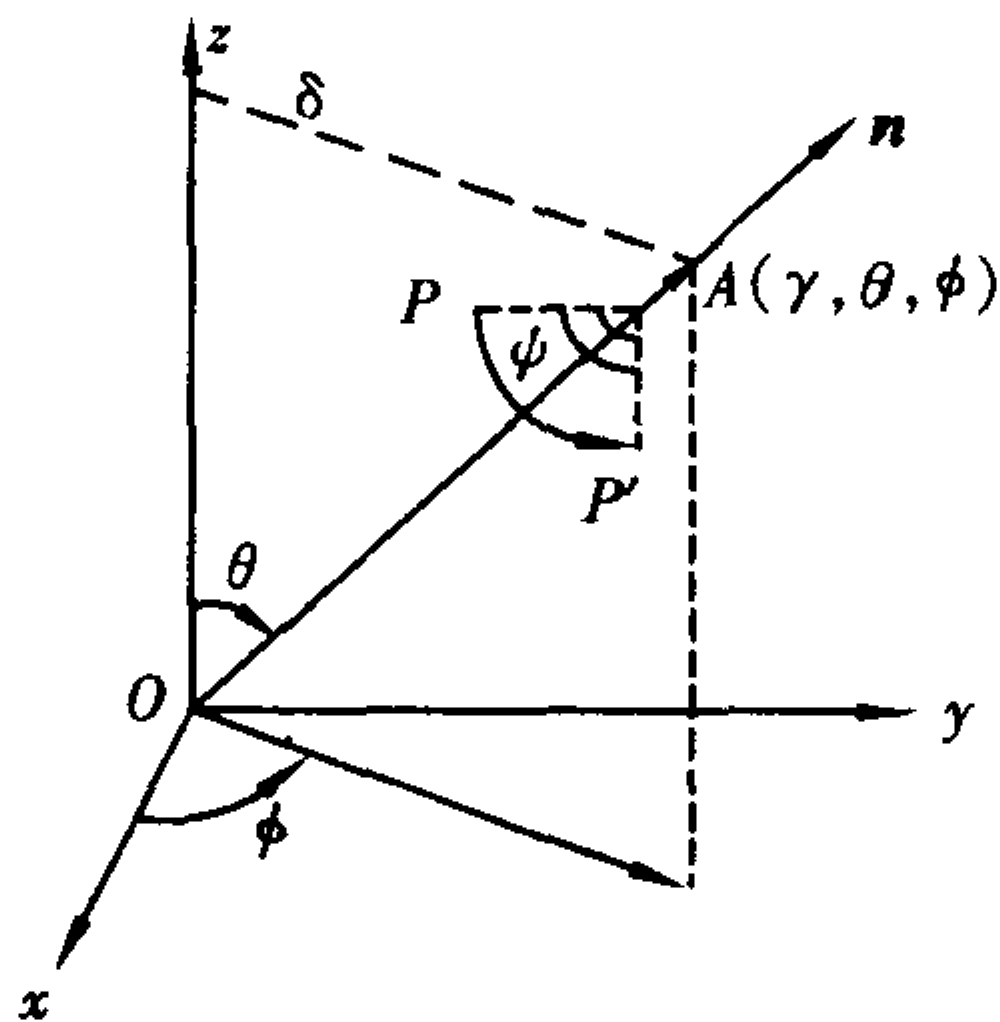


图 4.2

但绕 $\boldsymbol{n}$ 轴的转动 ψ，相当于先将 $\boldsymbol{n}$ 轴移到 Oz 轴(记为 $\Gamma_a(-\theta)$)，然后沿 Oz 轴转动 ψ，最后将转轴转回 $\boldsymbol{n}$ 轴，即

$$\Gamma(\psi,\boldsymbol{n})=\Gamma_a^{-1}\Gamma(\psi,\boldsymbol{k})\Gamma_a.$$

此外，$\Gamma_a(\theta)$又可分为两次操作：先绕 $Oz(\boldsymbol{k})$轴绕 $-\phi$，再绕 $Oy(\boldsymbol{j})$轴绕 $-\theta$，即将 $\boldsymbol{n}$ 轴转到 Oz 轴.

$$\Gamma_a = \Gamma(-\theta,\boldsymbol{j})\Gamma(-\phi,\boldsymbol{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi, & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

易得

$$\Gamma_a^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix},$$

$$\Gamma(\psi,\boldsymbol{k}) = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

结果

$$\Gamma(\psi,\boldsymbol{n}) = \Gamma_a^{-1}\Gamma(\psi,\boldsymbol{k})\Gamma_a =$$

$$\begin{pmatrix} \cos\psi + l^2(1-\cos\psi) & lm(1-\cos\psi) - n\sin\psi & ln(1-\cos\psi) + m\sin\psi \\ lm(1-\cos\psi + n\sin\psi) & \cos\psi + m^2(1-\cos\psi) & mn(1-\cos\psi) - l\sin\psi \\ ln(1-\cos\psi) - m\sin\psi & mn(1-\cos\psi) + l\sin\psi & \cos\psi + n^2(1-\cos\psi) \end{pmatrix}.$$

与用并矢表达式

$\Gamma(\psi,\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{nn} - (1-\boldsymbol{nn})\cos\psi + (\overleftrightarrow{E} \times \boldsymbol{n})\sin\phi$ 等效，读者试验证之.]

6. 利用 5 题的结果，试证明第 1 题、第 2 题，并证明 $C'_{2A} \cdot C'_{2B} = C_C(-2\theta)$.

§4.2　晶格的对称操作

晶体结构的基本特征是，构成它们的原子或离子、原子团在空

间呈现周期性排列，构成所谓晶格．周期性条件促使晶格的对称操作均离散化了，不存在连续群中的无穷小操作元素．

1. 平移对称操作 $T(\boldsymbol{l})$

$\boldsymbol{l}$ 为晶格矢量．晶体的最小周期单元叫晶胞．晶胞的 3 个不共面的棱称为晶格基矢，设为 $\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$ 与 $\boldsymbol{a}_3$．晶格矢量 $\boldsymbol{l}$ 必须表为晶格基矢的线性组合：

$$\boldsymbol{l} = \sum_{i=1}^{3} l_i \boldsymbol{a}_i = l_1\boldsymbol{a}_1 + l_2\boldsymbol{a}_2 + l_3\boldsymbol{a}_3, \tag{4.9}$$

其中 $l_i(i=1,2,3)$ 应为正整数．对于晶格，在平移变换 $T(\boldsymbol{l})$ 下，

$$\boldsymbol{r} \longrightarrow \boldsymbol{r}' = T(\boldsymbol{l}) = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{l},$$

具有不变性，所有 $\{T(\boldsymbol{l})\}$ 集合构成基本平移群，或点阵的格群．平移矢量 $\boldsymbol{l}$ 的集合 $\{\boldsymbol{l}\}$ 生成三维晶体点阵，即布拉菲点阵．布氏点阵是基本平移操作的几何表现，晶格点阵则是晶格粒子的实际分布．晶格点阵可以是一个布氏点阵，也可能由多个相同的布氏点阵套构而成．例如 NaCl 的晶格点阵就是由氯离子和钠离子分别构成的面心立方布氏格子套构而成的．

2. 晶格的一般对称操作

将保持晶格不变性的所有对称操作（平移、转动、反射及其组合）记为 $g(R,\boldsymbol{\alpha})$［回忆(4.5)式］，

$$\boldsymbol{r} \longrightarrow \boldsymbol{r}' = g(R,\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{r} = R\boldsymbol{r} + \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \boldsymbol{a}_i \tag{4.10}$$

其中 R 为 $O(3)$ 变换，α_i 为正实数，其整数部分为 l_i，即 $\alpha_i = l_i + t_i$ $(0 \leqslant t_i \leqslant 1)(i=1,2,3)$，即是

$$g(R,\boldsymbol{\alpha}) = T(\boldsymbol{t})g(R,\boldsymbol{t}). \tag{4.11}$$

当 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$ 时，$g(R,\boldsymbol{0})$ 表示转动与反射；当 $R=E$，α_i 必须取整数，表示平移变换 $g(E,\boldsymbol{l})=T(\boldsymbol{l})$，相继两次操作定义为它们的乘积，则

$$g(R,\boldsymbol{\alpha})g(R',\boldsymbol{\alpha}') = g(R \cdot R',\boldsymbol{\alpha} + R\boldsymbol{\alpha}'). \tag{4.12}$$

$g(R,\alpha)$的逆元素是 $g(R^{-1},-R^{-1}\alpha)$，而单位元素为 $g(E,\mathbf{0})$. 显然，所有晶格对称操作集合$\{g(R,\alpha)\}$满足群的四个公理. 这样构成的晶格对称群称为空间群，记为 S. 上述格群$\{T(l)\}$，可以证明是群 S 的正规子群，其陪集元素可以表示为(4.11)式.

由于 $g(R,t)$中的 R 与 t 有一一对应的关系(见问题 2)，故平移群的陪集集合(包括平移群)与实 $O(3)$的变换存在一一对应关系. 这样的 $O(3)$群同构于商群 $S/T(l)$，称为晶格点群，简称点群，记为 G. 一般说来，集合$\{g(R,t)\}$并不构成群；点群亦非空间群的子群. 只有当 $t=\mathbf{0}$，$g(R,\mathbf{0})=R$ 时，点群才是空间群的子群. 这种空间称为简单空间群.

3. 周期性条件对实正交变换 R 的限制

由于平移群元 $T(l)$的共轭元(见问题 1)

$$g(R,\alpha)^{-1}T(l)g(R,\alpha) = g(E,l') = T(l'), \qquad (4.13)$$

(其中 $l'=Rl$)也是共轭元素，因此平移群是空间群的不变子群. (4.13)式对 R 的形式有严格限制.

设$\{e_a\}$为正交归一基矢组，则有

$$e_a \cdot e_b \equiv \langle e_a, e_b\rangle = \delta_{ab}(a,b = 1,2,3).$$

实正交变换矩阵元

$$\Gamma(R)_{ab} = e_a \cdot Re_b \equiv \langle e_a, Re_b\rangle.$$

转换以$\{a_i\}$($i=1,2,3$)为基矢组，且令

$$a_i = \sum_{a=1}^{3} e_a X_{ai}(i = 1,2,3), \qquad (4.14)$$

显然实矩阵 X 为正则的，即 $\det X\neq 0$. 引入倒格基矢 b_i($i=1,2,3$)，

$$b_i = \sum_{a=1}^{3} (X^{-1})_{ia} e_a. \qquad (4.15)$$

由(4.14)与(4.15)式，有

$$b_i \cdot a_j = \langle b_i, a_j\rangle = \langle \sum_{k=1}^{3} (X^{-1})_{ik} e_k, \sum_{l=1}^{3} e_l X_{lj}\rangle$$

$$= \sum_{k,l} X_{li} X_{ik}^{-1} \langle e_k, e_l \rangle - \sum_k X_{ik}^{-1} X_{kj}$$
$$= (X^{-1}X)_{ij} = \delta_{ij}.$$

以晶格基矢为基，实正交变换 R 的表示矩阵 $\overline{R}$ 一般不再是实正交的；其矩阵元 $\overline{R}_{ij}$ 为

$$Ra_i = \sum_j a_j \overline{R}_{ji}, Rb_i = \sum_j \overline{(R^{-1})}_{ij} b_j,$$
$$\overline{R}_{ij} = \langle b_i, Ra_j \rangle = \langle a_j, R^{-1} b_j \rangle$$
$$\Longrightarrow \overline{R} = X^{-1}RX. \tag{4.16}$$

(4.16)式用并矢表示如下(省去 $\overline{R}$ 上一横)：

$$\overleftrightarrow{R} = \sum_{i,j} R_{ij} a_i \cdot b_j = \sum_{i,j} (R^{-1})_{ij} b_j \cdot a_i,$$

其中 $R_{ij} = b_i \cdot \overleftrightarrow{R} \cdot a_i = a_j \cdot (\overleftrightarrow{R}^{-1}) b_i$. 由于(4.9)式中 $l_i' = R_{ij} l_j (i, j = 1, 2, 3)$，$R_{ij}$应为整数. 当然，其迹亦应为整数. 在等价相似变换中，矩阵的迹不变. 为不失一般性，以 Oz 为转轴，则相应的转动矩阵为

$$\Gamma(R) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

即 $\mathrm{Tr}[\Gamma(\phi)] = 1 + 2\cos\phi = \pm$整数. 亦即

$$\phi = \frac{2\pi m}{n}, n = 1, 2, 3, 4, 6, \quad m = 0, 1, 2, \cdots$$

对应 C_n 和 $S(n)(\det\Gamma(R) = \pm 1)$分别叫 n 次固有和非固有循环点群. $S(n)$包括转动与反射元素. $S(1)$只有二个元素，空间反映 i 或 $\bar{i}$ 和恒元 E. $S(3)$的阶为 6. 其余循环点群的阶数均等于其次数减 n.

定理　除一次轴外，沿任一转轴方向必有晶格矢量或倒晶格矢量；在与转轴垂直的平面内，至少有两个不共线的晶格矢量和倒晶格矢量.

证明　除一次轴外，所有循环点群都包含 C_2、C_3 或 S_2. 显而

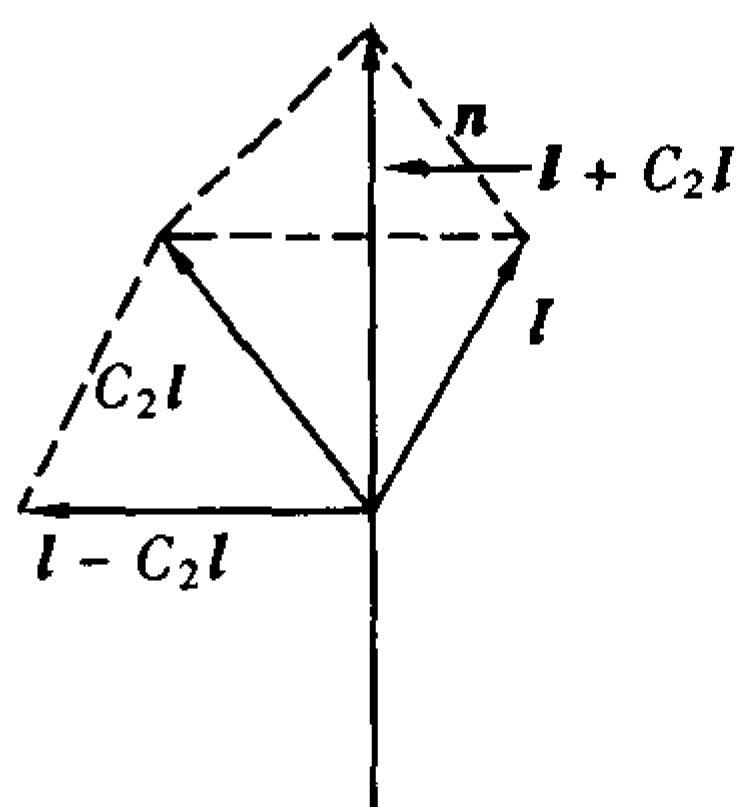


图 4.3 $l+C_2l$ 平行转轴
$l-C_2l$ 垂直转轴

易见，由图 4.3，$C_2\boldsymbol{l}+\boldsymbol{l}$ 平行于转轴，$\boldsymbol{l}-C_2\boldsymbol{l}$ 则垂直于转轴. 在此两矢量决定的平面以外，找到任何晶格矢量 $\boldsymbol{l}'$，则 $\boldsymbol{l}'-C_2\boldsymbol{l}'$ 为与 $\boldsymbol{n}$ 垂直，且与 $\boldsymbol{l}-C_2\boldsymbol{l}$ 线性无关的另一晶格矢量.

对于 $S(2)$ 群，证法相同. 对于 C_3 群，则 $\boldsymbol{l}+C_3^1\boldsymbol{l}+C_3^2\boldsymbol{l}$ 平行于转轴 $\boldsymbol{n}$（直接作图易知），$\boldsymbol{l}-C_3^1\boldsymbol{l}-C_3^2\boldsymbol{l}$ 垂直于转轴 $\boldsymbol{n}$.

对于倒格矢量 $\boldsymbol{K}$，由于 $\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{l}=$ 整数，而且

$$(R\boldsymbol{K})\cdot\boldsymbol{l}=\sum_{i,j}(R_{ij}k_j)l_i=\sum_{i,j}K_jR_{ij}l_i$$
$$=\sum_{ij}K_jR_{ji}^{-1}l_i=\boldsymbol{K}\cdot(R^{-1}\boldsymbol{l}),$$

亦即 $R\boldsymbol{K}$ 亦为倒晶格矢量. 因此可以利用上法，证明有关结果.

周期性条件对于平移矢量亦有若干限制，在此我们不拟深究. 同时在晶体对称变换 $g(R,\boldsymbol{t})$ 中，往往有保持不变的点（不动点），保持不变的直线和平面，分别称为对称中心、对称轴和对称平面. 对这些对称元的讨论，也有许多有趣结果. 限于篇幅，也不拟一一介绍了.

问　　题

1. 证明平移群 $\{T(\boldsymbol{l})\}$ 是空间群 $\{g(R,\boldsymbol{\alpha})\}$ 的不变子群.

2. 证明对于给定的晶格和选定的晶格基矢，$\forall\ g(R,\boldsymbol{t})\in S$，其中 R 与 $\boldsymbol{t}$ 有一一对应关系.

[提示：设 $g(R,\boldsymbol{t})$ 与 $g(R,\boldsymbol{t}')\in S$，则

$$g(R,\boldsymbol{t}^{-1})\cdot g(R,\boldsymbol{t}')=T(-R^{-1}\boldsymbol{t}+R^{-1}\boldsymbol{t}')=T(\boldsymbol{l}),$$

即 $-R^{-1}\boldsymbol{t}+R^{-1}\boldsymbol{t}'=\boldsymbol{l}\longrightarrow\boldsymbol{t}'-\boldsymbol{t}=R_l=\boldsymbol{l}'=0$，即 $\boldsymbol{t}'=\boldsymbol{t}$. 注意 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{l}+\boldsymbol{t}$，

$0\leqslant t_i\leqslant 1, i=1,2,3.$]

3. 证明若有 σ_v 面通过 C_n 轴，则 C_n 轴成为双向轴.

[提示：令 $\sigma_v=C_2\mathrm{i}$，C_2 垂直于 σ_v 面，也垂直于 C_n 轴，故 $\sigma_v^{-1}C_n^k\sigma_v=iC_2C_n^kC_2i=\mathrm{i}C_n^{-k}i=C_n^{-k}$.]

4. 在直角坐标系中，写出转轴即 Oz 轴、n 次固有转动和非固有循环点群的生成元的矩阵形式和并矢形式，并计算 $\{3\}$ 和 $\{\bar{4}\}$.

[提示：C_n 的生成元 C'_n，$S(n)$ 的生成元 C'_n，i 所有点群的和式 $\sum_\alpha R_\alpha\equiv\{R\}$，表为并矢形式 $\{N\}=N\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}$，其中 N 即为 n，$\boldsymbol{n}$ 表示 n 次转动单位矢量. $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}$，$C_n(\phi)=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}+(\overleftrightarrow{E}-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k})\cos\phi+(\overleftrightarrow{E}\times\boldsymbol{k})\sin\phi$，$\phi=\frac{2\pi}{n}$. $\{3\}$ 即 $n=3$，计算 $\{3\}$ 要算出 $\sum_{i=0}^{3}C_3^i$. $\{\bar{4}\}$ 则要考虑反射元素. 矩阵形式比较简单.]

5. 用并矢计算绕[111]方向($\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{j}+\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{k}$)120°的矩阵.

[提示：$A=\boldsymbol{nn}+(\overleftrightarrow{E}-\boldsymbol{nn})\cos\phi+(I\times\boldsymbol{n})\sin\phi$，$\cos 120°=-\frac{1}{2}$，$\sin 120°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\overleftrightarrow{E}\times\boldsymbol{n}=(\boldsymbol{ii}+\boldsymbol{jj}+\boldsymbol{kk})\times\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{ik}-\boldsymbol{ij}+\boldsymbol{ji}-\boldsymbol{jk}-\boldsymbol{ki}+\boldsymbol{kj})$，故 $A=\boldsymbol{ik}+\boldsymbol{ji}+\boldsymbol{kj}$，即 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$.]

§4.3 第一类点群

第一类点群不包含反射元素，也称固有点群. 固有循环点群 C_n，当 $n\geqslant 3$ 时称为高轴群. 第一类点群分类与高次轴关系极大.

1. 固有循环点群 C_n

C_n 群又称单轴点群. $\forall\ C_n^k \in C_n (k=0,1,\cdots,n-1)$ 都相互对易,故 C_n 群为阿贝尔群. 其每个群元即为一个共轭类,有 n 个不等价不可约的一维表示. 在分子物理中,一般的线性链状分子,可用 $C_\infty(n=\infty)$ 描述,即 C_∞ 中任一微小转动,分子构型依然重合,此时分子链的方向即转轴方向. 实际上 C_∞,就是特殊正交群 $SO(2)$. 对于晶体对称群 S,由于周期性结构的限制,已经证明只可能存在 $n=1,2,3,4,6$ 五种情况. 我们还给出各次转动轴的数目的关系

$$n_2 = 3 + n_4 + 3n_6 \text{(至少有两个轴不重合)}.$$

2. D_n 群

D_n 群即高次轴不多于一个的多轴点群. 此时群必包含 C_2,且 C_2 轴必垂直于 C_n 轴,见图 4.4. 否则,如果是斜交,则 $C_2C_n^kC_2=C'^k_n$,必存在等价轴不属于所讨论的范围. 在 §4.1 及其后问题中已经知道,

$$C_2(B)C_2(A) = C(c,2\phi)$$
$$\Longrightarrow C_2(A) = C_2(B)C(c,2\phi),$$

令 $C(c,2\phi)=C_n^k(k=1,\cdots,n-1)$,即产生 $(n-1)$ 个 $C_2(A)=C_2(B)C_n^k$ 轴. 换言之,如图4.5,D群即是有一条C_n轴,n条C_2轴(均垂

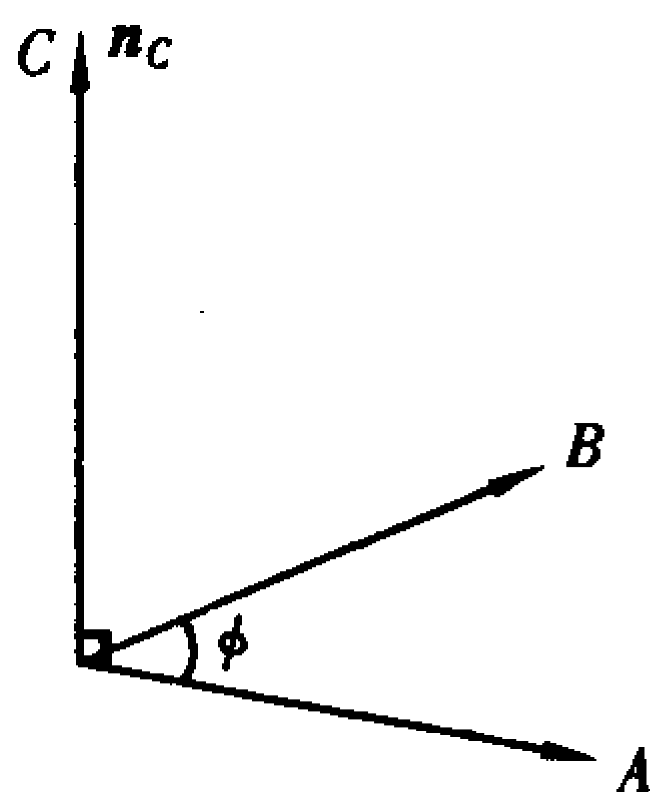


图 4.4

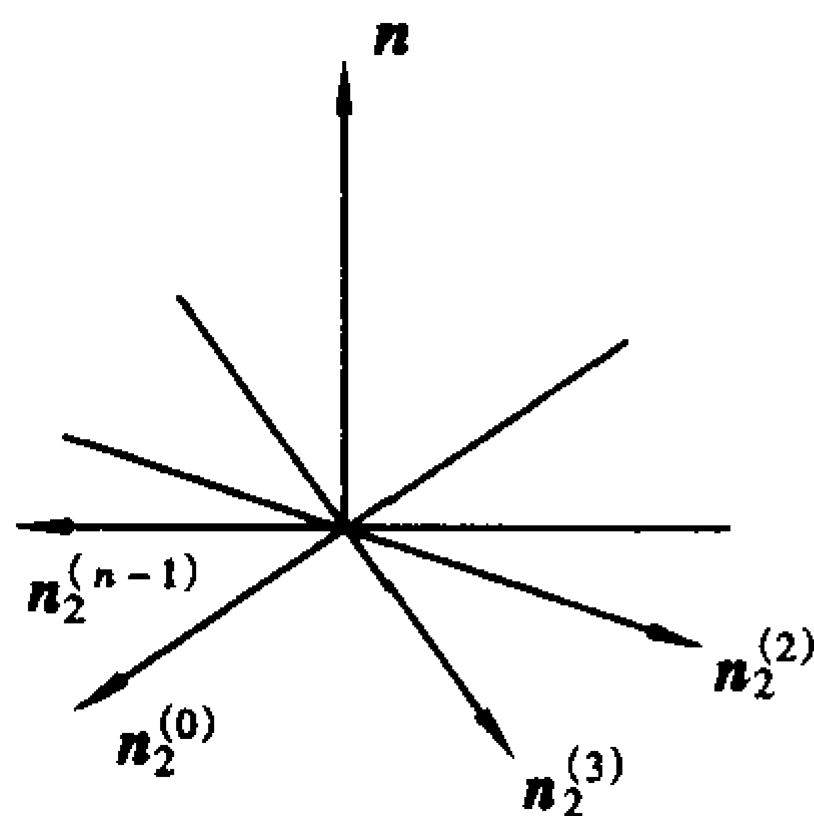


图 4.5

直于C_n轴)构成的第一类点群.其中n条C_2轴均垂直于$\boldsymbol{n}$,可表为

$$C_2 = C_n^{-1}C_2^{(j)}C_n,$$

共有$C_2^{(0)},C_2^{(2)},\cdots,C_2^{(n-1)}$,其中$C_2^{(i)}$与$C_2^{(j)}$表示任二个$C_2$轴.相邻$C_2$轴夹角为$2\pi/n$. C_n轴由于有垂直于它的n个C_2轴,应为双向轴. D_n群共$2n$个元素.

当n为奇数时,n个C_2轴构成一组彼此等价的轴,即$\{C_2^{(1)},\cdots,C^{(n)}\}\equiv n\{C_2\}$构成一个共轭类.当$n$为偶数时,则$n$个$C_2$轴分为两个共轭类.由于$\boldsymbol{n}$为双向轴,故$C_n^k$与$C_n^{-k}$ $(k=1,2,\cdots,n-1/2)$为一类.

小结:当n为奇数时,$2n$个元素构成的D_n群,其共轭类个数为$(n+3)/2$:

	$\{E\}$,	$\{C_2\}$,	$\{C_n^1,C_n^{(n-1)}\},\cdots,\{C_2^{(n-1)/2},C_2^{(n+1)/2}\}$	
元素个数	1	n	$(\frac{n-1}{2})\times 2$	总数 $=2n$
类　　数	1	1	$\frac{n-1}{2}$	总数 $=\frac{n+3}{2}$

当n为偶数时,D_n群有$(n+6)/2$个共轭类:

	$\{E\}$,	$\{C_2\}$,	$\{C'_2\}$,	$\{C_n^1,C_n^{-1}\},\cdots,\{C_2^{(n-1)/2},C_2^{(n+1)/2}\},\{C_n^{n/2}\}$
元素个数	1	$\frac{n}{2}$	$\frac{n}{2}$	$1+(\frac{n}{2}-1)\times 2=(n-2)+1=n-1$
类数	1	1	1	$(\frac{n}{2}-1)+1=\frac{n}{2}$

其中$\{C_2\}$与$\{C'_2\}$为两个不等价的二次转动.

在晶体点群中,D_n的$n=1,2,3,4,6$.

D_2群,元素为4,有2个互相垂直的C_2与C'_2轴,它们生成第三个C_2轴——C''_2,与C_2,C'_2均垂直:$C_2\perp C'_2\perp C''_2\perp C_2$,它们构成4个元素构成的阿贝尔循环群(同构于空间反射群),

$$D_2=(E,C_2,C'_2,C''_2).$$

该群有4个共轭类,即4个不等价不可约一维表示.由$g=\sum_{i=1}^{2}l_i^2$,

得 $l_1=l_2=l_3=l_4=1$.

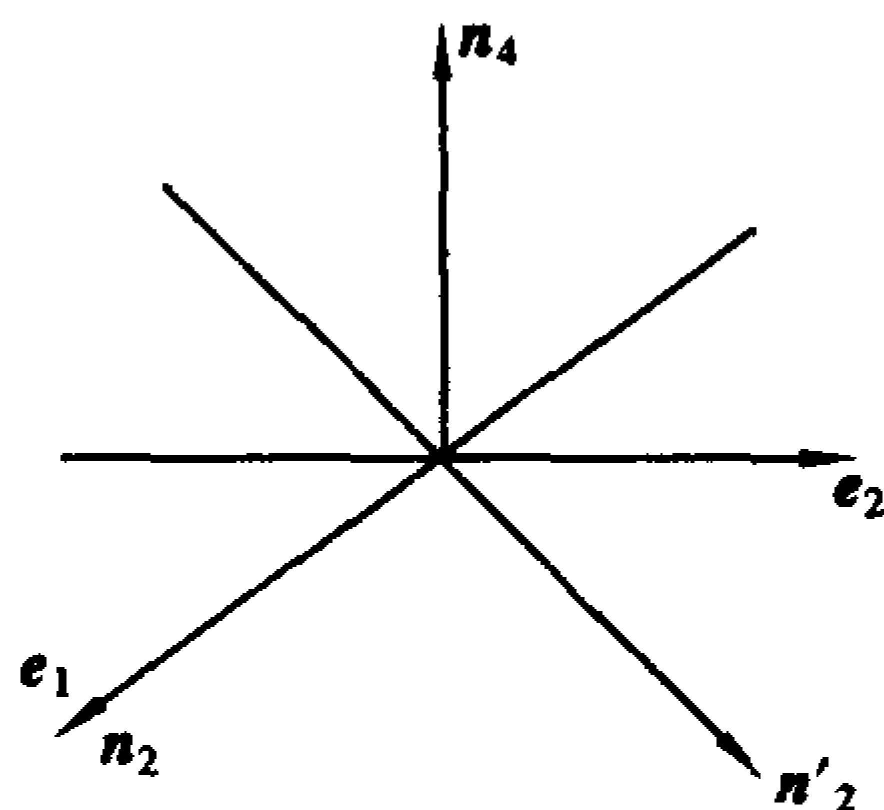


图 4.6 D_4 群转轴

D_3 群，群元素 $g=6$，类为 3. 有 $l_1=l_2=1$，$l_3=2$，此群同构于 S_3 群.

D_4 群，$g=8$，类为 5. 如图 4.6 绕主轴 $\boldsymbol{n}_4$ 转动，分两类 $\{C_4^1, C_4^3\}$ 与 $\{C_4^2\}$. 两组不等价二次轴 C_2 转动，分别构成 $\{C_2\}$ 与 $\{C_2^1\}$ 类. $\{C_2\}$ 组的转轴为 $\boldsymbol{n}_2$，即 $\boldsymbol{e}_1$ 方向，有二元素 $C_2^{(1)}$ 与 $C_2^{(2)}$.（其中 $C_2^{(2)}$ 为绕等价轴 $\boldsymbol{e}_2$ 转动 π）. $\{C_2^1\}$ 组的转轴为 $\boldsymbol{n}_2^1=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)$，包含 $C_2^{1(1)}$ 与 $C_2^{-1(2)}$. D_4 群有 4 个一维、1 个二维不等价不可约表示.

D_6 群，有 12 个元素，分 6 个共轭类：恒元；绕主轴 $\boldsymbol{n}_6$ 的转动的 3 类 $\{C_6^1, C_6^5\}$，$\{C_6^2, C_6^4\}$ $\{C_6^3\}$；两组不等价的 2 次转动 $\{C_6\}$，$\{C_6^1\}$，每组 3 个元素. 第一组 $\{C_6\}$ 的转轴 $\boldsymbol{n}(2)$ 为 $\boldsymbol{e}_1$ 方向，第 2 组转轴为 $\boldsymbol{n}'(2)=\frac{1}{2}(\sqrt{3}\,\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)$，与 $\boldsymbol{e}_1$ 成 30°角.

3. 高次轴多于 1 的点群——T、O 和 I 点群

设除 C_n 轴以外，还存在其它的高次轴与 C_n 相交于一点 O. 记 C_m 为与 C_n 轴夹角最小的高次轴. 由 $C_m^{(k)}=C_n^{-k}C_mC_n^k(k=1,2,\cdots,n)$，得到 n 个等价 C_m 轴围绕 C_n 轴，夹角相等. 以 O 为中心，任意半径的球面，联接 n 个 C_m 轴与球面的交点，则得到球面内接正 n 边形，C_n 轴则通过多边形中心. 显然在正多边形中再无其它转轴. 这个正 n 边形与 n 个等价 C_m 轴构成一个正多面体，同样在每个 C_m 轴边，也有夹角最小的 m 个等价的 C_n 轴，因此在每个 C_m 轴周围，亦可构成一个球内接正多面体，顶点就是 C_m 轴与球面的交点. 高次轴的点群正是描述这种球内接多面体对称性的点群. 实际上相应的点群只有几种.

例 1 $n=3,m=4$,构成球内接立方体.每个顶角均为 3 面($n=3$)正顶点,这 3 面中每一面都是正四边形.

一般说来,由相等的正 n 边形围成的正多面体,每个 m 面正顶角是凸顶角,则 m 个正多边形顶角的总和 ϕ 满足条件

$$\phi=\frac{m(n-2)}{n}\pi<2\pi(n,m\geqslant 3). \tag{4.17}$$

由条件(4.17),得到如下结果.

(1) 当 $n=3,m=3,\phi=\pi<2\pi$,相应正四面体描述其对称性的点群,记为 T.该群有 4 个等价 3 次轴 $C_3^{(1)}$、$C_3^{(2)}$、$C_3^{(3)}$、$C_3^{(4)}$,分别由顶点与其对面中心联线得到.它们应给出 9 个元素,$\{E,4C_3^1,4C_3^2\}$.同时 4 个 C_2 轴的联合作用,得到 3 个 C_2 轴.T 群有 12 个元素,分 4 个共轭类,有 3 个一维表示和 1 个三维不可约表示.

(2) 当 $n=4,m=3,\phi=\frac{3}{2}\pi<2\pi$,相应立方体描述的对称点群记为 O.注意联结正八面体各面心就得到正方体,两者具有相同的对称性.以立方体而论,O 群元素应为 4(每面有 E,C_4^1,C_4^2,C_4^3)$\times 6$(个面)$=24$ 个元素,群元分为 5 类:E;$4(C_3^1,C_3^2)$;$3(C_4^1,C_4^3)$;$3(C_4^2=C_2)$;$6(C_2)$,其中 C_3 轴为立方体对角线,有 4 条;C_4 轴为相对面中点的连线(或沿相邻三条棱的方向),有 3 条;C_2 轴为沿立方体侧面的对角线方向,如$\frac{1}{\sqrt{2}}(i+j)$等,有 6 条.注意,等价的四次轴转动分为两类.由 $1^2+1^2+2^2+3^2+3^2=24$,可见在 O 群的 5 个不等价不可约表示中,有 2 个一维表示,1 个二维表示和 2 个三维表示.

(3) 当 $n=3,m=4,\phi=\frac{4}{3}\pi<2\pi$,相应正八面体与正方体有完全相同的对称性.实际上,正八面体亦可视为球内接正方体,其 6 个面心联结起来,即构成正八面体的 6 个正顶角,因此能使立方体重合的对称操作也能使正八面体重合,反之亦然.结论就是正八面体相应的对称群依然是 O 群.

(4) 当 $n=5, m=3, \phi=\frac{6}{5}\pi<2\pi$，相应正五角十二面体，描述的对称点群记为 I. 群元素为 60 个，分为 5 个类：

$$E; 10(C_3^1, C_3^2); 6(C_5^1, C_5^4); 6(C_5^2, C_5^3); 15(C_2).$$

其中 10 条等价 C_3 轴，为相对顶点的连线；6 条等价 C_5 轴，为相对正五边形面心的连线；15 条等价的 C_2 轴，则是相对棱中点的连线.

由 $1^2+3^2+3^2+4^2+5^2=60$，可知在 I 群的 5 个不等价不可约表示中，有 1 个一维表示，2 个三维表示，1 个四维表示和 1 个五维表示.

(5) 当 $n=3, m=5, \phi=\frac{5}{3}\pi<2\pi$，相应于正三角二十面体. 将正五角十二面体的面心联结起来，就是正三角二十面体. 显然，描述正二十面体对称性的点群亦为 I 群.

必须强调指出，在三种正多边体点群 T、O 和 I 中，只有 O 群和 T 群才是晶体点群，原因是 I 群包含有在晶体对称性中不存在的 C_5 轴. 但在描述分子对称性，如最近发现的 C_{60} 及其衍生物中，I 群却是十分重要的.

为便于读者了解有关对称操作和对称轴的详情，现将有关多面体的几何元素归纳于表 4.1 中，将有关固有点群群结构归纳于表 4.2 中.

表 4.1　高次轴点群相应多面体的几何结构

点群符号	名　　称	表　　面	顶角数	棱边线
T	正四面体	4 个正三角形	4	6
O	立方体	6 个正方形	8	12
O	正八面体	8 个正三角形	6	12
I	正五角十二面体	12 个正五角形	20	30
I	正三角二十面体	20 个正三角形	12	30

表 4.2　第一类点群结构简表

点群符号	阶	共轭类数	包括各转轴个数				不等价不可约表示的个数					分解为循环群的直积	生成元	指数为α的不变子群
			C_2	C_3	C_4	C_6	一维	二维	三维	四维	五维			
C_1	1	1					1					C_1	C_1	
C_2	2	2	1				2					C_2	C_2	
C_3	3	3		1			3					C_3	C_3	C_1
C_4	4	4			1		4					C_4	C_4	C_2
												C_5	C_5	
C_6	6	6				1	6					C_6	C_6	C_3
D_2	4	4	3				4					C_2, C_2'	C_2, C_2'	C_2
D_3	6	3	3	1			2	1				C_3, C_2'	C_3', C_2''	C_3
D_4	8	5	4		1		4	1				C_4, C_2'	C_2', C_2''	C_4, D_2
D_6	12	6	6			1	4	2				C_6, C_2'	C_2', C_2''	C_6, D_3
T	12	4	3	4			3		1			C_3, C_2', C_2	C_3, C_2	
O	24	5	6	4	3		2	1	2			C'_3, C_4, C_2''	C'_4, C_2''	T
I*	60	5	15	10		6	1		2	1	1			

*其中 I 群不属晶体点群，表中还漏列 6 个 C_5 轴.

问　　题

1. 在直角坐标系中，表示出

(1) D_3 群所包含的所有转轴的方向.

(2) O 群各转轴的方向，并指出构成其子群 T 的转动变换.

2. 证明 T 群的所有元素都可以唯一地表示为其子群 C_3^1 和 D_2 的对应元素的乘积.

[提示：证明此类乘积中没有重复元素.]

§4.4　第二类点群

第二类点群的表示矩阵的行列式值为−1，就是包括反射元素的旋转点群. 现在基于第一类点群的结构分析，研究第二类点群的

结构与分类.

我们已经知道 $O(3)/SO(3)=C_i$(反射群)$=(E,i)$,其中 E 为恒元,i 为反射操作. $O(3)=SO(3)\otimes C_i=SO(3)\oplus iSO(3)$,其中 $SO(3)$ 即为固有(纯)转动群,i、$\{R(3)\}$ 则为 $O(3)$ 的正规子群 $SO(3)$ 的陪集,$SO(3)$ 为 $O(3)$ 的指数为 2 的正规子群,即第一类点群.

设 G 为第二类点群,将它如下分解:

$$G=H\cup iF,\quad H\cap iF=\varnothing,\tag{4.18}$$

其中集合 H 与 F 只包含正规(固有)转动.

(1) 当 $i\in G$ 时,此时第二类点群称为 I 型第二类点群.

由于 $H\subset G, F\subset G$,用 i 左乘(4.18)式,则有 $G=iH\cup F$,对比(4.18)式,可知 $H=F=SO(3)$. $G=H\otimes C_i$,其中 H 为第一类点群. 就是说,I 型第二类点群由第一类点群与反射群的直积构成,其不可约表示为第一类点群与 C_i 群不可约表示的直积.

(i) $n=$偶数 . $C_{nh}=C_n\otimes C_i, D_{nh}=D_n\otimes C_i$. 对于晶体点群 $n=2$, 4,6,下标 h 表示有垂直于偶次轴的反射面. 第二类点群的群元素是相应第一类点群的 2 倍.

(ii) $n=$奇数. $S_{2n}=G_n\otimes C_i, D_{nd}=D_n\otimes C_i$. 对于晶体点群,$n=1,3$. 其中 $n=1$,对应的 $C_{2i}\equiv S_2=\{E,i\}, D_d=\{E,\sigma\}$,这里 d 表示群中包含通过主轴(或 k 轴)的平面的反射. 这两个点群不包含主轴,称为无轴点群. 当 $n=3$ 时,$S_{23}\equiv C_{3i}=C_3\otimes C_i, D_{3d}=D_3\otimes C_i$,元素比相应第一类点群的增加一倍,即 $2n$ 个.

(iii) 第二类多面体点群,$T_h=T\otimes C_i, O_h=O\otimes C_i$,若不限于晶体群,还有 $I_h=I\otimes C_i$. T_h 群的对称性可以用图 4.7 所示立方体表示. 其中 σ_h 面平分 4 个 C_3 轴. 3 个等价的 σ_h 面都通过正方体中心,且垂直于 3 个 C_2 轴. 有 24 个群元素. O_h 群的对称性可以用图 4.8 所示立方体所表示. 注意其中 σ_d 与 σ_h 与 T_h 的异同. 此时 3 个 C_4 轴取代 T 群的 3 个 C_2 轴. T_h 群有 48 个元素.

I_h 群为晶体点群以外的点群. 以与 O_h 群相似的方法引入 σ 面,共有 120 个元素. 其不可约的最高维为五维.

图 4.7 T_h 对称性

图 4.8 O_h 对称性

(2) 当 $i \overline{\in} G$ 时，相应点群称为 p 型第二类点群. 可以证明(见问题)，其构造方法是从第一类点群 M 出发，遍取所有阶数为其一半的所有子群 H，按如下方式构造

$$G = H \cup i(M - H), \tag{4.19}$$

即可得到 p 型点群. 即是

$$S_{2n} = C_n \cup i(C_{2n} - C_n) = C_n \cup iC'_{2n}C_n, \quad n = \text{偶数},$$
$$C_{2h} = C_n \cup i(C_{2n} - C_n) = C_n \cup iC'_{2n}C_n, \quad n = \text{奇数},$$
$$C_{nv} = D_n \cup i(D_{2n} - D_n) = D_n \cup \sigma_v C_n, \quad n = 2,3,\cdots,$$
$$C_{nd} = D_n \cup i(D_{2n} - D_n) = D_n \cup iC'_{2n}D_n, \quad n = \text{偶数},$$
$$T_d = T \cup i(O - T) = T \cup iC'_4 T, \tag{4.20}$$

其中 C_{nv} 群中，反映面 $\sigma /\!/ C_n$ 轴，且通过 C_n 轴，$C_{nv} \in \sigma_v$，$C_n^k \in C_{nv} (k=1,\cdots,n-1)$. 可以证明，$C_{nv}$ 与 D_n 同构(见问题)；T_d 群的对称性可见图 4.9，其中 T 群的 4 个顶角为 a、b、c、d，4 条立方体对角线就是 C_3 轴，3 条对面中心联线就是 C_2 轴. 可以证明，T_d 群同构于 O 群. 其它符号的意义，前文均已交代清楚.

图 4.9 T_d 对称性

总之，p 型第二类点群与相应的第一类点群同构. 实际上，由前者可以构造后者，见法则(4.15)式；由后者亦可构造前者，即将第一类点群的任一指数为 2 的正规子群作为固有子群，然后将其陪集元素分别乘以 i，即得到非固有转动，由此可以得到与原来 p 型第二类点群同构的第二类点群.

问　　题

1. 证明法则(4.19)，即对开定理.

[提示：在(4.18)式中，应有 $H\cap iF=\varnothing$. 否则，$\forall\ g\in H\cap iF\Longrightarrow ig\in iF\subset G\Longrightarrow igg^{-1}=i\in G$. 设$\forall\ h_i\in H$，有 $\det\Gamma(h_i)=+1$，显见 H 为 G 的子群，其阶设为 n_h. 设$\forall\ f_\alpha,f_\beta\in F$，由 $h_i,ih_\alpha\in G\Longrightarrow h_ih_\alpha\in F$，$h_\alpha h_i\in F$. 令 h_i 遍及 H，则 $n_h\leqslant n_f$(F 集合元素个数). 又由 $if_\alpha\cdot if_\beta=f_\alpha f_\beta\in G$，且 $f_\alpha f_\beta\in H$，此式对 F 中所有元素成立$\Longrightarrow n_f\leqslant n_h$. 所以 $n_h=n_f$. 即 H 为 G 元素的一半. 设 $M=H\cup F$，由 $h_if_\alpha\in F\subset M$，$h_ih_j\subset H$ 及 $f_\alpha f_\beta\in H\subset M$，故知 M 为群，且为第一类点群，不含 i，故不同于 G. 于是 $F=M-H$.]

2. 证明 C_{nv}同构于 D_n 群.

[提示：只要有一个 σ_v 通过 C_n 轴，必有 n 个 σ_v 面通过 C_n 轴，且 C_n 轴变为双向轴$\Longrightarrow C_n^k$ 与 C_n^{-k} 同类. n 为奇数时，与 D_n 轴 C_2 轴一样，n 个 σ_v 面属于同一类. n 为偶数时，n 个 σ_v 面分为两个等价类. 于是 $C_{n\sigma}$群中 n 个 σ_v 操作与 D_n 群的 n 个 C_2 轴操作可以建立一一对应的映射，故 $C_{n\sigma}\cong D_n$. 此处$\cong$表示同构于.]

3. 证明 $S_n\cong C_{nh}$.

[提示：$S_n=C_n\sigma_h$，$n=1,2$，即无轴第二类点群. $n\geqslant 3$，由 $(S_n)^n=C_n^n\cdot\sigma_h=\sigma_h\in G$，同 $C_2^1\in G$，$C_n^k\in G\Longrightarrow S_n=C_{nh}$. $n=$偶数，σ_n 与 C'($C'=\sigma C_n^k\sigma$，等价于 C)有$(C_n^1\sigma_h)^2\in G\Longrightarrow C_n^2=C'_{n/2}\in G$，即 S_{2n}的像转轴包含了 C_n 的正规转轴. $S_n^n=C_n^n\sigma_h^n=E$，为 n 阶循环群，n 为奇数时，

$S_n^n=C_n^n\sigma_h^n=\sigma_h\neq E, S_n^{2n}=E$，为 $2n$ 阶循环群. $S_n\cong C_n\sigma_h$.]

4. 试证 $T_d\cong O$ 群.

[提示：见图 4.8，σ 面正好包含两个 C_3 轴——$C_3(a)$ 与 $C_3(b)$，且平分 $C_3(c)$ 与 $C_3(d)$. 由于其它 C_3 轴组合操作，产生另外 6 个 σ 面，分别由相对棱组成，原 C_2 轴变成 S_4 轴，C_3 轴及 3 个 S_4 轴成为双向轴，亦即一一对应.

	T_d	T
1 类	E	E
2 类	$3(C_3^1,C_3^2)$	$3(C_3^1,C_3^2)$
3 类	$3(S_4^1,S_4^3)$	$3(C_4^1,C_4^3)$
4 类	$3(S_4^2=C_4^2)$	$3(C_4^2)$
5 类	$6(\sigma_2\equiv\sigma)$	$6(C_2)$]

5. 设 G 为多面体群，利用对开定理(4.15)，构造 p 型第二类点群.

[提示：T 群与 I 群无指数为 2 的子群. O 群令 $H=T$，则 $O-T=C_4^1T$，即 $O=T\oplus C_4^1T$，第二类点群 $M=T\oplus iC_4^1T$.]

6. 设 $G=C_{2n}$，利用对开定理构造 M.

[提示：令 $H=\{E,C_{2n}^2,\cdots,C_{2n}^{2n-2}\}=C_n$，则 $G-H=C_{2n}-C_n=C_{2n}^1\cdot C_n$，故 $M=C_n\oplus iC_{2n}^1C_n$，当 $n=$偶数，$M=S_n$；$n=$奇数，$M=C_{nh}$.]

7. 设 $G=D_n$，利用对开定理构造 M.

[提示：令 $H=C_n$，则 $G=C_n\oplus iC'_2C_n\Rightarrow M=C_n\oplus iC'_nC_n=C_n\oplus\sigma_vC_n=C_{nv}$，$n=2,3,4,\cdots$，若 $G=D_{2n}$，还可令 $H=D_n$，$G=D_n\oplus C_{2n}^1D_n\Rightarrow M=D_n\oplus iC_{2n}^1D_n$. 当 $n=$偶数，$M=D_{nd}$；$n=$奇数，$M=D_n\oplus\sigma_hC_{2n}^{n+1}D_n=D_n\oplus\sigma_hD_n=D_{nh}$.]

§4.5 晶体点群

晶体的结构的平移不变性，限制只有 $n=1,2,3,4,6$ 次转轴（主轴和像转轴），结果使得晶体点群只有 32 种，分为 7 大系列.

在§4.2 节，我们知道晶格矢量可以表为

$$\boldsymbol{l}=\sum_{i=1}^{3} l_i \boldsymbol{a}_i = l_1\boldsymbol{a}_1 + l_2\boldsymbol{a}_2 + l_3\boldsymbol{a}_3,$$

晶体中任意位矢 $\boldsymbol{r}$，在形如(4.20)的所谓基本平移 $\boldsymbol{r}\rightarrow\boldsymbol{r}+\boldsymbol{l}$ 下，晶体结构具有不变性，且 $\{l_1,l_2,l_3\}$ 集合生成布拉菲点阵，$\boldsymbol{l}$ 称格矢.

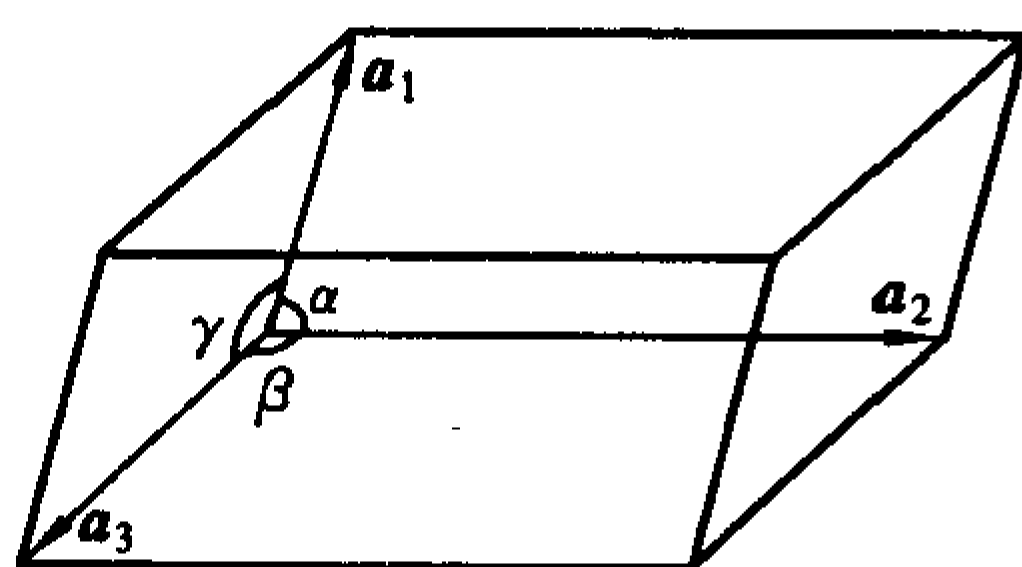


图 4.10 布拉菲格子

晶体点群是晶格的布拉菲点群的对称群，它可以描述晶格点阵的对称性，宏观对称性，但一般说来并不是晶体点阵本身的对称群.

试考虑由布拉菲格子(图 4.10)，七种晶系如下：

(1) 三斜系(Triclinic). 布氏格子中，$\boldsymbol{a}_1\neq\boldsymbol{a}_2\neq\boldsymbol{a}_3$，且 $\alpha\neq\beta\neq\gamma$. 相应点群 C_1 和 C_i 只有简单三斜系(P)一种.

(2) 单斜系(Monoclinic). $\boldsymbol{a}_1\neq\boldsymbol{a}_2\neq\boldsymbol{a}_3$，但 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$，$\beta=\gamma=\frac{\pi}{2}$，(正交). 相应点群 C_2、C_{2h}和 $C_s=\{E,\sigma\}$. 除简单单斜式(p)外，还有上、下面心有点阵，称底心单斜晶体(C).

(3) 正交系(Orthorhombic). $\boldsymbol{a}_1\neq\boldsymbol{a}_2\neq\boldsymbol{a}_3$，$\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{2}$，对应点群 $D_{2h}(8)$(这里 8 表示包含 8 个元素，下余同)、$D_2(4)$和 $C_{2v}(4)$. 正交系又包括简单正交(P)、底心正交(C)、体心正交(I)和面心正交(F)等. 对于 C_{2v}，还有侧心正交(A).

(4) 三方系(Trigonal). $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{a}_3$，且 $\alpha=\beta=\gamma=\frac{2}{3}\pi$，对应点

群 $C_3(3)$、$C_{3v}(6)$、$D_3(6)$、$D_{3h}(12)$和 $S_6(6)$. 只有简单三方(R)一种.

(5) 四方系(Tetragonal). $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{a}_2\neq\boldsymbol{a}_3$. $\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{\pi}{2}$,有简单四方(P)与体心四方(I)两种. 对应点群 $C_4(4)$、$C_{4v}(8)$、$D_4(8)$、$D_{4h}(16)$、$C_{4v}(8)$、$D_{2d}(8)$和 $S_4(4)$.

(6) 六方系(Hexagonal). $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{a}_2\neq\boldsymbol{a}_3$,且 $\alpha=\beta=\dfrac{\pi}{2}$,$\gamma=\dfrac{\pi}{3}$,对应点群 $C_6(6)$、$C_{6h}(12)$、$C_{6v}(12)$、$C_{3h}(6)$、$D_6(12)$、$D_{6h}(24)$、$D_{3d}(12)$只有简单六方(P)一种.

(7) 立方系(Cubic). $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{a}_3$,且 $\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{\pi}{2}$,对应点群 $T(12)$、$T_h(24)$、$T_d(24)$、$O(24)$和 $O_h(48)$,包括简单立方(P),体心立方(I),面心立方(F).

全部七种晶系具体结构见图 4.11,细分又有 14 类. 其中包括 32 种点群.

图中符号 P、I、A 与 F 等的含义是不同平移. 如果选择非原始晶格基矢作为基矢,如$\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}_1$,$\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}_2$ 和$\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}_3$. 此时在基矢的方向仍然是晶格的最小周期,其任何整数线性组合仍是晶格矢量,只是允许某些特殊分数组合的 $\boldsymbol{l}$ 也是晶格矢量,如 $\boldsymbol{l}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3)$,相应的平移变换记作 $\Gamma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$,这样变换构成的平移群记为 T_l. 整个平移群记为 T_L. T_l 是 T_L 的不变子群. 根据 Γ 形式,将平移群分为四种类型.

(1) P:原始平移群(primitive),

$$T_L = T_L.$$

(2) I:体心平移群(body-centered),

$$T_L = T_l\{E,\Gamma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\}.$$

(3) A、B 和 C:底心平移群(bose-centered):

$$\text{A}:T_L = T_l\{E,\Gamma_{0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\}\quad(\text{实际是侧心}),$$

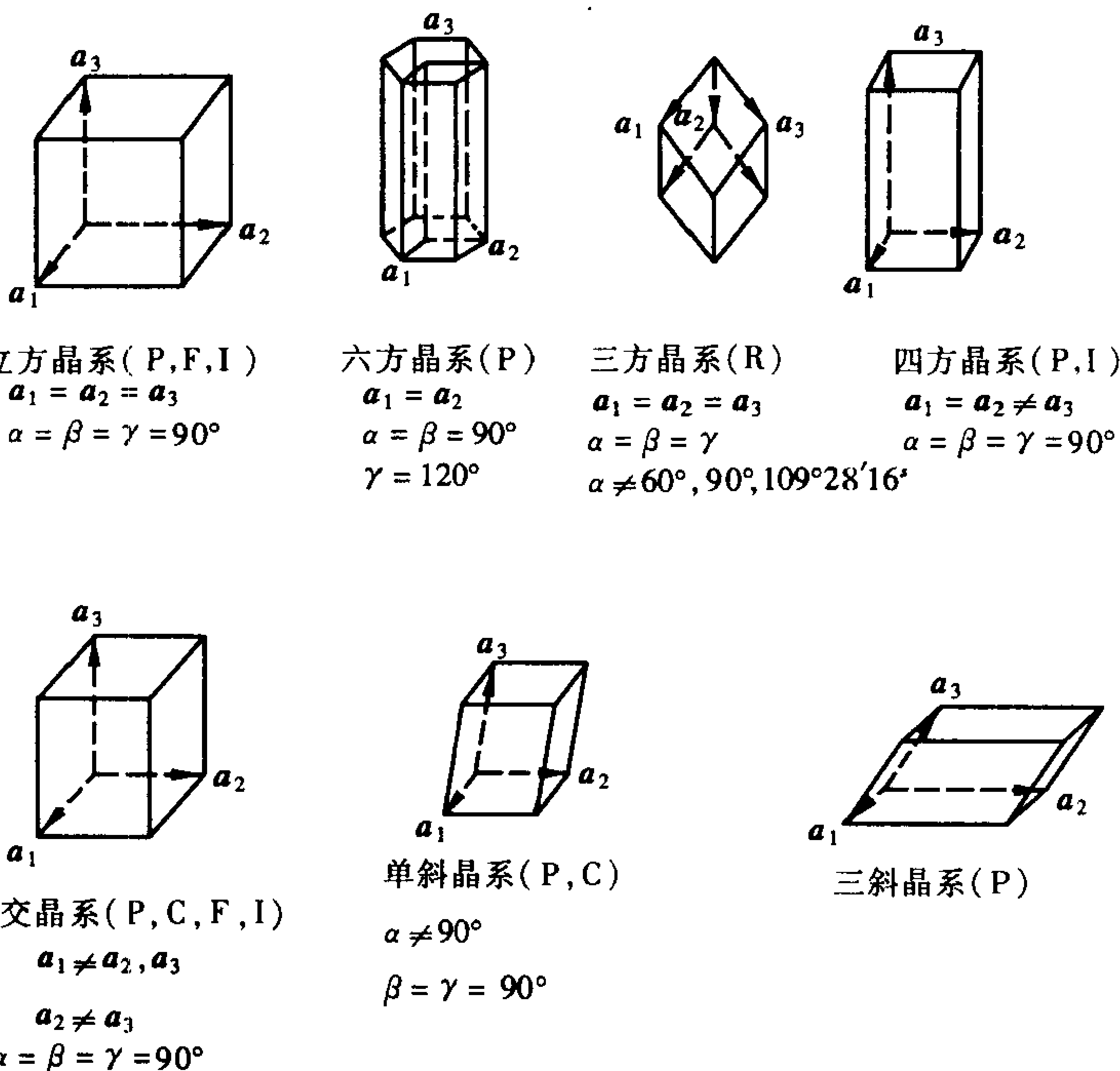


图 4.11 七种晶系结构(14 类结构未标明)

$$\mathrm{B}: T_L = T_l\{E, \Gamma_{\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}}\},$$

$$\mathrm{C}: T_L = T_l\{E, \Gamma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}\}.$$

(4) F:面心平移群(face-centered),

$$T_L = T_l\{E, \Gamma_{0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}}, \Gamma_{\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}}, \Gamma_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}\}.$$

这些平移群与晶系结合起来,形成 14 种晶格类型,或布拉菲格子. 这些平移群与相应点群配合,形成 73 种简单空间群. 所谓简单空间群系指点群是其子群的空间群. 对于一般空间群,可以证明,共有 230 种,它描述了所有可能的晶体的对称结构. 其详情可参见一

般固体物理或晶体结构的书籍.

表 4.3 列出 32 种点群的结构,图 4.11 列出了 14 种布拉非格子基矢的配置,我们可以直观了解其几何结构. 在表 4.4 中则列出 32 种点群的特征标,以备查阅.

晶体结构对称性决定晶体的物理性质,因此晶体点群、空间群有许多重要应用.

表 4.3　32 种点群结构

固有点群			非固有点群			
			P 型(不含 I)		I 型(含 I)	
点群	分解为循环群的乘积	指数为二的不变子群	点群	循环群乘积	点群	循环群乘积
C_1	C_1				C_i	C_1
C_2	C_2	C_1	C_1	C_s	C_{2h}	C_iC_2
C_3	C_3				C_{3i}	C_{3i}
C_4	C_4	C_2	S_4	S_4	C_{4h}	C_iC_4
C_6	C_6	C_3	C_{3h}	C_{3h}	C_{6h}	C_iC_6
D_2	C_2C_2'	C_2	C_{2v}	C_2C_s'	D_{2h}	$C_iC_2C_2'$
D_3	C_2C_2'	C_3	C_{3v}	C_3C_s'	D_{3d}	$C_{3i}C_2'$
D_4	C_4C_2'	C_4	C_{4v}	C_4C_s'	D_{4h}	$C_iC_4C_2'$
		D_2	$D_{2d}(V_d)$	S_4C_2'		
D_6	C_6C_2'	C_6	C_{6v}	C_6C_s'	D_{6h}	$C_iC_6C_2'$
		D_3	D_{3h}	$C_{3h}C_2'$		
T	$C_3'C_2'C_2'$				T_h	$C_{3i}'C_2C_2'$
O	$C_3'C_4'C_2''$	T	T_d	$C_3'S_4C_s''$	O_h	$C_{3i}'C_4C_2''$

表 4.4　32 种点群特征标

C_1	E
χ^1	1

C_2	E	C_2
C_i	E	I
C_s	E	σ
χ^1	1	1
χ^2	1	-1

C_3	E	C_3	C_3^2
χ^1	1	1	1
χ^2	1	ε	ε^2
χ^3	1	ε^2	ε

$\varepsilon=\exp(-2\pi i/3)$

C_4	E	C_4	C_4^2	C_4^3
S_4	E	S_4	S_4^2	S_4^3
χ^1	1	1	1	1
χ^2	1	i	-1	$-i$
χ^3	1	-1	1	-1
χ^4	1	$-i$	-1	i

C_6	E	C_6	C_6^2	C_6^3	C_6^4	C_6^5
C_{3h}	E	S_6	S_6^2	S_6^3	S_6^4	S_6^5
χ^1	1	1	1	1	1	1
χ^2	1	ω	ω^2	-1	$-\omega$	$-\omega^2$
χ^3	1	ω^2	$-\omega$	1	ω^2	$-\omega$
χ^4	1	-1	1	-1	1	-1
χ^5	1	$-\omega$	ω^2	1	$-\omega$	ω^2
χ^6	1	$-\omega^2$	$-\omega$	-1	ω^2	ω

$\omega=\exp(-i2\pi/6)$

D_2	E	C_2	C_2'	C_2''
C_{2v}	E	C_2	C_s'	C_s''
C_{2h}	E	C_2	C_s	I
χ^1	1	1	1	1
χ^2	1	-1	1	-1
χ^3	1	1	-1	-1
χ^4	1	-1	-1	1

D_3	E	$C_3(2)$	$C_2'(3)$
C_{3v}	E	$C_3(2)$	$C_s'(3)$
χ^1	1	1	1
χ^2	1	1	-1
χ^3	2	-1	0

D_4	E	C_4^2	$C_4(2)$	$C_2'(2)$	$C_2''(2)$
D_{4v}	E	C_4^2	$C_4(2)$	$C_s'(2)$	$C_s''(2)$
D_{2d}	E	S_4^2	$S_4(2)$	$C_2'(2)$	$C_s''(2)$
χ^1	1	1	1	1	1
χ^2	1	1	1	-1	-1
χ^3	1	1	-1	1	-1
χ^4	1	1	-1	-1	1
χ^6	2	-2	0	0	0

D_6	E	C_6^3	$C_6^2(2)$	$C_6(2)$	$C'_2(3)$	$C_2''(3)$
C_{6v}	E	C_6^3	$C_6^2(2)$	$C_6(2)$	$C_s'(3)$	$C_s''(3)$
D_{3h}	E	C_s	$S_6^2(2)$	$S_6(2)$	$C_2'(3)$	$C_s''(3)$
χ^1	1	1	1	1	1	1
χ^2	1	1	1	1	-1	-1
χ^3	1	-1	1	-1	1	-1
χ^4	1	-1	1	-1	-1	1
χ^5	2	2	-1	-1	0	0
χ^6	2	-2	-1	1	0	0

T	E	$C_2(3)$	$C_3(4)$	$C_3^2(4)$
χ^1	1	1	1	1
χ^2	1	1	ε	ε^2
χ^3	1	1	ε^2	ε
χ^4	3	-1	0	0

$\varepsilon=\exp(-i2\pi/3)$

O	E	$C_3(8)$	$C_4^2(3)$	$C_2''(6)$	$C_4(6)$
T_d	E	$C_3(8)$	$S_4^2(3)$	$C_2''(6)$	$S_4(6)$
χ^1	1	1	1	1	1
χ^2	1		1	-1	-1
χ^3	2	-1	2	0	0
χ^4	3	0	-1	1	-1
χ^5	3	0	-1	-1	1

例 1　证明立方晶系的介电常数为标量.

设介电常数张量为 $\varepsilon_{\alpha\beta}(\alpha,\beta=1,2,3$,即 $x,y,z)$,则一般应有

$$D_\alpha = \sum_{\beta=1}^{3}\varepsilon_{\alpha\beta}E_\beta.$$

不失一般性,选择坐标,使 $\boldsymbol{E}=E\boldsymbol{j}$(沿 y 轴),则

$$D_\alpha = \sum_{\alpha,\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}E\delta_{\beta 2} = \varepsilon_{\alpha 2}E \equiv E_{\alpha y}E(\alpha = x,y,z).$$

以 y 轴为转轴,作 C_4^1 操作:$z\rightarrow z'=x$,$x\rightarrow x'=-z$,故 $D'_x=D_z$,$D'_z=-D_x$. 由于 C_4 不变性,应有 $D'_x=D_x$,$D'_z=D_z$,由此推知

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{zy}$$

和

$$\varepsilon_{xy}=-\varepsilon_{zy}\Longrightarrow\varepsilon_{xy}=\varepsilon_{zy}=0.$$

再使外场 $\boldsymbol{E}$ 沿 z 轴和 x 轴方向作类似分析,可知

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{yx} = \varepsilon_{zx} = 0,$$

即 $\varepsilon_{\alpha\beta}$所有非对角元素为零.

取 $\boldsymbol{E}$ 沿立方体对角线(C_3 轴),则给出$\left(E_x=E_y=E_z=\frac{1}{\sqrt{3}}E\right)$

$$D_x = \frac{1}{\sqrt{3}}\varepsilon_{xx}E,\quad D_y = \frac{1}{\sqrt{3}}\varepsilon_{yy}E,\quad D_z = \frac{1}{\sqrt{3}}\varepsilon_{zz}E.$$

作 C_3^1 和 C_3^2 操作,并计及 C_3 不变性,即

$$D'_x = D_y,\quad D''_x = D_z,\quad D_x = D'_x = D''_x$$
$$\Longrightarrow D_x = D_y = D_z.$$

即是 $\varepsilon_{xx}=\varepsilon_{yy}=\varepsilon_{zz}=\varepsilon$.

例 2 求 O 群的特征标.

O 群有 24 个元素,6 个 2 次轴,4 个 3 次轴,3 个 4 次轴. O 群的 5 个类记为 I、$6C_2$、$8C_3$、$6C_4$、$3C_4$. 5 个不等价不可约表示的维数由 $\sum_{i=1}^{5} l_i^2 = 24$,得 $l_1 = l_2 = 1, l_3 = 2, l_4 = l_5 = 3$. $\{\chi_k^{(i)}\}$ 中, $\chi_k^{(i)} = l_k(k = 1,2,3,4,5)$,且 $\chi_1^{(i)}(E) = 1(i = 1,2,3,4,5)$,即特征标表第一行第一列已经算出.

注意关系,

$$C_2^2 = E \Longrightarrow [\chi_2^{(2)}(C_2)]^2 = \chi_1^{(2)}(E) = 1,$$

得

$$\chi_2^{(2)}(C_2) = \pm 1; C_3^3 = E \Longrightarrow [\chi_3^{(2)}(C_3^1)]^2 = 1 \Longrightarrow \chi_3^{(3)} = 1, e^{\pm 2\pi i/3}.$$

$$C_4^2 \cdot C_3 = C_3^1 \Longrightarrow \chi_4^{(3)}(C_4^2)\chi_3^{(2)}(C_3^1) = \chi_3^{(2)}(C_3^1)$$

$$\Longrightarrow \chi^{(2)}(C_4^2) = [\chi_4^{(2)}(C_4)]^2 = 1.$$

由于 $\sum_{k=1}^{5} \chi_k^{(1)}\chi_k^{(2)} = 0$, 有

$$\chi_3^{(2)}(C_3) = 1, \quad \chi_2^{(2)}(C_2) = -1, \quad \chi_4^{(2)}(C_4^1) = 1.$$

由于 $\sum_{k=1}^{5} \chi_k^{(1)} \cdot \chi_k^{(3)} = 0, \sum_{k=1}^{5} \chi_k^{(2)}\chi_k^{(3)} = 0$. 将两式相加、相减分别得

$$2 + 8\chi_3^{(3)}(C_3^1) + 3\chi_5^{(3)}(C_4^2) = 0,$$

$$\chi_2^{(3)}(C_2^1) + \chi_4^{(3)}(C_4^1) = 0,$$

即是

$$\chi_3^{(3)}(C_3^1) = -\frac{1}{4} - \frac{3}{8}\chi^{(3)}(C_4^2),$$

$$\chi_4^{(3)}(C_4^1) = -\chi_2^{(3)}(C_2^1).$$

代入 $(\chi^{(3)}, \chi^{(3)}) = g = 24$,经整理有

$$12[\chi_2^{(3)}(C_2)]^2 + \frac{1}{2}[1 + \frac{3}{2}\chi_4^{(3)}(C_4^2)]^2 + 3[\chi_5^{(2)}(C_4^2)]^2.$$

但由于 $C_2^2 = I, C_4^4 = I$ 得

$$\chi_2^{(3)}(C_2^1) = 0, \pm 2, \chi_5^{(2)}(C_4^2) = 0, \pm 2 \quad (\text{二维表示}).$$

又由前面方程的约束，给出 $\chi_3^{(3)}(C_2^1)=0, \chi_5^{(3)}(C_4^2)=2$. 由此又定出 $\chi_3^{(3)}(C_3^1)=-1, \chi_4^{(3)}(C_4^1)=0$.

再计算三维表示. 由 $\sum_{k=1}^{5}\chi_k^{(1)}\chi_k^{(4)}=0$, $\sum_{k=1}^{5}\chi_k^{(2)}\chi_k^{(4)}=0$, $\sum_{k=1}^{5}\chi_k^{(3)}\chi_k^{(4)}=0$，和 $\sum_{k=1}^{5}\chi_k^{(4)}\chi_k^{(4)}=g=24$，得

$$3+8\chi_3^{(4)}(C_3^1)+3\chi_5^{(4)}(C_4^2)=0,$$

$$\chi_2^{(4)}(C_2^1)+\chi_4^{(4)}(C_4^1)=0,$$

$$3-4\chi_3^{(4)}(C_3^1)+3\chi_5^{(4)}(C_4^2)=0,$$

$$9+12[\chi_2^{(4)}(C_2^1)]^2+3=24,$$

得

$$\begin{cases}\chi_3^{(4)}(C_3^1)=0,\\ \chi_5^{(4)}(C_4^2)=-1,\\ \chi_4^{(4)}(C_4^1)=-\chi_2^{(4)}(C_2^1).\end{cases}$$

因而，$\chi_2^{(4)}(C_2)=\pm1$（正好对应两个三维表示）.

表 4.5　O 群特征标表 $\chi_k^{(i)}$

类(k) 不可约表示(i)	1 $\{E\}$	2 $\{6C_2^1\}$	3 $\{8C_3^1\}$	4 $\{6C_4^1\}$	5 $\{3C_4^2\}$
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	-1	$+1$	-1	1
$\chi^{(3)}$	2	0	-1	0	2
$\chi^{(4)}$	3	-1	0	1	-1
$\chi^{(5)}$	3	1	0	-1	-1

问　　题

1. 计算群 $O_h=O\otimes C_i$ 的特征标表.

[提示：由 $\chi(O_h)=\chi(0)\chi(C_i)$，可得表 4.6.

表 4.6 群 O_h 的特征标表

类(k) / 表示(i)	1 E	2 $6C_2$	3 $8C_3$	4 $6C_4$	5 $3C_4^2$	6 i	7 $6iC_2$	8 $8iC_3$	9 $6iC_4$	10 $3iC_4^2$
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	1	1	1	1	−1	−1	−1	−1	−1
$\chi^{(3)}$	1	−1	1	−1	1	1	−1	1	−1	1
$\chi^{(4)}$	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1
$\chi^{(5)}$	2	0	−1	0	2	2	0	−1	0	2
$\chi^{(6)}$	2	0	−1	0	+2	−2	0	+1	0	−2
$\chi^{(7)}$	3	−1	0	1	−1	3	−1	0	1	−1
$\chi^{(8)}$	3	−1	0	1	−1	−3	1	0	−1	1
$\chi^{(9)}$	3	1	0	−1	−1	3	1	0	−1	−1
$\chi^{(10)}$	3	1	0	−1	−1	−3	−1	0	1	1

实际上所有第二类点群均可用此法得到.]

2. 求出 O 群的所有不等价不可约表示.

[提示:两个一维表示即例 2 所给出的特征标. 取 O 的正规子群 $N=\{I,3C_4^2\}$,其商群 O/N 的阶数$=24/4=6$,且 $O/N=\{N,C'_2N,C''_2N,C'''_2N,C_3N,C_3^2N\}$,$D_3=\{E,C_2',C_2'',C_2''',C_3,C_3^2\}$. 就是由群 O 到子群 D_3 的同态映射,$\forall\ g\in D_3$,$\forall\ gN\in O$,$gN\rightarrow g\,(4\rightarrow 1)$. 我们试由 D_3 的不可约表示,通过同态映射,构造 O 群的不可约表示. O 的生成元可取 C_3 和 C_2,其中 C_2 轴与 C_3 轴相邻. 由于 $C_2=C_4^{-2}C_2^1C_4^2$,有 O 群的二维表示 $\Gamma^{(3)}(C_2)=\Gamma^{(3)}(C_4^{-2})\Gamma^{(3)}(C_2^1)\cdot\Gamma^{(3)}(C_4^2)$. 考虑到同态映射 $\Gamma^{(3)}(C_4^2)=E=\Gamma^{(3)}(C_4^{-2})$. 但 $D_3\cong C_{3v}$,其二维表示

$$\Gamma^{(3)}(C_2^1)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad \Gamma^{(3)}(C_3^1)=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

O 群的三维表示由自然基可得. 自然表示是不可约的,取 C_2

轴为角 $O\text{-}y\text{-}z$ 平分线，C_3 轴为 $O\text{-}x\text{-}y$ 的平分线，易得

$$\Gamma^{(4)}(C_2^1)=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\quad \Gamma^{(4)}(C_3^1)=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

至于另一个三维表示，可由特征标表 $\chi^{(5)}=\chi^{(2)}\chi^{(4)}$ 得到 $\Gamma^{(5)}=\chi^{(2)}\Gamma^{(2)}$ 生成元矩阵

$$\Gamma^{(5)}(C_2^1)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix},\quad \Gamma^{(5)}(C_3^1)=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

原则上所有点群的表示均可用此法得到.]

3. 求出 O_h 群的所有不等价不可约表示.

[提示：见问题 1.].

4. 设 $\hat{u}\equiv\hat{L}^2/\hbar h$ 为哈密顿算符中与角度相关部分，有 $\hat{u}Y_{lm}(\theta,\phi)=l(l+1)Y_{lm}(\theta,\phi)$，其中 $Y_{lm}(\theta,\phi)$ 为球谐函数，$l=0,1,2,\cdots$，$m=-l,\cdots,-1,0,1,\cdots,l$. $Y_{lm}(\theta,\phi)$ 实际上为 $SO(3)$ 群不可约表示 $\{\Gamma^{(l)}(g)\}$ 的 $2l+1$ 个正交归一基矢. 请将 $\{\Gamma^{(l)}(g)\}$ 按 D_3 群约化.

[提示：在晶体场中，离子谱项分裂问题广泛碰到此类约化问题.]

$$[\Gamma^{(l)}(g_\alpha)]_{\mu\nu}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(l+1-\mu)}\cdot\delta_{\mu\nu}(\mu,\nu=1,2,\cdots,2l+1),$$

故特征标

$$\chi^{(l)}(g_\alpha)=\sum_{m=-l}^{l}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\alpha}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}l\alpha}\cdot\sum_{k=0}^{2l}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha})^k=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}l\alpha}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2l+1)\alpha}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}-1}$$

$$=\frac{\sin(l+\frac{1}{2})\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha}.$$

对于 D_3：$E\Longrightarrow\alpha=2\pi,\chi^{(l)}(2\pi)=2l+1$；

$$C_2(3)\Rightarrow\alpha=\pi,\chi^{(l)}(\pi)=\sin(\frac{\pi}{2}+l\pi)=\begin{cases}-1 & (l\text{ 为奇}),\\+1 & (l\text{ 为偶});\end{cases}$$

$$C_3(2) \Longrightarrow \alpha = \pm \frac{2}{3}\pi,$$

$$\chi^{(l)}\left(\pm \frac{2}{3}\pi\right) = \frac{\sin\left(\pm \frac{2\pi l}{3} \pm \frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\pm \frac{2}{3}\pi\right)}$$

$$= \begin{cases} l, & l = 3m, \\ 0, & l = 3m + 1, \\ -1, & l = 3m - 1. \end{cases}$$

总结这些结果，即得表 4.7. 其中 Γ_1、Γ_2 与 Γ_3 为 $\Gamma^{(l)}(g)$ 的 2 个一维表示和 1 个二维表示而 a_1、a_2 与 e 则为 D_3 的 2 个一维表示与 1 个二维表示. $\{\Gamma^{(l)}(g_a)\}$ 实际上有无穷多个不可约表示. $SO(3)$ 是连续群.

表 4.7　$SO(3)$ 群表示按 D_3 约化

表示 $\{\Gamma^{(l)}\}$ 中与 D_3 相对应类的特征标 $\chi^{(l)}(g_a)$				表示 $\{\Gamma^{(l)}\}$ 约化的结果	
l	$\{E\}$	$\{C_3(2)\}$	$\{C_2(3)\}$	$SO(3)$	D_3
0	1	1	1	Γ_1	a_1
1	3	0	-1	$\Gamma_2 \oplus \Gamma_3$	$a_2 \oplus E$
2	5	-1	1	$\Gamma_1 \oplus 2\Gamma_3$	$a_1 \oplus 2e$
3	7	1	-1	$\Gamma_1 \oplus 2\Gamma_2 \oplus 2\Gamma_3$	$a_1 \oplus 2a_1 \oplus 2e$
4	9	0	1	$2\Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \oplus 3\Gamma_3$	$2a_1 \oplus a_1 \oplus 3e$
5	11	-1	-1	$\Gamma_1 \oplus 2\Gamma_2 \oplus 4\Gamma_3$	$a_1 \oplus 2a_2 \oplus 4e$
6	13	1	1	$3\Gamma_1 \oplus 2\Gamma_2 \oplus 4\Gamma_3$	$3a_1 \oplus 2a_2 \oplus 4e$

注意，其中应用到约化公式

$$m_i = \frac{1}{g} \sum_{a=1}^{c} \chi^{(l)}(g_a) \chi^{(i)}(g_a). \,]$$

5. 设 $\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{lm}\nabla^2 - eV(r)$，其中 $V(r)$ 是球面对称势. 如果有微扰势 $\hat{H}' = -eV'$，其中 V' 具有 D_3 对称性. 求 $\hat{H}_1$ 对 H_0 的本征

态 $e=1,S$ 的能级简并度的影响.

[提示:利用上题结果,$l=1,\Gamma^{(1)}=\Gamma_2\oplus\Gamma_3$;$l=5,\Gamma^{(5)}=\Gamma_1\oplus2\Gamma_2\oplus4\Gamma_3$.]

*6. 请将 $SO(3)$的不可约表示 $\Gamma^{(l)}$按 O 群和 O_h 群约化.

[提示:先计算 O、O_h 的特征标.]

第五章　李群基础

李群是群论中极其重要的部分.李群及相应的李代数早期主要应用于原子和原子核的壳层结构，而后在基本粒子物理学中得到最广泛的应用.现代粒子物理的基本框架就是由李群给出的.夸克模型的基本对称性可以由 $SU(3)$、$SU(4)$或 $SU(6)$给出.所谓弱电统一模型则由 $SU(2)\otimes U(1)$群描述.描写强相互作用的所谓量子色动力学($Q.C.D$)则由精确 $SU(3)$对称性描写.各种大统一模型则有 $SU(5)$、$SO(10)$、$E(6)$等等理论.总之，离开李群，现代粒子物理论就无从谈起.

至于李群在其它领域，如用以研究数学中的特殊函数、处理生物光学中的视觉问题，研究液晶材料、超弹性材料、一般有序介质材料以及许多工程领域，就难以一一枚举了.

李群是一种特殊连续群，李群的概念实质上包含群代数、拓扑和微分流形的诸多要素.本书不拟采取通常数学家采用的严格公理化体系，而以应用为宗旨，以鲜明的物理图象为背景，以对李群局域性质研究为重点，尽量做到逻辑自洽、材料自足、自成体系.对于李群的整体性质的研究，力求简明、易懂.

§5.1　李 群 概 念

在一般线性群 $GL(n,\mathbf{C})$中，n 阶矩阵可以用 $2n^2$ 个实参数确定.$GL(n,\mathbf{R})$则由 n^2 个实参数确定，即 n^2 个独立参数.

例 1　$U(n)$群.n^2 个独立参数.原因是，$\forall\ A\in U(n)$，有 $A^+A=E$，相当于 n^2 个约束方程.

例 2　$SU(n)$群.在 $U(1n)$群的约束外，还加上 $\det A=+1$，故

有独立参数 n^2-1 个.

例 3 $O(n)$群. $\forall A\in O(n)$, $\widetilde{A}A=E$,给出 $n(n+1)/2$ 个约束条件,即

$$\sum(\widetilde{A}A)_{ij}=\delta_{ij}\quad(i,j=1,\cdots,n)$$

$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}\widetilde{a}_{ik}a_{kj}=\sum_{k}a_{ki}a_{kj}=\delta_{ij}.\tag{5.1}$$

当 $i\neq j$ 时,(5.1)式变为

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}a_{kj}=0\quad(i,j=1,\cdots,n,i\neq j),$$

有 $n(n-1)/2$ 个约束. 而当 $i=j$,(5.1)式变为

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}a_{ki}=1\quad(i=1,\cdots,n),$$

有 n 个约束. 因此 $O(n)$群的总约束为 $n(n+1)/2$ 个,自由参数是 $n(n-1)/2$.

例 4 $SO(n)$群. 对于 $O(n)$群, $\forall A\in O(n)$,则 $\det A=\pm1$,即 $O(n)$群的自由参数变化区域是不连通的两个区域. $\det A=+1$ 对应 $SO(n)$群. $SO(n)$与 $O(n)$的自由参数的个数均为 $n(n-1)/2$ 个,只是前者变换区域是相应 $\det A=+1$ 的连通区域,后者则在两个不连通的区域 $\det A=+1$ 与 $\det A=-1$.

例 5 群 $O(p,n-p)$(p 为小于 n 的整数). $\forall A\in O(p,n-p)$,其矩阵元定义为

$$\forall\ a_{ij},a_{ab}\in\Omega(\mathbf{R})$$

$$(i,j=1,\cdots,p,a,b=(p+1),(p+2),\cdots,n),$$

$$\forall\ a_{ia},a_{ai}\in\Omega(I)\quad(\text{纯虚数域}),\tag{5.2}$$

$$\widetilde{A}A=A\widetilde{A}=E.\tag{5.3}$$

显然, $\det A=\pm1$,且 $|\det A^{(1)}|\geqslant1$, $|\det A^{(2)}|\geqslant1$,其中 A 的矩阵元为 a_{ij},而 $A^{(2)}$的矩阵元为 a_{ab}. 设 $|\det A^{(1)}|=\pm m$, $|\det A^{(2)}|=\pm n$, $(m\geqslant1,n\geqslant1)$,则 $O(p,n-p)$分为 4 个不连通区域: (m,n)(即子群 $SO(p,n-n)$), $(m,-n)$, $(-m,n)$和$(-m,-n)$.

1. 群元素的参数化

由以上例子可见，n 阶正则矩阵构成的线性群的群元总可以用 r 个独立参数 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,r,r\leqslant 2n^2)$ 参数表示，

$$A = A(\alpha_1,\cdots,\alpha_r) \equiv A(\alpha). \tag{5.4}$$

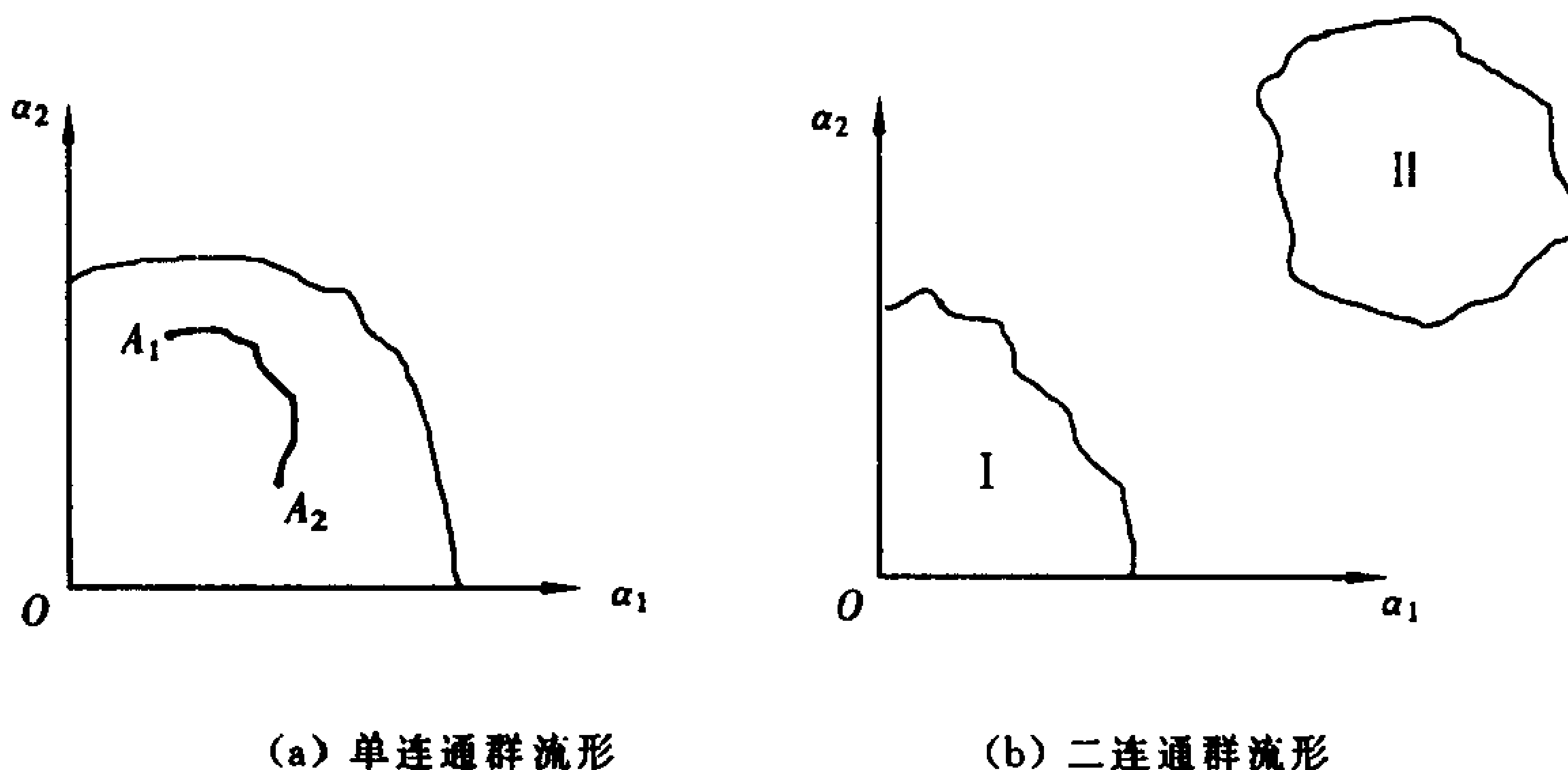
由 r 个参数确定的 r 维欧氏空间称为参数空间.

2. 参数空间和群流形

为确定起见，无妨假定当 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n$（即参数空间原点）时，$A(0,0,\cdots,0)\equiv E$（单位元，$n\times n$ 矩阵）. r 个参数的变化会产生整个群流形. 流形也可以是单连通的，如 $SO(n)$；也可以是多连通的，如 $O(n)$ 为两个连通流形（彼此不连通），$O(p,n-p)$ 为四连通的.

3. 连通性

连通性是一个拓扑概念. 所谓连通的群系指，通过参数的连续变化可以将任何两个群元素联系起来，如图 5.1(a). 由几个单连



(a) 单连通群流形　　(b) 二连通群流形

图 5.1　群参数空间(二维)与连通性

通的区域构成的群流形，其中不同连通区域的群元不能通过参数的连续变化联系起来，则称混合李群. 如图 5.1(b)，区域 I 中的群

元与区域Ⅱ中的群元无法通过群参数的连续变化彼此相连接.

4. 李群的定义

设群元素可用 r 个实参数表征,

$$A = A(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r),$$

且设单位元为 $A(0,0,\cdots,0)=E$,即有

$$A(\alpha)A(0) = A(0)A(\alpha) = A(\alpha). \tag{5.5}$$

封闭性 $\forall\ A(\alpha), A(\beta) \in G$,有

$$A(\alpha)A(\beta) = A(\gamma) \in G. \tag{5.6}$$

由(5.5)式,$\gamma=\gamma(\alpha,\beta)\equiv f(\alpha,\beta)$.

其中函数 f 表示在乘法运算中参数化的规律.应连续可微.相应于(5.6)式,有

$$EA = A \Rightarrow A(0)A(\alpha) = A(f(0,\alpha)),$$

$$AE = A \Rightarrow A(\alpha)A(0) = A(f(\alpha,0)),$$

$$f(0,\alpha) = f(\alpha,0). \tag{5.7}$$

逆元 $\forall\ A \in G, A^{-1}A = AA^{-1} = E$,即

$$A(\alpha') \Rightarrow A^{-1}(\alpha) \equiv A(\alpha') \in G,$$

$$A^{-1}A = E \Rightarrow f(\alpha',\alpha) = f(0,0),$$

$$AA^{-1} = E \Rightarrow f(\alpha,\alpha') = f(0,0),$$

$$f(\alpha,\alpha') = f(\alpha',\alpha) = f(0,0). \tag{5.8}$$

结合律 $\forall\ A(\alpha), A(\beta), A(\gamma) \in G$,有

$$A(\alpha)(A(\beta)A(\gamma)) = (A(\alpha)A(\beta))A(\gamma),$$

对应参数化条件:

$$f(\alpha, f(\beta,\gamma)) = f(f(\alpha,\beta),\gamma). \tag{5.9}$$

满足以上参数化条件(5.5)、(5.7)、(5.8)及(5.9)的连续群叫做李(Lie)群.

严格的讨论表明,$f(\alpha,\beta)$的连续可微性实质上可放松到连续就可以了.实际上所有经典群及常见的连续群,均可证明是李群.

例 6 $SO(2)$的群元(单参数)

$$A(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

封闭性:

$$A(\theta)A(\theta')=\begin{pmatrix}\cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta')\\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta')\end{pmatrix},$$
$$=A(\theta+\theta'),$$

即 $f(\theta,\theta')\equiv\theta''=\theta+\theta'$,对 θ 与 θ' 连续可微.

单位元: $f(0,\theta)=f(\theta,0)=\theta.$

此外,

逆元: $A^{-1}(\theta)\equiv A(\theta')=A(-\theta)$,有

$$f(\alpha,\alpha')=f(\alpha',\alpha)=f(0,0)\Rightarrow\theta+\theta'=\theta-\theta=0.$$

结合律: $A(\theta)[A(\theta')A(\theta'')]=[A(\theta)A(\theta')]\cdot A(\theta'')$,

$$\theta+[\theta'+\theta'']=(\theta+\theta')+\theta''.$$

例 7 $SU(n)$的群元一般表达式.

由于幺正矩阵可以通过相似变换对角化,即

$$A=X^{-1}A'X(\det X\neq 0).$$

其中 A'为对角矩阵. 由于 $\det A'=\det A=+1$,故可设 $a_{jj}=\exp(-i\varphi_j)(j=1,2,\cdots,n)$,且 $\exp[-i(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_n)]=0$,即

$$\sum_{j=1}^{n}\varphi_j=0.$$

因此,

$$A=X^{-1}\exp\left(-i\begin{pmatrix}\varphi_1 & & & \\ & \varphi_2 & & 0\\ & & \ddots & \\ & 0 & & \varphi_n\end{pmatrix}\right)X=\exp(-iH),\tag{5.10}$$

其中 H 为无迹厄米矩阵,共(n^2-1)个独立实参数,

$$H = X^{-1}\begin{pmatrix} \varphi_1 & & & \\ & \varphi_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varphi_n \end{pmatrix} X.$$

选一组无迹厄米矩阵完备基:

对称　$(T_{ab}^{(S)})_{cd} = \frac{1}{2}[\delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{bc}]$　($a \neq b$,无迹);

反对称　$(T_{ab}^{(A)})_{cd} = -\frac{1}{2}[\delta_{ac}\delta_{bd} - \delta_{ad}\delta_{bc}]$,

$$(T_a^{(3)})_{bc} = \begin{cases} \delta_{bc}[2a(a-1)]^{-1/2} & (b<a), \\ -\delta_{bc}[(a-1)/(2a)]^{1/2} & (b=a, a=2,\cdots,n), \\ 0 & (b>a). \end{cases} \tag{5.11}$$

(5.11)式包括$\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}+(n-1)=n^2-1$ 个线性独立的无迹 $n\times n$ 矩阵,显然构成一组完备基.展开

$$H_{ab} = \sum_{a<b}(\omega_{ab}^{(S)}T_{ab}^{(S)} + \omega_{ab}^{(A)}T_{ab}^{(A)}) + \sum_{a=2}^{n}\omega_a^{(3)}T_a^{(3)}. \tag{5.12}$$

当 $n=2$ 时,

$$T_{12}^{(S)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{\sigma_1}{2}, \quad T_{12}^{(A)} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{\sigma_2}{2},$$

$$T_2^{(3)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{\sigma_3}{2},$$

其中 $\sigma_i (i=1,2,3)$是泡利矩阵.

当 $n=3$ 时,重新编号,

$$T_{12}^{(S)} \equiv \Gamma_1, \quad T_{12}^{(A)} \equiv \Gamma_2, \quad T_2^{(S)} \equiv \Gamma_3, \quad T_{13}^{(S)} \equiv \Gamma_4,$$

$$T_{13}^{(A)} \equiv \Gamma_5, \quad T_{23}^{(S)} \equiv \Gamma_6, \quad T_{23}^{(A)} \equiv \Gamma_7, \quad T_2^{(3)} \equiv \Gamma_8,$$

它们称为盖尔曼(GellMann)矩阵,其中

$$\Gamma_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \Gamma_2=\begin{pmatrix}0&-\mathrm{i}&0\\\mathrm{i}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \Gamma_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\Gamma_4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad \Gamma_5=\begin{pmatrix}0&0&-\mathrm{i}\\0&0&0\\\mathrm{i}&0&0\end{pmatrix},\quad \Gamma_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},$$

$$\Gamma_7=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-\mathrm{i}\\0&\mathrm{i}&0\end{pmatrix},\quad \Gamma_8=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}. \tag{5.13}$$

问　题

1. 证明直线上的所有平移变换构成单参数的李群 $T(1)$.

2. 证明一般复相因子 $e^{i\alpha}$,当 $\alpha\in\Omega(\mathbf{R})$,在普通数乘下,构成单参数李群 $U(\alpha)$.

3. 验证所有盖尔曼矩阵(5.13),满足正交归一条件:

$$\mathrm{Tr}[\Gamma_a\Gamma_b]=\frac{1}{2}\delta_{ab}\quad(a,b=1,2,\cdots,8).$$

4. 对于 $SO(n)$ 群,亦可采用例 1 所示方法将 $\forall\ A\in SO(n)$ 表示为

$$A=\exp[-\mathrm{i}\sum_{a<b}\omega_{ab}T_{ab}],\quad T_{ab}\equiv 2T_{ab}^{(A)}. \tag{5.14}$$

[提示:设($\det X\neq 0$),

$$A'=X^{-1}AX=\begin{pmatrix}e^{i\varphi_1}&&&&&\\&e^{-i\varphi_2}&&&&\\&&\ddots&&&\\&&&1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&1\end{pmatrix}$$

$$= \exp\left(\mathrm{i} \begin{pmatrix} \varphi_1 & & & & & \\ & -\varphi_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \right),$$

其中利用性质：正交矩阵复本征值 $\exp(\pm \mathrm{i}\varphi)$ 两两成对出现；本征矢的复共轭亦为本征矢. 令 $A = \exp(\mathrm{i}H)$，则 $H = X \begin{pmatrix} \varphi_1 & & & \\ & \varphi_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} X^{-1}$ 为无迹厄米矩阵，且矩阵为纯虚的，故为反对称的.]

§5.2 李群的无穷小群生成元及其局域性质

李群的单位元的邻域称为无穷小群. 我们从无穷小群着手研究李群的局域性质. 在邻域中的每一点都代表一个群元素. 设邻域 I 中有 $\forall\ A(\alpha), A(\beta) \in G$，且 $A(\alpha)A(\beta) \in$ 邻域 I. 现研究 I 中群结构.

1. 无穷小群生成元

设 $\forall\ A(\alpha), A(\beta) \in I$，且 $|\alpha| \ll 1$. 对 $A(\alpha)$、$A(\beta)$ 作泰勒展开，保留线性项，

$$\begin{cases} A(\alpha) = A(0) + \sum_{\mu=1}^{r} \alpha_\mu X_\mu + \cdots \\ A(\beta) = A(0) + \sum_{\mu=1}^{r} \beta_\mu X_\mu + \cdots \end{cases} \tag{5.15}$$

其中 $X_\mu=\left(\dfrac{\partial A(\alpha)}{\partial\alpha_\mu}\right)_{\alpha=0}$ $(\mu=1,2,\cdots,r)$称为李群 G 的无穷小群生成元，亦为 $n\times n$ 矩阵. 一般 r 维李群有 r 个无穷小群生成元. 当然，由于确定群元的参数化条件有不同方式，X_μ 的具体表达式因此有所不同. 但总的个数是不变的.

利用$\{X_\mu\}$可以将逆元 $A^{-1}(\alpha)$ 表为

$$A^{-1}(\alpha)=A(0)-\sum_{\mu=1}^{r}\alpha_\mu X_\mu+O(\alpha^2).$$

事实上，

$$A(\alpha)A^{-1}(\alpha)=A(0)+O(\alpha^2)=A(0). \tag{5.16}$$

2. 交换子积与结构常数

交换子积 $A^{-1}(\alpha),A^{-1}(\beta),A(\alpha)A(\beta)\in G$. 联立(5.15)和(5.16)两式，略去二阶项，有

$$\begin{aligned}
&[A(0)-\sum_\mu\alpha_\mu X_\mu][A(0)-\sum_\nu\beta_\nu X_\nu][A(0)+\sum\alpha_\rho X_\rho]\\
&\quad\cdot[A(0)+\sum\beta_\sigma X_\sigma]=A(0)+\sum_{\mu,\nu}\alpha_\mu\beta_\nu X_\mu X_\nu\\
&\quad+\sum_{\rho,\sigma}\alpha_\rho\beta_\sigma X_\rho X_\sigma-\sum_{\mu,\rho}\alpha_\mu\alpha_\rho X_\mu X_\rho-\sum_{\mu,\sigma}\alpha_\mu\beta_\sigma X_\mu X_\sigma\\
&\quad-\sum_{\nu,\rho}\beta_\nu\alpha_\rho X_\nu X_\rho-\sum_\nu\beta_\nu\beta_\sigma X_\nu X_\sigma+O(\alpha^3)\\
&=A(0)+\sum_{\mu,\nu}\alpha_\mu\beta_\nu[X_\mu,X_\nu],
\end{aligned}\tag{5.17}$$

但设 $A(\gamma)\in G$，且属于邻域 I. 则 $A(\gamma)$展开为

$$A(\gamma)=A(0)+\sum_0\gamma_\rho X_\rho. \tag{5.18}$$

其中对易于$[X_\mu,X_\nu]\equiv X_\mu X_\nu-X_\nu X_\mu$. 对比(5.17)与(5.18)式，

$$\sum_{\mu,\nu}\alpha_\mu\beta_\nu[X_\mu,X_\nu]=\sum_\rho\gamma_\rho X_\rho,$$

即是

$$[X_\mu,X_\nu]=C_{\mu\nu}^\rho X_\rho\quad(\mu,\nu,\rho=1,\cdots,r), \tag{5.19}$$

$$\gamma_\rho = \sum_{\mu,\nu} \alpha_\mu \beta_\nu \cdot C^\rho_{\mu\nu} \quad (\mu,\nu,\rho = 1,\cdots,r). \qquad (5.20)$$

(5.19)式表明，集合$\{X_\mu\}$在对易运算下具有封闭性. $C^\rho_{\mu\nu}(\mu,\nu,\rho=1,\cdots,r)$共$r^3$个，称为结构常数. 尤其是，如所有$C^\rho_{\mu\nu}$均为0，则交换子群在邻域$I$上为零，这表明在邻域$I$上参数空间是平直的，例如阿贝尔群.

结构常数由对易子确定，实际上取决于群元的交换子积. 我们将证明，结构常数与群参数无关，它反映李群单位元邻域的(局域)群结构，或群流形的几何结构.

3. 有限群元的生成

实质上，对易子或结构常数也刻画与单位元相连的群流形的一叶的群结构，因为任何有限群元亦可由无穷小生成元所生成.

令$\delta\alpha_\rho=\alpha_\rho/N$，当$N\to\infty$时，则

$$A(\delta\alpha_1,\delta\alpha_2,\cdots,\delta\alpha_r) \equiv A(\delta\alpha) \in I.$$

对$A(\delta\alpha)$作泰勒展开，

$$A(\delta\alpha) = A(0) + \sum_{\rho=1}^{r} \delta\alpha_\rho X_\rho + O(\alpha^2)$$

$$= A(0) + \sum_{\rho}^{\rho=1} \frac{\alpha_\rho}{N} X_\rho + O(\alpha^2).$$

注意到，

$$A(\delta\alpha)A(\delta\alpha) = A(0) + 2\delta\alpha X = A(2\delta\alpha),$$

$$\underbrace{A(\delta\alpha)\cdots A(\delta\alpha)}_{N} = [A(0) + \sum \delta\alpha_\rho X_\rho]^N$$

$$= A(N\delta\alpha) = A(\alpha),$$

亦即

$$A(\alpha) = \lim_{N\to\infty} (E + \sum_{\rho=1}^{r} \frac{\alpha_\rho}{N} X_\rho)^N = \exp \sum_{\rho=1}^{r} \alpha_\rho X_\rho. \qquad (5.21)$$

就是说，李群的有限群元的生成就是生成元的指数化过程.

例1 $SO(2)$群. $r=1$.

$$A(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},$$

生成元

$$X_\theta=\left(\frac{\partial A(\theta)}{\partial\theta}\right)_{\theta=0}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

请由(5.21)式验证 $A(\theta)$ 的表达式.

由(5.21)式，$SO(2)$ 的有限群元

$$\begin{aligned}A(\theta)&=e^{\theta X_\theta}=A(0)+\theta X+\frac{1}{2!}\theta^2X^2+\cdots\\&=E\left[\frac{1}{2!}\theta^2X^2+\frac{1}{4!}\theta^4X^4+\cdots\right]+X\left[\theta+\frac{X^2}{3!}\theta^3+\cdots\right].\end{aligned}\tag{5.22}$$

但是，

$$X^2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-E,\quad X^3=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=-X,$$

$$X^4=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E,$$

代入(5.22)式，得

$$\begin{aligned}A(\theta)&=E\left[1-\frac{1}{2!}\theta^2+\frac{1}{4!}\theta^4-\frac{1}{6!}\theta^6+\cdots\right]\\&\quad+X\left[\theta-\frac{1}{3!}\theta^3+\frac{1}{5!}\theta^5-\cdots\right]\\&=E\cos\theta+X\sin\theta\\&=\begin{pmatrix}\cos\theta & 0\\ 0 & \cos\theta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -\sin\theta\\ \sin\theta & 0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

例 2　$SO(3)$ 的生成元. $r=\dfrac{3\times 2}{2}=3$.

参数化:绕 X 轴转动 α_1，绕 Y 轴转动 α_2 角、绕 Z 轴转动 α_3 角

的操作元素可分别写作

$$A(\alpha_1)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},$$

$$A(\alpha_2)=\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix},$$

$$A(\alpha_3)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

则 $A\in SO(3)$，可以表示为

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=A(\alpha_1)\cdot A(\alpha_2)\cdot A(\alpha_3)$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\alpha_2\cos\alpha_3 & \sin\alpha_1\sin\alpha_2\cos\alpha_3-\cos\alpha_1\cos\alpha_3 & \cos\alpha_1\sin\alpha_2\cos\alpha_3+\sin\alpha_1\sin\alpha_3\\ \cos\alpha_2\sin\alpha_3 & \cos\alpha_1\cos\alpha_3+\sin\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3 & \cos\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3-\sin\alpha_2\cos\alpha_3\\ -\sin\alpha_2 & \sin\alpha_1\cos\alpha_2 & \cos\alpha_1\cos\alpha_2\end{pmatrix},$$

其中 $-\pi\leqslant\alpha_1\leqslant\pi$，$-\pi\leqslant\alpha_2\leqslant\pi$，$-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha_3\leqslant\frac{\pi}{2}$. 此处参数未选择通常的欧拉(Euler)角，是为了避免在单位元处出现奇异性. 无穷小生成元是

$$X_{\alpha_1}=\left(\frac{\partial A(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)}{\partial\alpha_1}\right)_{\alpha=0}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},$$

$$X_{\alpha_2}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad X_{\alpha_3}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{5.23}$$

问　　题

1. 试求$SO(3)$的3个无穷小生成元(5.23)式所确定的结构常数.

[答案:$C_{\mu\nu}^{\rho}=\varepsilon_{\mu\nu\rho}$, $\mu,\nu,\rho=1,2,3$, $\varepsilon_{\mu\nu\rho}$即通常全反对称张量,

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho}=\begin{cases}+1 & (\mu,\nu,\rho\text{ 为 }1,2,3\text{ 偶置换}),\\ -1 & (\mu,\nu,\rho\text{ 为 }1,2,3\text{ 奇置换}),\\ 0 & (\mu,\nu,\rho\text{ 至少有 }2\text{ 个重复}).\end{cases}$$]

2. 证明群$SU(n)$的无穷小生成元是零迹反厄米矩阵.

[提示:设$\forall\ A\in SU(n)$,在邻域I中,$A(\alpha)=A(0)+\sum_{\rho=1}^{r}\alpha_\rho X_\rho$. 由条件$AA^+=E$,和$\det A=+1$,有

$$(A(0)+\sum\alpha_\rho X_\rho)(A(0)+\sum_\sigma\alpha_\sigma X_\sigma^+)=E,$$

$$X_\rho=-X_\rho^+\quad(\rho=1,2,\cdots,r,\text{反厄米性}),$$

和

$$\det(e^{\Sigma\alpha_\rho X_\rho})=\exp[\mathrm{Tr}(\sum_\rho\alpha_\rho X_\rho)]=1,$$

$$\mathrm{Tr}\Big[\sum_\rho\alpha_\rho X_\rho\Big]=0\Rightarrow\mathrm{Tr}(X_\rho)=0,\quad(\rho=1,2,\cdots,r),$$

无迹.]

3. 证明$SO(n)$群的无穷小生成元是n阶实反对称矩阵.

[提示:注意条件$A\tilde{A}=E$. 其它步骤类似于上题. 尤其注意利用公式$\det(e^A)=\exp(\mathrm{Tr}A)$.]

4. 对于$SO(3)$群,其正则(伴随)表示的生成元定义为$(T_a^{\mathrm{reg}})_{bc}=C_{ab}^c=\varepsilon_{abc}(a,b,c=1,2,3)$,则可验证:

(1) $T_a^{\mathrm{reg}}=X_a(a=1,2,3)$,见(5.23)式.

(2) $\mathrm{Tr}(T_a,T_b)=2\delta_{ab}$.

(3) $\sum_{a=1}^{3}(T_a)^2=2E$.

§5.3 变换群及无穷小算子

以上对李群的讨论，实际上针对抽象李群，当然也适用于正则线性矩阵群. 但是，矩阵群中元素，从线性空间来说，代表一个线性变换. 整个矩阵群，相当于一个线性变换群. 本节联系其作用对象，讨论 n 维空间线性变换群. 其结果与实际问题联系更紧密.

设 G 为 r 秩李群，L_n 为 n 维线性空间. 令$\forall\ A(\alpha)\in G$，设 $x', x \in G$，且

$$x' = A(\alpha)x. \tag{5.24}$$

将 n 维矢量 x' 与 x 用狄拉克符号表示：

$$x' \equiv |x'\rangle = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \equiv |x\rangle. \tag{5.25}$$

其分量表为

$$x'_i = f_i(x, \alpha) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{5.26}$$

变换(5.24)在 L_n 中会引起其中连续可微的函数 $F(x)$ 的相应变化

$$F(x) \longrightarrow F'(x') = S_\alpha F(x'), \tag{5.27}$$

S_α 为相应于群元 $A(\alpha)$ 的函数变换算子. 不难证明集合 $\{S_\alpha\}$ 是群 G 的一个线性表示. 称为变换李群(见问题 1).

1. 变换李群的无穷小算子

由(5.27)式，并计及在 L_n 中同一点的函数值相等，得

$$F(x) = S_\alpha F(x') = F(A^{-1}x'). \tag{5.28}$$

设由于 $\delta\alpha(A(\delta\alpha))$ 引起矢量 x 的无穷小变换为 $\mathrm{d}x$，则函数 $F(x)$ 被诱导发生无穷小变化为

$$\mathrm{d}F(x) = \sum_i \frac{\partial F(x)}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i. \tag{5.29}$$

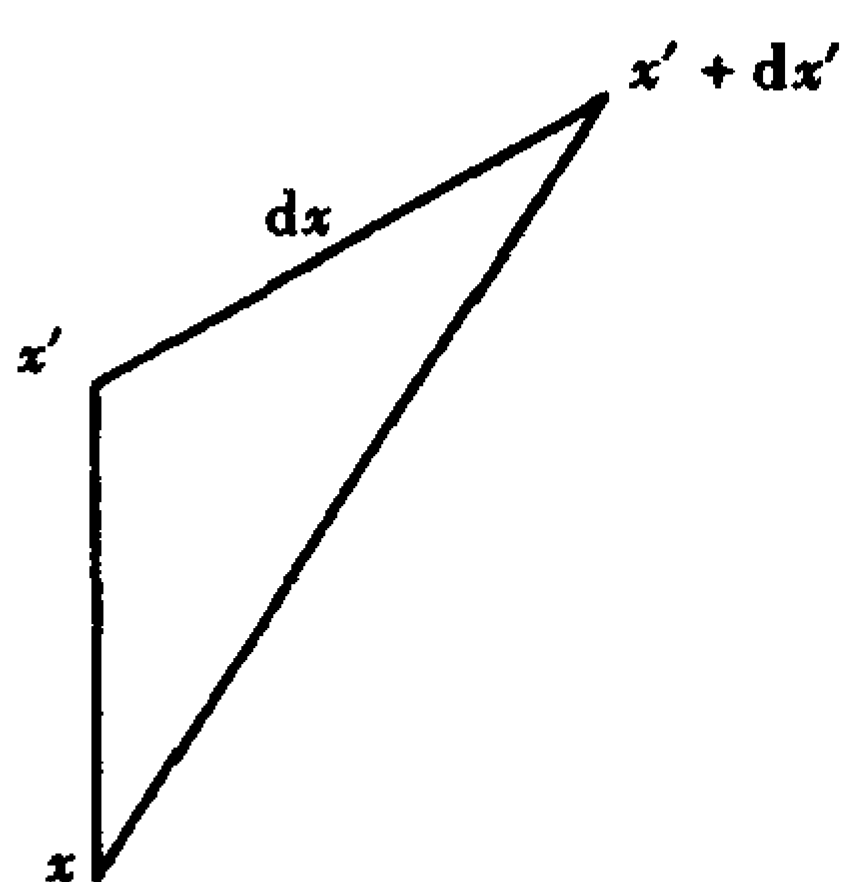


图 5.2 L_n 中矢量的变化

关键在于 $\delta\alpha_\mu^i$ 与 $\mathrm{d}x_i$ 之间的关系. 为此考虑从 x 到 $x'+\mathrm{d}x'$的两种变换途径(见图 5.2).

由(5.24)和(5.26)式,应有

$$x' + \mathrm{d}x' = A(\alpha + \mathrm{d}\alpha)x, \tag{5.30}$$

或表为分量式

$$x'_i + \mathrm{d}x'_i = f_i(x, \alpha + \mathrm{d}\alpha). \tag{5.31}$$

另一个途径是,由 x 先到 x',再到 $x'+\mathrm{d}x'$,

$$A(\delta\alpha)A(\alpha)x = A(\delta x)x' = x' + \mathrm{d}x', \tag{5.32}$$

或表为分量形式,

$$x'_i + \mathrm{d}x'_i = f_i(x', \delta\alpha) \quad (i = 1, 2, \cdots, r). \tag{5.33}$$

对此式作泰勒展开,

$$\begin{aligned} f_i(x', \delta\alpha) &= f_i(x', 0) + \sum_\mu \left[\frac{\partial f_i(x', \alpha)}{\partial \alpha_\mu}\right]_{\alpha=0} \delta\alpha_\mu + O(\alpha^2) \\ &\equiv f_i(x', 0) + \sum_\mu U_{i\mu}(x')\delta\alpha_\mu + O(\alpha^2), \end{aligned} \tag{5.34}$$

其中 $U_{i\mu}(x') \equiv \left[\frac{\partial f_i(x', \alpha)}{\partial \alpha_\mu}\right]$. 即是

$$\mathrm{d}x'_i = \sum_\mu U_{i\mu}(x')\delta\alpha_\mu,$$

或改写为

$$\mathrm{d}x_i = \sum_\mu U_{i\mu}(x)\delta\alpha_\mu. \tag{5.35}$$

将(5.35)式代入(5.29)式,有

$$\begin{aligned} \mathrm{d}F(x) &= \sum_i \frac{\partial F(x)}{\partial x_i} \sum_\mu U_{i\mu}(x)\delta\alpha_\mu \\ &\equiv \sum_\mu \delta\alpha_\mu X^{(\mu)} F(x), \end{aligned} \tag{5.36}$$

其中 $X^{(\mu)}\equiv\sum_i U_{i\mu}(x)\dfrac{\partial}{\partial x_i}(\mu=1,2,\cdots,r)$，叫做李群的无穷小算子，其数目为 r，实际上就是与 G 同构的变换李群 $\{S_a\}$ 的生成元. 因此，无穷小算子决定 $\{S_a\}$ 的局域群结构，相应的结构常数与相应李群的理应一致.

例 1 $SO(3)$群.

对于 $SO(n)$，其元素 $\tilde{A}A=E$. 对于无穷小转动 $A=E+\varepsilon$，有

$$\tilde{A}A=E+\tilde{\varepsilon}+\varepsilon+O(\varepsilon^2),$$

即
$$\varepsilon+\tilde{\varepsilon}=0\Rightarrow\varepsilon=-\tilde{\varepsilon}\quad(\text{反对称矩阵}).$$

其独立分量个数 $r=n(n-1)/2$. 对于 $SO(3)$，$r=3$，令

$$\varepsilon=\begin{pmatrix}0 & a & -b\\ -a & 0 & c\\ b & -c & 0\end{pmatrix}.$$

由 $x'=x+\mathrm{d}x$，即

$$x'=\begin{pmatrix}x'_1\\ x'_2\\ x'_3\end{pmatrix}=A(\alpha)x=(E+\varepsilon)x=\begin{pmatrix}1 & a & -b\\ -a & 1 & c\\ b & -c & 1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}.$$

得$(\alpha_1=a,\alpha_2=b,\alpha_3=c)$，

$$\begin{cases}f_1=\mathrm{d}x_1=ax_2-bx_3,\\ f_2=\mathrm{d}x_2=-ax_1+cx_3,\\ f_3=\mathrm{d}x_3=bx_1-cx_2,\end{cases}\tag{5.37}$$

故 $SO(3)$的无穷小算子，由(5.37)和定义

$$\begin{cases}X^{(1)}=\sum_{i=1}^{3}U_{i1}\dfrac{\partial}{\partial x_i}=\left[\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial c}\right)_{a=0}\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right.\\ \qquad\left.+\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial b}\right)_{a=0}\dfrac{\partial}{\partial x_2}+\left(\dfrac{\partial f_3}{\partial c}\right)_{a=0}\dfrac{\partial}{\partial x_3}\right]=x_3\dfrac{\partial}{\partial x_2}-x_2\dfrac{\partial}{\partial x_3},\\ X^{(2)}=\sum_{i=1}^{3}U_{i2}\dfrac{\partial}{\partial x_i}=\sum_i\left(\dfrac{\partial f_c}{\partial b}\right)_{a=0}\dfrac{\partial}{\partial x_i}=x_1\dfrac{\partial}{\partial x_3}-x_3\dfrac{\partial}{\partial x_1},\\ X^{(3)}=\sum_{i=1}^{3}U_{i3}\dfrac{\partial}{\partial x_i}=\sum_{i=1}^{3}\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial a}\right)_{a=0}\dfrac{\partial}{\partial x_i}=x_2\dfrac{\partial}{\partial x_3}-x_3\dfrac{\partial}{\partial x_2}.\end{cases}\tag{5.38}$$

显然，

$$(X^{(i)}, X^{(j)}) = \varepsilon_{ijk} X^{(k)}, \tag{5.39}$$

其中 $\varepsilon_{ijk} \equiv C_{ij}^k$，即是相应李群生成元的结构常数. 如令 $J_i = \mathrm{i}X^{(i)}$ ($i = 1,2,3$)，则集合 $\{J_i\}$ 就是量子力学中角动量算符.

2. 有限变换

由(5.36)式，

$$F'(x) = F(x) + \mathrm{d}F(x) = (E + \sum \delta\alpha_\mu X^{(\mu)}) F(x),$$

$$F(x) \equiv S_\mu F(x),$$

这里
$$S_\mu = E + \sum_\mu \delta\alpha_\mu X^{(\mu)}. \tag{5.40}$$

现根据(5.39)式，得到由与单位元连通的李群部分对应的函数有限变化. 令 $\delta\alpha_\mu = \dfrac{\alpha_\mu}{N}$，则

$$F^{(1)} \equiv \left(E + \sum_\mu \delta\alpha_\mu X^{(\mu)}\right) F(x)$$

$$F^{(2)} \equiv \left(E + \sum_\mu \delta\alpha_\mu X^{(\mu)}\right)^2 F(x),$$

……

$$F^{(N)} \equiv \left(E + \sum_\mu \delta\alpha_\mu X^{(\mu)}\right)^N F(x),$$

即是当 $N \to \infty$ 时，相应有限变化，

$$\begin{aligned} F(x) &= \lim_{N\to\infty} S_\alpha^N F(x) = \lim_{N\to\infty}\left(E + \sum_\mu \frac{\alpha_\mu}{N} X^{(\mu)}\right)^N F(x) \\ &= \exp\left(\sum_\mu \alpha_\mu X^{(\mu)}\right) F(x), \end{aligned} \tag{5.41}$$

其中，指数因子 $\exp(\sum \alpha_\mu X^{(\mu)})$ 叫有限变化算子.

例 2 $SO(2), r=1, n=2$.

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + \mathrm{d}x_1 \\ x_2 + \mathrm{d}x_2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ -\varepsilon & 0 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

即
$$f_1 = \varepsilon x_2, \quad f_2 = -\varepsilon x_1,$$

$$X^{(i)} = \sum_{i=1}^{2}\left[\frac{\partial f_i}{\partial \varepsilon}\right]_{\varepsilon=0}\frac{\partial}{\partial x_i} = x_2\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

有限变化算子(这里参数 ε 实质上转角)$e^{\varepsilon X^{(1)}}$.

例 3 试证明在李群 G 的参数空间(r 维)中单位元邻域中的群元素可由 F 列无穷小生成元生成(其中 a_ρ 为群参数,$\rho=1,2,\cdots,r$):

$$X_\beta^{(\beta)} = V_{\beta\rho}(a)\frac{\partial}{\partial a_\rho} \equiv \left(\frac{\partial \Phi_\rho(a,b)}{\partial b_\beta}\right)_{b=0}\frac{\partial}{\partial a_\rho}$$

$$(a = (a_1,a_2,\cdots,a_r)), \tag{5.42}$$

其中 $\Phi_i(a,\delta\alpha)\equiv a_i+\mathrm{d}a_i$ 为群参数空间的变换函数(见图 5.3).此时参数空间为 r 维线性空间.群元素 $A(\alpha)$相当于 n 维线性空间的函数 $F(x)$.

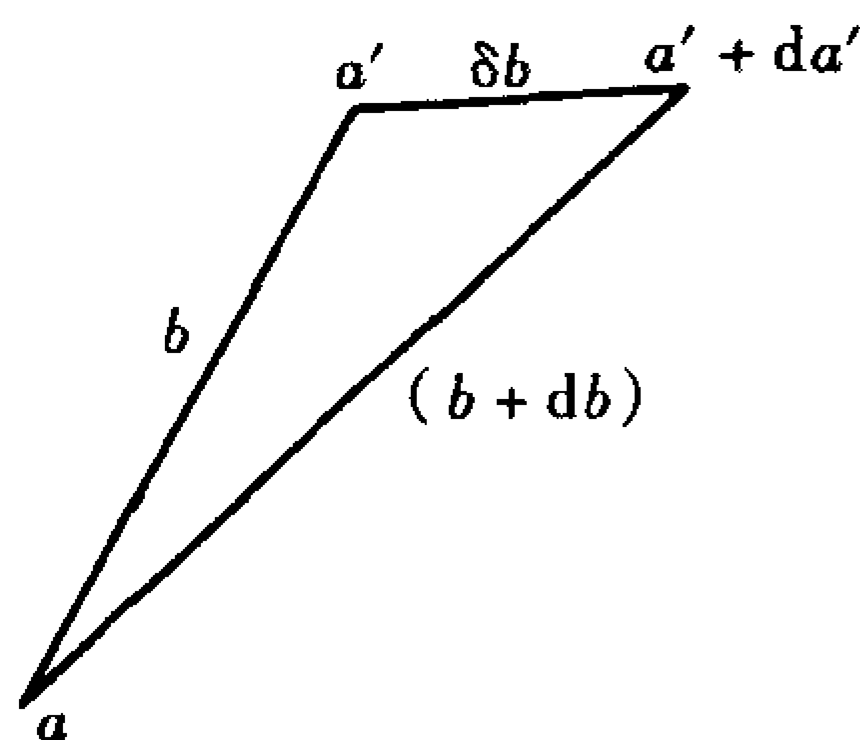


图 5.3 参数空间中参数矢量的变化

注意到 $\Phi(a,0)=a,\Phi(a,\delta a)=a+\mathrm{d}a$,

如图 5.3 所示,由 $a\to a'+\mathrm{d}a'$有两条路径.其一是直接由 a 到 $a'+\mathrm{d}a'$,

$$\Phi(a,b+\mathrm{d}b) = a'+\mathrm{d}a', \tag{5.43}$$

另一条路径经 a'到达 $a'+\mathrm{d}a'$,并令 $a'=\Phi(a,b)$,故有

$$a'+\mathrm{d}a' = \Phi(a',\delta b). \tag{5.44}$$

对(5.43)式作泰勒展开,并写成分量式,

$$\Phi_\rho(a',\delta b) = \Phi_\rho(a',0) + \sum_{\sigma=1}^{r}\left[\frac{\partial \Phi_\rho(a,b)}{\partial b_\sigma}\right]_{b=0}\delta b_\sigma$$

$$= \Phi_\rho(a',0) + \sum_{\sigma=1}^{r}V_{\rho\sigma}(a)\delta b_\sigma,$$

即是

$$\mathrm{d}a_\rho = \sum_\sigma V_{\rho\sigma}(a)\delta b_\sigma \quad (\rho = 1,2,\cdots,r). \tag{5.44a}$$

$\forall\ A(a)\in G$,可以视为参数空间的 r 个变量的函数.在 $a\to a$

$+\mathrm{d}a$ 时，在 $A(a)$ 中会诱导出变换

$$A(a) \longrightarrow A(a) + \mathrm{d}A(a),$$

且

$$\begin{aligned}\mathrm{d}A(a) &= \sum_{\rho=1} \frac{\partial A(a)}{\partial a_\rho}\mathrm{d}a_\rho \\ &= \sum_{\rho=1}^{r}\sum_{\sigma=1}^{r} V_{\rho\sigma}(a)\delta a_\rho \frac{\partial A(a)}{\partial a_\rho} \\ &= \sum_{\rho,\sigma}\delta a^\rho V_{\rho\sigma}(a)\frac{\partial A(a)}{\partial a_\sigma}.\end{aligned} \tag{5.45}$$

读者认真研究本例，可以深刻认识，何以李群的生成元与无穷小算子在本质上的结构是相同的.

问　　题

1. 证明由(5.27)或(5.28)、(5.40)定义的变换集合 $\{S_a\}$ 构成变换群.

[提示：生成元就是 $X_\rho(\rho=1,2,\cdots,r)$]

2. 证明：(1) 变换 $x'=ax, y'=by$，(2) $x'=ax, y'=\frac{1}{a}y$. 分别构成两个变换群，并分别求出其相应无穷小算子.

3. 求线性变换 $x'=ax+b$ 对应的无穷小算子，并求其对易关系.

[提示：$X^{(a)}=x\frac{\partial}{\partial x}, X^{(b)}=\frac{\partial}{\partial x}, [X^{(a)},X^{(b)}]=-X^{(b)}$.]

4. 证明 $SO(n)$ 群有 $n(n-1)/2$ 个无穷小算子，其一般形式是

$$X^{(ij)} = a\left(x_i\frac{\partial}{\partial j} - x_j\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$$

$$(i<j,\ i,j=1,2,\cdots,n, a \text{ 为常数}).$$

[提示：$\mathrm{d}x_i = \sum_j C_{ij}x_j$

$$\xlongequal{\varepsilon_{ij}=-\varepsilon_{ji}}\begin{cases}\sum\limits_{j}\varepsilon_{ij}x_j & (i<j,i,j=1,2,\cdots,n),\\ \sum\limits_{j}-\varepsilon_{ji}x_j & (i>j,i,j=1,2,\cdots,n),\end{cases}$$

即是
$$\mathrm{d}x_i=\sum_{j}^{i<j}(\varepsilon_{ij}x_j)-\sum_{j}^{i<j}\varepsilon_{ji}x_j,$$

$$X^{(ij)}=\sum_m\left[\left(\frac{\partial f_m}{\partial\varepsilon_{ij}}\right)_{\varepsilon=0}\frac{\partial}{\partial x_m}=\sum_m\sum_n\left[\frac{\partial(\varepsilon_{mn}x_n)}{\partial\varepsilon_{ij}}\right]_{\varepsilon=0}\right.$$

$$-\sum_m\sum_n\left[\frac{\partial(\varepsilon_{nm}x_n)}{\partial\varepsilon_{ij}}\right]_{\varepsilon=0}\frac{\partial}{\partial x_m}$$

$$=\sum_{m,n}\left[\delta_{mi}\delta_{nj}x_n\frac{\partial}{\partial x_m}-\delta_{ni}\delta_{mj}x_n\frac{\partial}{\partial x_m}\right]$$

$$=x_j\frac{\partial}{\partial x_j}-x_i\frac{\partial}{\partial x_j}.\left.\right]$$

5. 证明 $SO(2,1)$ 有 3 个无穷小算子，它们满足对易关系

$$[X^{(1)},X^{(2)}]=X^{(3)},[X^{(2)},X^{(3)}]=-X^{(1)},[X^{(3)},X^{(1)}]=X^{(2)}.$$

[提示：$\forall\ A(a)\in SO(2,1)$，有 $\tilde{A}JA=E$，其中（度规矩阵）

$$J=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\xlongequal{\text{无穷小变换}}(E+B)J(E+\tilde{B})=E$$

$$\Rightarrow\tilde{B}J+JB=0,$$

$$B=\begin{pmatrix}0&\varepsilon_3&\varepsilon_2\\-\varepsilon_3&0&\varepsilon_1\\\varepsilon_3&\varepsilon_1&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}x_1=\varepsilon_3x_2+\varepsilon_2x_3=f_1,\\\mathrm{d}x_2=-\varepsilon_3x_1+\varepsilon_1x_3=f_2,\\\mathrm{d}x_3=\varepsilon_2x_1+\varepsilon_1x_2=f_3,\end{cases}$$

$$X^{(1)}=x_3\frac{\partial}{\partial x_2}+x_2\frac{\partial}{\partial x_3},\quad X^{(2)}=x_3\frac{\partial}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$X^{(3)}=x_2\frac{\partial}{\partial x_1}+x_1\frac{\partial}{\partial x_2}.]$$

6. 证明 $U(n)$ 群为紧致李群，并证明 U 空间中，$\forall\ A\in U(n)$，

则 $\forall\ x,y\in L_n$，其内积 $(x,y)\equiv\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^*y_i$ 在变换

$$x'=Ax,\quad y'=Ay$$

下保持不变，即 $(x',y')=(x,y)$.

[提示：紧致性：$A^+A=E\longrightarrow\sum\limits_k\tilde{a}_{ik}^*a_{kj}=\delta_{ij}\longrightarrow\sum\limits_k a_{ki}^*a_{kj}=\delta_{ij}\longrightarrow\sum\limits_k a_{ki}^*a_{ki}=1\longrightarrow\sum\limits_{k=1}^{n}|a_{ki}|^2=1$.

令列矢量

$$|x\rangle=x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}},\langle x|=\tilde{x}^*=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*),$$

则 $|x'\rangle=A|x\rangle$，则 $(|x'\rangle)^+=\langle x^*|A^+$，因此

$$\begin{aligned}(x',y')&\equiv\langle x'|y'\rangle\\&=\langle x|A^+A|y\rangle=\langle x|E|y\rangle=(x,y).\end{aligned}$$

注意，本题表明，$\|x'\|=(x',x')=(x,x)=\|x\|$，$U$ 变换使得 U 空间（包括量子力学的希尔伯特空间）中矢量的长度或模保持不变.]

7. 证明 $O(n)$ 群为紧致李群，并证明在线性空间 L_n 中，内积

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\quad(\forall\ x,y\in L_n)$$

在变换 $x'=Ax,y'=Ay(\forall\ A\in O(n))F$，保持不变，即

$$(x',y')=(x,y).$$

[提示：不变性证明同上题. 证明紧致性时，注意，$\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ki}^2=1(i=1,\cdots,n)$，$a_{ki}^2\neq|a_{ki}|^2$，但 $\sum\limits_{k=1}^{n}|a_{ki}|^2e^{2i\phi_{ki}}=1$，其中 ϕ_{ki} 为 $a_{ki}=|a_{ki}|e^{i\phi_{ki}}$ 中复角. 和式中只有在相位都相等时，趋于极大，即是 $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|a_{ki}|^2\right)e^{i\phi}=1$，即 $\phi=0$，而 $\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ki}|^2=1$ 是左边和式最大值.]

8. $SU(2)$ 群的群元可以表为 2×2 矩阵，

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$$
$$=\begin{pmatrix}(\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\mathrm{i}\sin\alpha_1\mathrm{i}\sin\alpha_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_3} & -\cos\alpha_1\sin\alpha_2+\mathrm{i}\sin\alpha_1\cos\alpha_2\\ \cos\alpha_1\sin\alpha_2+\mathrm{i}\sin\alpha_1\cos\alpha_2 & (\cos\alpha_1\cos\alpha_2-\mathrm{i}\sin\alpha_1\sin\alpha_2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_3}\end{pmatrix}$$

(1) 验证 $A^+A=E,\det A=+1$.

(2) 验证$\forall\ x,y\in L_2$,有内积$(x',y')=(x,y)$,其中$(x,y)=\sum_{i=1}^{2}x_i^*y_i,(x',y')=\sum_{i=1}^{2}x_i'^*y'_i$,且 $x'=A(\alpha)x,y'=A(\alpha)y$.

(3) 求 $SU(2)$群的无穷小群生成元.

[提示:无穷小群生成元就是泡利矩阵

$$X_1=\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix},\quad X_2=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad X_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.]$$

9. 请给出 $SU(2)$群另一种参数化,并据此求出无穷小群生成元和无穷小算子.

[提示:(5.44)式太复杂. $x'=A(\alpha)x=(E+B)x$. 由于 $A^+A=E\Rightarrow E+B+B^+=0\Rightarrow B+B^+=0$,此外,由 $\det A=1\Rightarrow\det(E+B)=1\Rightarrow\det B=0\Rightarrow\mathrm{Tr}B=0$

由这两个条件,则可确定

$$B=\begin{bmatrix}\mathrm{i}a_1 & a_2+\mathrm{i}a_3\\ -a_2+\mathrm{i}a_3 & -\mathrm{i}a_1\end{bmatrix}.$$

由 $x'=x+\mathrm{d}x=Ax$,得

$$f_1=\mathrm{d}x_1=\mathrm{i}a_1x_1+(a_2+\mathrm{i}a_3)x_2$$
$$f_2=(-a_2+\mathrm{i}a_3)x_1-\mathrm{i}a_1x_2.$$

可得生成元,并用泡利矩阵 σ_1、σ_3、σ_3 表示之,

$$X_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\sigma_1,\qquad X_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\sigma_2,$$

$$X_3=\begin{pmatrix}0 & \mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{pmatrix}=\sigma_3$$ (脚标 1 与 3 对换,就是常见形式).

无穷小算子

$$X^{(1)} = \mathrm{i}y\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}x\frac{\partial}{\partial y},$$

$$X^{(2)} = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y},$$

$$X^{(3)} = \mathrm{i}x\frac{\partial}{\partial y} - \mathrm{i}y\frac{\partial}{\partial x}.$$

易证其结构常数同于 $SO(3)$，即是说 $SU(2)$ 与 $SO(3)$ 局域同构.]

10. 求 $SU(3)$ 的无穷小群生成元与无穷小算子.

[提示：$r=8$，同样令 $A=E+B$. 由 $B+B^{+}=0$. 和 $\mathrm{Tr}B=0$，得

$$B = \begin{pmatrix} \mathrm{i}a_1 & a_2+\mathrm{i}a_3 & a_4+\mathrm{i}a_5 \\ -a_2+\mathrm{i}a_3 & \mathrm{i}a_6 & a_7+\mathrm{i}a_8 \\ -a_4+\mathrm{i}a_5 & -a_7+\mathrm{i}a_8 & -\mathrm{i}a_1-\mathrm{i}a_6 \end{pmatrix}.$$

其相对生成元即盖尔曼矩阵，

$$X_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix},$$

$$X_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}.$$

无穷小算子则是(用上标以别于生成元)

$$X^{(1)} = \mathrm{i}x_1\frac{\partial}{\partial x_1} - \mathrm{i}x_3\frac{\partial}{\partial x_3}, \quad X^{(5)} = \mathrm{i}x_3\frac{\partial}{\partial x_1} + \mathrm{i}x_1\frac{\partial}{\partial x_3},$$

$$X^{(2)} = x_2\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad X^{(6)} = \mathrm{i}x_2\frac{\partial}{\partial x_2} - \mathrm{i}x_3\frac{\partial}{\partial x_3},$$

$$X^{(3)} = \mathrm{i}x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + \mathrm{i}x_1\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad X^{(7)} = x_3\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_3},$$

$$X^{(4)}=x_3\frac{\partial}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial}{\partial x_3},\quad X^{(8)}=\mathrm{i}x_3\frac{\partial}{\partial x_2}+\mathrm{i}x_2\frac{\partial}{\partial x_3}.\ ]$$

11. 二维欧几里德群 E_2，其群元

$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & a\\ \sin\theta & \cos\theta & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}(r=3,\text{参数 }\theta,a,b)$$

将三维向量$(x,y,1)$变为$(x',y',1)$，其中

$$x'=x\cos\theta-y\sin\theta+a,$$

$$y'=x\sin\theta+y\cos\theta+b,$$

表示平面的转动加平移操作. 求

(1) E_2 群的无穷小群生成元及对易关系.

(2) E_2 群的无穷小算子.

[提示：$[X_\theta,X_a]=X_b$，$[X_\theta,X_b]=-X_a$，$[X_a,X_b]=0$. 其中生成元

$$X_\theta=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad X_a=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad X_b=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

易得相应的无穷小算子

$$X^{(\theta)}=U_\theta^1\frac{\partial}{\partial x_1}+U_\theta^2\frac{\partial}{\partial x_2}\equiv -y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y},$$

$$X^{(a)}=U_a^1\frac{\partial}{\partial x_1}+U_a^2\frac{\partial}{\partial x_2}=\frac{\partial}{\partial x_1}\equiv\frac{\partial}{\partial x},$$

$$X^{(b)}=U_b^1\frac{\partial}{\partial x_1}+U_b^2\frac{\partial}{\partial x_2}=\frac{\partial}{\partial x_2}\equiv\frac{\partial}{\partial y}.$$

容易验证其对易关系

$$[X^{(\theta)},X^{(a)}]F(x,y)=-y\frac{\partial^2}{\partial x^2}F+x\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F-\frac{\partial}{\partial x}(-y\frac{\partial}{\partial x})F$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}(x\frac{\partial}{\partial y})F=\frac{\partial}{\partial y}F=X_bF.$$

下余同. 可见生成元与无穷小算子对易关系相同.]

§5.4 李氏三定理

李群的单位元邻域的局域性质完全由无穷小生成元的对易关系确定，亦即取决于相应的结构常数. 李氏三定理确凿表明，结构常数与群的参数化的方式无关，反映了李群结构的本质特征. 同时这些定理还表明结构常数的基本性质，从而奠定相应的李代数的基础. 正如我们在第六章所知道的，李代数的研究反过来对于李群，尤其是经典群的结构与分类，具有决定性的作用.

李氏第一定理 对于$\forall\ x\in L_n$，r 秩李群 G，应有

$$\frac{\partial x_i}{\partial a_\rho}=\sum_{\sigma=1}^{r}U_{i\sigma}\Lambda_{\sigma\rho}\quad(i=1,\cdots,n,\rho=1,2,\cdots,r),\qquad(5.46)$$

其中 $U_{i\sigma}(x)=\left(\dfrac{\partial f_i(x,a)}{\partial a_\sigma}\right)_{a=0}(i=1,\cdots,n,\sigma=1,\cdots r)$，$\sum\limits_{\sigma=1}^{r}\Lambda_{\tau\rho}V_{\rho\sigma}=\delta_{\tau\rho}(\tau,\rho=1,\cdots,r)$，即 $\Lambda_{\rho\sigma}=(V^{-1})_{\rho\sigma}$，而 $V(a)=\left(\dfrac{\partial\Phi_\sigma(a,b)}{\partial b_\rho}\right)_{b=0}$. 关于 $f_i(x,a)$的含义见§5.3节(5.26)式，而关于 $\Phi(a,b)$的含义见§5.3节例3. 实际上，由(5.44a)式，并计及 $\Lambda=V^{-1}$，

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}a_\rho&=\sum_\sigma V_{\rho\sigma}(a)\delta a_\sigma\\
\Rightarrow\sum_\rho\Lambda(a)_{\tau\rho}da_\rho&=\sum_{\rho,\sigma}\Lambda(a)_{\tau\rho}V_{\rho\sigma}(a)\cdot\delta a_\sigma\\
&=\sum_\sigma\delta_{\tau\sigma}\delta a_\sigma=\delta a_\tau.
\end{aligned}\qquad(5.47)$$

将(5.47)式代入(5.35)式，得

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x_i&=\sum_\mu U(a)_{i\mu}\cdot\sum_\rho\Lambda(a)_{\tau\rho}\mathrm{d}a_\rho\\
&=\sum_{\mu,\rho}U(a)_{i\mu}\Lambda(a)_{\tau\rho}\mathrm{d}a_\rho.
\end{aligned}\qquad(5.48)$$

(5.48)式就是(5.46)式. 此式实质上反映 x_i 随群参数变化率的具体规律，是证明第二定理的关键.

例 1 设 L_n 空间质点的位置矢量为 x，则微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = u_i(x) \quad (i = 1,\cdots,n), \tag{5.49}$$

其中 u_i 为其速度 $u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ 的第 i 个分量. 从李群角度来说，t 为参数，$r=1$. 因此(5.49)式也可以视为单参数变换李群. (5.49)是(5.46)式对应的微分方程组的一个特例.

李氏第二定理 设 $X^{(\rho)}(\rho=1,2,\cdots,r)$ 为李群 G 的无穷小算子，则对易子

$$[X^{(\rho)},X^{(\sigma)}] = \sum_\tau C^\tau_{\rho\sigma}X_\tau \quad (\rho,\sigma,\tau = 1,\cdots,r)$$

中结构常数 $\{C^\tau_{\rho\sigma}\}$ 与群的参数化方式无关.

证明 (5.46)式的可积条件是 $\forall\ x\in L_n$，

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial a_\rho \partial a_\sigma} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial a_\sigma \partial a_\rho} \quad (\rho,\sigma = 1,2,\cdots,r) \tag{5.50}$$

否则李群就不可能得到有限变化了.

将(5.46)式代入上式两边，则

$$\begin{aligned}
\text{左边} &= \frac{\partial^2 x_i}{\partial a_\rho \partial a_\sigma} = \frac{\partial}{\partial a_\rho}\Big[\sum_\tau U_{i\tau}(x)\Lambda_{\tau\sigma}(a)\Big] \\
&= \sum_{\tau,j} \frac{\partial U_{i\tau}}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial a_\rho}\Lambda_{\tau\sigma} + \sum_\tau U_{i\tau}\frac{\partial \Lambda_{\tau\sigma}}{\partial a_\rho};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{右边} &= \frac{\partial}{\partial a_\sigma}\Big[\sum_\tau U_{i\tau}(x)\Lambda_{\tau\rho}(a)\Big] \\
&= \sum_{\tau,j} \frac{\partial U_{i\tau}}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial a_\sigma}\Lambda_{\tau\rho} + \sum_\tau U_{i\tau}\frac{\partial \Lambda_{\tau\rho}}{\partial a_\sigma}.
\end{aligned}$$

继续应用(5.46)式，则

$$\begin{aligned}
\text{左边} &= \sum_{\tau,j} \frac{\partial U_{i\tau}}{\partial x_j}\sum_\mu U_{j\mu}\Lambda_{\mu\rho}\Lambda_{\tau\sigma} + \sum_\tau U_{i\tau}\frac{\partial \Lambda_{\tau\sigma}}{\partial a_\rho} \\
&= \sum_{\tau,j,\mu} \frac{\partial U_{i\tau}}{\partial x_j}U_{j\mu}\Lambda_{\mu\rho}\Lambda_{\tau\sigma} + \sum_\tau U_{i\tau}\frac{\partial \Lambda_{\tau\sigma}}{\partial a_\rho};
\end{aligned} \tag{5.51}$$

$$\text{右边} = \sum_{\tau,j,\mu} \frac{\partial U_{i\tau}}{\partial x_j}U_{j\mu}\Lambda_{\mu\sigma}\Lambda_{\tau\rho} + \sum_\tau U_{i\tau}\frac{\partial \Lambda_{\tau\rho}}{\partial a_\sigma}. \tag{5.52}$$

但是(5.51)与(5.52)式相等,稍加整理,得

$$\sum_{j,\tau,\mu}\left[\frac{\partial U_{i\tau}}{\partial x_j}U_{j\mu}-\frac{\partial U_{i\mu}}{\partial x_j}U_{j\tau}\right]\Lambda_{\mu\rho}\Lambda_{\tau\sigma}$$

$$=\sum_{\tau}U_{i\tau}\left[\frac{\partial\Lambda_{\tau\rho}}{\partial a_\sigma}-\frac{\partial\Lambda_{\tau\sigma}}{\partial a_\rho}\right]; \tag{5.53}$$

再注意到 V 与 Λ 的互逆性,(5.53)式可简化.用 $V_{\rho\xi}V_{\sigma\eta}$ 乘以上式两边,再对 ρ 与 σ 求和,得

$$\begin{aligned}
\text{左边}&=\sum_{j,\tau,\mu}^{\rho\sigma}[\cdots]\Lambda_{\mu\rho}V_{\rho\xi}\Lambda_{\tau\sigma}V_{\sigma\eta}=\sum_{j,\tau,\mu}[\cdots]\delta_{\mu\xi}\delta_{\tau\eta}\\
&=\sum_{j,\tau,\mu}\left[\frac{\partial U_{i\tau}}{\partial x_j}U_{i\mu}\delta_{\mu\xi}\delta_{\tau\eta}-\frac{\partial U_{i\mu}}{\partial x_j}U_{j\tau}\delta_{\mu\xi}\delta_{\tau\eta}\right]\\
&=\sum_{j}\left[\frac{\partial U_{i\eta}}{\partial x_j}U_{i\xi}-\frac{\partial U_{i\xi}}{\partial x_j}U_{i\eta}\right],
\end{aligned} \tag{5.54}$$

$$\begin{aligned}
\text{右边}&=\sum_{\rho,\sigma,\tau}U_{i\tau}V_{\rho\xi}V_{\sigma\eta}\left[\frac{\partial\Lambda_{\tau\rho}}{\partial a_\sigma}-\frac{\partial\Lambda_{\tau\rho}}{\partial a_\rho}\right]\\
&=\sum_{\tau}C^{\tau}_{\xi\eta}U_{i\tau}(x).
\end{aligned} \tag{5.55}$$

其中定义的

$$C^{\tau}_{\xi\eta}=\sum_{\rho,\sigma}\left[\frac{\partial\Lambda_{\tau\rho}}{\partial a_\sigma}-\frac{\partial\Lambda_{\tau\rho}}{\partial a_\rho}\right]V_{\rho\xi}V_{\sigma\eta} \tag{5.56}$$

$$(\xi,\eta,\tau=1,2,\cdots,r)$$

显然是常数.(5.53)式只与 x 有关,如果对(5.56)式微分,即

$$\frac{\partial}{\partial a_\rho}\left[\sum_{\tau}C^{\tau}_{\xi\eta}U_{i\tau}(x)\right]=\frac{\partial}{\partial a_\rho}\left\{\sum_{j}\left[\frac{\partial\Lambda_{\tau\rho}}{\partial a_\sigma}-\frac{\partial\Lambda}{\partial a_\rho}\right]V_{\rho\xi}V_{\sigma\eta}\right\}=0,$$

$$\Rightarrow\frac{\partial}{\partial a_\rho}C^{\tau}_{\xi\eta}=0. \tag{5.57}$$

由(5.56)式定义的 r^3 常数 $C^{\tau}_{\xi\eta}$ 实际上就是由李群无穷小算子对易子确定的结构常数.根据(5.36)式,我们有

$$\begin{aligned}
[X^{(\xi)},X^{(\eta)}]&=X^{(\xi)}X^{(\eta)}-X^{(\eta)}X^{(\xi)}\\
&=\sum_{j}\sum_{i}U_{i\xi}\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{j}U_{j\eta}\frac{\partial}{\partial x_j}-\sum_{j}U_{j\eta}\frac{\partial}{\partial x_j}\sum_{i}U_{i\xi}\frac{\partial}{\partial x_i}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i,j} U_{i\xi} \frac{\partial U_{j\eta}}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} - \sum_{i,j} U_{j\eta} \frac{\partial U_{i\xi}}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$= \sum_{i,j} \left[U_{i\xi} \frac{\partial U_{j\eta}}{\partial x_i} - U_{i\eta} \frac{\partial U_{j\xi}}{\partial x_j} \right] \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

注意到(5.54)式，此式可变为

$$[X^{(\xi)}, X^{(\eta)}] = \sum_{\tau} C^{\tau}_{\xi\eta} U_{i\tau} \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{\tau} C^{\tau}_{\xi\eta} X^{(\tau)}. \qquad (5.58)$$

李氏第二定理是李氏定理的核心.

李氏第三定理 由(5.55)和(5.57)式定义的李群的结构常数具有

(1) 反对称性

$$C^{\tau}_{\rho\sigma} = - C^{\tau}_{\sigma\rho}; \qquad (5.59)$$

(2) 满足雅可比(Jacobi)恒等式

$$[[X_\rho, X_\sigma], X_\tau] + [[X_\sigma, X_\tau], X_\rho] + [[X_\tau, X_\rho], X_\sigma] = 0,$$

或等价地表示为(其中哑指标应求和)

$$C^{\xi}_{\rho\sigma} \cdot C^{\eta}_{\xi\tau} + C^{\xi}_{\sigma\tau} C^{\eta}_{\xi\rho} + C^{\xi}_{\tau\rho} C^{\eta}_{\xi\sigma} = 0. \qquad (5.60)$$

李氏定理是挪威数学家李(Sophus Lie)和希弗尔斯(G. Scheffers)在1893年给出的. 定理表明，李群的局域结构完全取决于其结构常数，或者说其无穷小算子的对易关系. 研究这些关系的任务归属于李代数.

问 题

1. 验证三维空间的平移群 $T(3)$ 的群元可以表为

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

它把四维向量 $(x_1, x_2, x_3, 1)$ 与 $(x'_1, x'_2, x'_3, 1)$ 联系起来，其中 x'_i

$=x_i+a_i$ $(i=1,2,3)$；并求 $T(3)$ 的无穷小算子.

[答案：$X^{(i)}=\dfrac{\partial}{\partial x_i}(i=1,2,3)$，其实就是量子力学中动量算符.]

2. 上题中，$T(3)$ 群的无穷小群生成元是什么？

(答案：

$$X_1=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad X_2=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$X_3=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

这是阿贝尔群，结构常数全为 0. 同时它也是非紧致群.]

3. 求出 $SO(4)$ 的无穷小群的生成元和无穷小算子；并证明六个生成元和无穷小算子可以分成两个子集合，每个集合有 3 个元素，在对易关系运算都是闭合的.

[提示：无穷小算子分别是

$$X^{(1)}=x_3\frac{\partial}{\partial x_2}-x_2\frac{\partial}{\partial x_3},\quad X^{(2)}=x_1\frac{\partial}{\partial x_3}-x_3\frac{\partial}{\partial x_1},$$

$$X^{(3)}=x_2\frac{\partial}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial}{\partial x_2},\quad Y^{(1)}=x_1\frac{\partial}{\partial x_4}-x_4\frac{\partial}{\partial x_1},$$

$$Y^{(2)}=x_2\frac{\partial}{\partial x_4}-x_4\frac{\partial}{\partial x_2},\quad Y^{(3)}=x_3\frac{\partial}{\partial x_4}-x_4\frac{\partial}{\partial x_3}.$$

令 $J_l^{(i)}=\dfrac{X_l^{(i)}+Y^{(i)}}{2}$； $K^{(i)}=\dfrac{X^{(i)}-Y^{(i)}}{2}$ $(i=1,2,3)$，

则易得对易关系

$$[J^{(i)},J^{(j)}]=\varepsilon_{ijk}J^{(k)},\quad [K^{(i)},K^{(j)}]=\varepsilon_{ijk}K^{(k)},$$

$$[J^{(i)},K^{(j)}]=[K^{(i)},J^{(i)}]=0\quad (i,j=1,2,3),\quad (5.61)$$

即是(详见下章)：$SO(4)=SO(3)\otimes SO(3)$.

关于无穷小群生成元有类似关系，

$$X_1=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad X_2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$X_3=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad Y_1=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$Y_2=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\quad Y_3=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}.]$$

4. $\forall\ A(\alpha)\in SO(3)$，元素 $A(\alpha)$ 可以表示为

$$A(\alpha)=\exp[-\mathrm{i}\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{T}],$$

$$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3),\quad \boldsymbol{T}=(T_1,T_2,T_3),$$

其中

$$T_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-\mathrm{i}\\0&\mathrm{i}&0\end{pmatrix},\quad T_2=\begin{pmatrix}0&0&\mathrm{i}\\0&0&0\\-\mathrm{i}&0&0\end{pmatrix},\quad T_3=\begin{pmatrix}0&-\mathrm{i}&0\\\mathrm{i}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

即 $T_i=\mathrm{i}X_i$，见(5.23)式. 请证明

$$A(a)=E-(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{T})^2+(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{T})^2\cos a-\mathrm{i}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{T})\sin a. \tag{5.62}$$

其中 $a=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$，$\boldsymbol{n}$ 为转动轴的方向，$\boldsymbol{n}=(n_1,n_2,n_3)$，$n_1^2+n_2^2+n_3^2=1$.

[提示：$\boldsymbol{a}=a\boldsymbol{n}$，故

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{T}=a(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{T})=a\sum_{i=1}^{3}n_iT_i=a\begin{pmatrix}0&-n_3&n_2\\n_3&0&-n_1\\-n_2&n_1&0\end{pmatrix}.$$

注意关系式 $T_iT_jT_k+T_kT_jT_i=T_i\delta_{jk}+T_k\delta_{ij}(i,j,k=1,2,3)$，尤其是 $T_i^3=T_i\ (i=1,2,3)$. 因此，

$$
\begin{aligned}
A(a) &= \exp[-\mathrm{i}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{T}] = \exp[-\mathrm{i}a(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{T})] \\
&= E + [-\mathrm{i}a(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{T})] + \frac{1}{2!}[-\mathrm{i}a(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{T})]^2 \\
&\quad + \frac{1}{3!}[-\mathrm{i}a(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{T})]^3 + \frac{1}{4!}[-\mathrm{i}a(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{T})]^4 + \cdots
\end{aligned}
\tag{5.63}
$$

不难直接验算，

$$
(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{n})^3 \equiv T_n^3 = \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix}^3 = T_n. \tag{5.64}
$$

故(5.63)式可以整理简化为

$$
\begin{aligned}
A(a) &= E - \mathrm{i}(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{n})[a - \frac{1}{3!}a^3 + \cdots] \\
&\quad + (\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{n})^2[E - \frac{1}{2!}a^2 + \frac{1}{4!}a^4 - \cdots] + (\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{n})^2 \\
&= E - \mathrm{i}(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{n})\sin a + (\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{n})^2\cos a + (\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{n})^2.\ ]
\end{aligned}
$$

5. 证明 $\forall\ A(a,\theta,\Phi)\in SU(2)$，$A(a,\theta,\Phi)$ 为

$$
A(\boldsymbol{n},a) = \exp[-\mathrm{i}a\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}/2], \tag{5.65}
$$

其中转轴方向单位矢量 $\boldsymbol{n}=(n_1,n_2,n_3)\equiv\boldsymbol{n}(\theta,\Phi)$，$\theta$ 和 Φ 为球坐标的极角与方位角. 可以表示为

$$
\begin{aligned}
A(\boldsymbol{n},a) &= E\cos(\frac{a}{2}) - \mathrm{i}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\sin(\frac{a}{2}) \\
&= \begin{pmatrix} \cos\frac{a}{2} - \mathrm{i}\sin\frac{a}{2}\cos\theta, & -\mathrm{i}\sin\frac{a}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi} \\ -\mathrm{i}\sin\frac{a}{2}\sin\theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Phi} & \cos\frac{a}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{a}{2}\cos\theta \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{5.66}
$$

[提示：证明与上题类似，先将(5.65)式作泰勒展开，然而利用关

系式$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})^2=E$，简化之，有

$$\begin{aligned}
A(\boldsymbol{n},a) &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}/2)} \\
&= E - \mathrm{i}a(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}/2) + \frac{1}{2!}\left(-\mathrm{i}a\,\frac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})}{2}\right)^2 + \cdots \\
&= \left(E - \frac{1}{2!}\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{1}{4!}\left(\frac{a}{2}\right)^4 + \cdots\right) \\
&\quad - \mathrm{i}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\left(\frac{a}{2} - \frac{1}{3!}\left(\frac{a}{2}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{a}{2}\right)^5 - \cdots\right) \\
&= E\cos\frac{a}{2} - \mathrm{i}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\sin\frac{a}{2}.
\end{aligned}$$

我们注意对于$SU(2)$，有$(\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{n}_2\cdot\boldsymbol{\sigma})=E(\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2)+\mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2)$.]

6. 设$A(\boldsymbol{n},a),A(\boldsymbol{m},b)\in SU(2)$. (i) 计算$A(\boldsymbol{m},b)A(\boldsymbol{n},a)A^{-1}(\boldsymbol{m},b)$；(ii) 由此证明所有转角$\omega$相同的元素，均属于同一类.

[提示：对于$SO(3)$，类似的结果在第一章已经得到，见§1.4节判据了. 为与通常$g_\alpha^{-1}g_\beta g_\alpha$一致，只要认为$A(\boldsymbol{m},b)=A(\boldsymbol{m},-b)^{-1}$就可以了.

答案：$A(\boldsymbol{m},b)A(\boldsymbol{n},a)A^{-1}(\boldsymbol{m},+b)=A(\boldsymbol{e},a)$，其中单位矢量

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e} = &(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n} + \cos b[\boldsymbol{n} - (\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{m}] \\
&+ \sin b(\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}).
\end{aligned}$$

注意关系式

$$\begin{aligned}
A(\boldsymbol{n},a)A(\boldsymbol{m},b) = &\left[\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2} - (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m})\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\right]E \\
&- \mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}\left[\boldsymbol{n}\sin\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2} + \boldsymbol{m}\cos\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\right. \\
&\left.+ (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m})\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}.\right]
\end{aligned} \tag{5.67}$$

7. 设$A(\boldsymbol{n},a),A(\boldsymbol{m},b)\in SU(2)$，$F(A(\boldsymbol{n},a))$为群$SU(2)$的群函数，作为紧致李群群函数在群空间$L_G$的积分，要求：归一化$\int(\mathrm{d}A)=I$和

$$\int F(A(\boldsymbol{n},a))(\mathrm{d}A) = \int F(A^{-1}(\boldsymbol{m},b)A(\boldsymbol{m},b)(\mathrm{d}u).$$

求在体积元

$$(\mathrm{d}A) = W(\boldsymbol{n},a)\mathrm{d}a_1\mathrm{d}a_2\mathrm{d}a_3 = W(\boldsymbol{n},a)a^2\sin\theta\mathrm{d}a\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\Phi$$

中的密度函数 $W(\boldsymbol{n},a)(\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}(\theta,\Phi))$.

[提示:由具有相同 a 的元素属于同一类,因此 $W(\boldsymbol{n},a)=W(a)$. 现在设 T 为恒元邻域任意元素,则 $S=A(\boldsymbol{n},a)T$ 为 $A(\boldsymbol{n},a)$ 邻域任意元素. 因此 $W(E)(\mathrm{d}t)$ 右乘 $A(\boldsymbol{n},a)$ 后,全部移至 $A(\boldsymbol{n},a)$ 邻域 $(\mathrm{d}A)$ 内. 即 $W(E)(\mathrm{d}t) \equiv W_0(\mathrm{d}t) = W(A(\boldsymbol{n},a))(\mathrm{d}A) \equiv W(\boldsymbol{n})(\mathrm{d}u)$,而

$$W(0) = W(a)\left|\det\left[\frac{\partial f_i(t,a)}{\partial t_j}\right]_{t=0}\right| \text{(朗斯基行列式)},$$

或
$$W(a) = W(0)\left|\left[\frac{\partial f_i(s,a)}{\partial s_j}\right]_{s=a}\right|.$$

对于本题,令 $A(\boldsymbol{e}_3,a)=A(\boldsymbol{n},a)$,$\boldsymbol{e}_3$ 为 z 轴方向矢量,$T=A(\boldsymbol{n},t)$. 利用第 5 题结果,

$$A(\boldsymbol{n},t) = E - \mathrm{i}(t_1\sigma_1 + t_2\sigma_2 + t_3\sigma_3)/2 \quad \text{(线性化)},$$

$$A(\boldsymbol{e}_3,a) = E\cos\frac{a}{2} - \mathrm{i}\sigma_3\sin\frac{a}{2}.$$

利用(5.67)式,并只取 t_i 的一级小量,有

$$\begin{aligned}
A(\boldsymbol{n},t)A(\boldsymbol{e}_3,t) = & E[\cos(\frac{a}{2}) - \frac{1}{2}t_3\sin(\frac{a}{2})] \\
& - \mathrm{i}\frac{\sigma_1}{2}[t_1\cos(\frac{a}{2}) + t_2\sin(\frac{a}{2})] \\
& - \mathrm{i}\frac{\sigma_2}{2}[t_2\cos(\frac{a}{2}) - t_1\sin(\frac{a}{2})] \\
& - \mathrm{i}\frac{\sigma_3}{2}[t_3\cos(\frac{a}{2}) + 2\sin(\frac{a}{2})],
\end{aligned}$$

其中已取 $\cos\frac{t}{2}=1, \sin\frac{t}{2}=\frac{1}{2}$. 令此式 $=A(\boldsymbol{m},a')=E\cos\frac{a'}{2}$

$-\mathrm{i}(\boldsymbol{m}'\cdot\boldsymbol{\sigma})\sin(\frac{a'}{2})$. 对比 E 与 $\sigma_i(i=1,2,3)$ 前的系数有(精确到 t_i^2 项)

$$\cos\frac{a'}{2}=\cos\frac{a}{2}-\frac{t_3}{2}\sin\frac{a}{2}=\cos(\frac{a+t_3}{2}),$$

$$\sin\frac{a'}{2}=\sin(\frac{a+t_3}{2})=\sin(\frac{a}{2})+\frac{1}{2}t_3\cos(\frac{a}{2}),$$

$$f_1(t,a)=a'n'_1=\frac{a}{2}[t_1\cos(\frac{a}{2})+t_2\sin(\frac{a}{2})]/\sin(\frac{a}{2}),$$

$$f_2(t,a)=a'n'_2=\frac{a}{2}[t_2\cos(\frac{a}{2})-t_1\sin(\frac{a}{2})]/\sin(\frac{a}{2}),$$

$$f_3(t,a)=a'n'_3=a[\frac{t_3}{2}\cos(\frac{a}{2})+\sin\frac{a}{2}]/\sin(\frac{a'}{2})$$

$$=\omega'=\omega+t_3.$$

$$\frac{W(0)}{W(a)}=\left|\det\left[\frac{\partial f_i(t,a)}{\partial t_j}\right]_{t=0}\right|\quad(i,j=1,2,3)$$

$$=\left\|\begin{matrix}\frac{a}{2}\cot(\frac{a}{2}) & \frac{a}{2} & 0\\ -\frac{a}{2} & \frac{a}{2}\cot\frac{a}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right\|=\frac{a^2}{4\sin^2(\frac{a}{2})}.$$

即 $W(a)=W(0)4\sin^2(\frac{a}{2})/a^2$.

但又由归一化条件

$$\int(\mathrm{d}A)=1\Rightarrow\iiint 4W(0)\sin^2(\frac{a}{2})\mathrm{d}a\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\Phi=1$$

$$\Rightarrow 16\pi^2W(0)=1\Rightarrow W_0=\frac{1}{16\pi^2}$$

$$\Rightarrow W(0)=\frac{1}{4\pi^2}\sin^2(\frac{a}{2}).$$

注意, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, $-\pi\leqslant\Phi\leqslant\pi$, $0\leqslant a\leqslant 2\pi$. 对于 $SO(3)$, $0\leqslant a\leqslant\pi$, $W(a)=\frac{1}{2\pi^2}\sin^2(\frac{a}{2})$.]

8. 对 $SO(3)$，其无穷小算子 $X^{(i)}(i=1,2,3)$ 就是量子力学中角动量分量算符，在 $X^{(3)}$ 对角化表象中，

$$(X_{(j)}^{(3)})_{\mu\nu} = \mu\delta_{\mu\nu}(\mu = j, j-1, \cdots, -j+1, -j),$$

试证

(1) $\sum_{i=1}^{3}(X_{(j)}^{(i)})^2 \doteq (X_{(j)})^2 = j(j-1)E$；

(2) $(X_{(j)}^{(1)})_{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\delta_{\mu,\nu+1}\Gamma_j^\mu + \delta_{\mu,\nu-1}\Gamma_j^\nu]$，

$$(X_{(j)}^{(2)})_{\mu\nu} = -\frac{i}{2}[\delta_{\mu,\nu+1}\Gamma_j^\mu - \delta_{\mu,\nu-1}\Gamma_j^\nu];$$

其中 Γ_j^μ 满足递推公式

$$\Gamma_j^\mu = [(j+\mu)(j-\mu+1)]^{1/2} = \Gamma_j^{-\mu+1}.$$

[提示：本题推导在一般量子力学教科书中均有. 注意(1)中 $(X_j)^2$ 就是角动量平方算子.]

9. 设对于 $SO(3)$，$A(\boldsymbol{n},a)\in SO(3)$，有

$$A_{(j)}(\boldsymbol{n},a) = \exp[-\mathrm{i}a\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{X}_{(j)}],$$

其中 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{X}_{(j)} = \sum_{i=1}^{3}n_i(X_{(j)}^{(i)})$，$j$ 为不可约表示标记. 试验证在分立有限群中的不可约表示的判据(2.24)可以推广到紧致李群中，即

$$\sum_{i=1}^{g}|\chi_a(g_a)|^2 = g \Rightarrow \int|\chi_{(j)}|^2\frac{1}{2\pi^2}\sin^2(\frac{a}{2})\sin\theta\mathrm{d}a\mathrm{d}\Phi = 1. \tag{5.68}$$

[提示：对于表示 $A_{(j)}'(\boldsymbol{n},a)=\exp[-\mathrm{i}a\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{X}_{(j)}^{(i)}]$，不失一般性，设 $\boldsymbol{n}/\!/\boldsymbol{e}_3$，则 $(A_{(j)}(\boldsymbol{e}_3,a))_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}\exp[-\mathrm{i}\mu a]$. 表示 $A_{(j)}(\boldsymbol{e}_3,a)$ 是 $2j+1$ 维，并且是双值表示，

$$A(\boldsymbol{e}_3,a) = A(-\boldsymbol{e}_3,2\pi-a).$$

$A_{(j)}$ 表示中特征标为

$$\chi_{(j)}(a) = \sum_{\mu=-j}^{j}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\mu} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}j(j+1)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ja}}{\mathrm{e}^{ja}-1}$$

$$= \sin j(j+1)a/\sin(\frac{a}{2}).$$

实际上这是所有转角为 a 的元素类的特征标.

$$\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_{-\pi}^{\pi}d\Phi\int_0^{\pi}|\chi_{(j)}|^2\sin^2(\frac{a}{2})da$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 j(j+1)ada = 1.$$

说明:如果是 $SU(2)$, $W(0) = \frac{1}{4\pi^2}\sin^2(\frac{a}{2})$, 但 $\int_0^{2\pi}\cdots da = 1$, 亦可验证归一化条件(5.68)式.]

第六章　李代数基础

§6.1　李群的整体性质

李群的无穷小算子在对易关系运算下构成李代数. 局域李群的结构完全由相应的李代数确定. 如果李群 G 是由几叶不相连通部分(在群参数空间)构成,则称为混合李群. 与恒元相连结的那一叶(sheet)叫局域李群 G_0. G_0 是 G 的不变子群. 商群 $G/G_0=[E,H_1,H_2,\cdots,H_p]$ 则刻划了混合李群的整体或拓扑结构. 事实上,混合李群 G 的各个互不相通的连续片就是集合

$$G_0(\text{局域李群}),\ G_0H_1,\ G_0H_2,\ \cdots,\ G_0H_p, \tag{6.1}$$

其中 $G_0H_i(i=1,2,\cdots,p)$ 均为 G_0 的陪集.

局域李群又称简单李群. 如果局域李群的参数空间是多连通的,则在同一参数空间必然存在相应的单连通的局域李群,称为原局域李群的覆盖群.

例 1　$SO(3)$ 群,$r=3$,参数 a(自转角)、θ(极角)、ψ(方位角). 参数变动范围

$$0\leqslant\theta\leqslant\pi,\quad -\pi\leqslant\phi\leqslant\pi,\quad 0\leqslant a\leqslant\pi. \tag{6.2}$$

其群流形就是在参数空间(a_1,a_2,a_3)中以 π 为半径的球体,其中 $\boldsymbol{a}=a\boldsymbol{n}=(a_1,a_2,a_3)$,$\boldsymbol{n}$ 为转轴方向矢量 $\boldsymbol{n}=(n_1,n_2,n_3)=\boldsymbol{n}(\theta,\phi)$. 群流形显然是连通的,即 $G\cong G_0$,$SO(3)$ 本身是简单李群.

由于

$$A(\boldsymbol{n},a)=A(-\boldsymbol{n},2\pi-a), \tag{6.3}$$

即是说,绕 $\boldsymbol{n}$ 转动 a,与绕 $-\boldsymbol{n}$ 转动 $2\pi-a$,代表同一操作. 在图6.1

中与 $\boldsymbol{n}$ 同向的直径，在群流形球面上的交点 P[表示 $A(\boldsymbol{n},a)$] 与 P[表示 $A(-\boldsymbol{n},2\pi-a)$] 实质上是描述同一操作. 换言之，此时群参数对群元素是双值表示的.

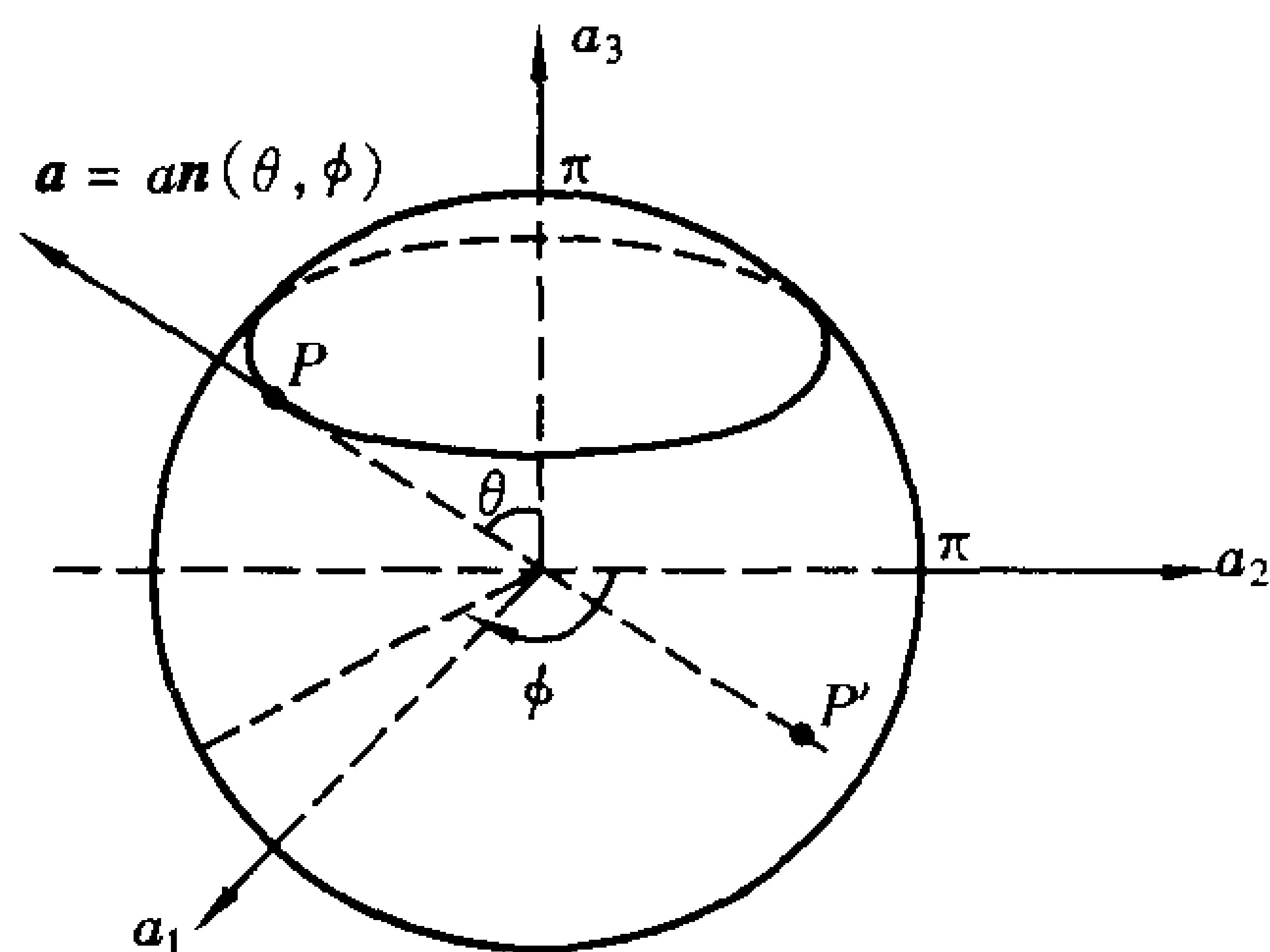


图 6.1 $SO(3)$ 群流形

在研究连通性时，对于通常的所谓曲线连续变化，这种双(多)值表示出现异常情况，即 P 与 P' 既然代表同一群元，在连续变化时，允许 P 点跳跃到 P'，或 P' 跳到 P 点. 这样一来，在群流形中任意两点的所有连线就分为两大类，其中一类包含直径两端的偶数次跳跃，另一类则包含奇数次跳跃. 凡属同一类的连线，可以验证，在群空间(流形)中作连续变化而重合. 在第九章，我们可以知道，其中每一类曲线均属同一道路连通的同伦类. 在作连续变化中，跳跃点可以在球面上自由移动，唯跳跃前后的两点始终保持在直径的两端. 因此跳跃无法通过连续移动而消除. 如果两次跳动，则可以把跳跃点反向移在一起，从而包含两次跳跃的连线是一个封闭回线，自由可以通过连续变换最终收缩为一点，等价于不跳.

例 2 $SU(2)$ 群，$r=3$，群参数与 $SO(3)$ 同. 但 $\forall\ A(\boldsymbol{n},a)\in SU(2)$，可表示为

$$
\begin{aligned}
A(\boldsymbol{n},a) &= \exp[-\mathrm{i}a\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}/2] \qquad (6.4)\\
&= E\cos\left(\frac{a}{2}\right)-\mathrm{i}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\sin\left(\frac{a}{2}\right).
\end{aligned}
$$

容易看出，$A(\boldsymbol{n},a)=A(-\boldsymbol{n},4\pi-a)$. 但

$$A(\boldsymbol{n},2\pi-a)=-A(-\boldsymbol{n},a),\quad A(\boldsymbol{n},2\pi)=-E,$$

此时群参数变化范围是

$$0\leqslant\theta\leqslant\pi,\quad -\pi\leqslant\phi\leqslant\pi,\quad 0\leqslant a\leqslant 2\pi \tag{6.5}$$

相应的群流形如图 6.1，但此时半径 $a=2\pi$. 与 $SO(3)$ 不同的是，此时流形球面上任一点与群元素是一一对应的. 群流形内任意两点的连线，可以通过参数空间的连续变形化为球面上的等价连线，最后收缩为一点. 因此 $SU(2)$ 群空间是单连通的.

由于 $SO(3)$ 群是 $SU(2)$ 的不变子群，且商群 $SU(2)/SO(3)=I_i=(E,I)$，其中反射元素 $I\equiv-E$，因此 $SU(2)=SO(3)\otimes I_i$(反射群) 是 $SU(3)$ 的覆盖群. 以后称离散不变子群为 $SU(2)$ 群的中心. 实际上，正是中心刻画 $SU(2)$ 的整体(拓扑性质) 性质.

一般说来，对于任意多连通李群 G，总是存在一个单连通的群 $\widetilde{G}$，使得 $\widetilde{G}$ 可以连续变形(术语称为同胚映射 G 上)，$\widetilde{G}$ 称为覆盖群. 这里有关系:G 局域同构于 $\widetilde{G}/K$，其中 K 为离散不变子群. 实际上，存在若干连通、彼此局域同构的李群构成的集合 Γ，其覆盖群就是 $\widetilde{G}$. 除 G 以外，集体 Γ 中其它成员，均能以商群 $\widetilde{G}/K$ 的形式得到. 令 $K\equiv(K_0\equiv E_1, K_1,\cdots,K_p)$，则 $\widetilde{G}=[G,K_1G,\cdots,K_pG\}$. 这里离散子群 K 包含在 $\widetilde{G}$ 的中心 $\widetilde{Z}$ 中，而商群 $\widetilde{G}/K$ 的中心就是 $\widetilde{Z}/K$.

所谓李群的中心系指，其相应无穷小算子集合 $\{X^{(\rho)}\}\equiv A(\rho=1,\cdots,r)$ 中，$\forall\, X^{(\rho)}=$ 集合 Θ(设 $\rho=1,\cdots,q$)，$\forall\, X^{(\sigma)}\in A$，有

$$[X^{(\rho)},\ X^{(\sigma)}]=0, \tag{6.6}$$

则集合 Θ 对应的群元素构成 G 的一个阿贝尔子群 $\widetilde{Z}$，称为群 G 的中心或极大阿贝尔理想. $SU(2)$ 的中心就是 $Z_2[Z_n$ 叶整数循环群，Z_2 同构于反射群 $I_i=(E,I)$，其中 $I^2=E]$. 这里 $\widetilde{G}=SU(2)$，$G=SO(3)$. 由于

$$\frac{SU(2)}{Z_2}=SO(3),$$

而 $SU(2)/Z_2$ 必局域同构于 $SU(2)$，因此 Z_2 为 $SU(2)$ 的中心.

例 3 $SO(2)$ 的覆盖群为实数加法群 R，其中 Z_∞ 元素为全体实数，群运算为普遍加法，单位元为 0. Z_∞ 为全体整数加法群. $SO(2)$ 的参数的变化范围为，$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$，而 $R = \{\theta | -\infty \leqslant \theta \leqslant \infty\}$. 因此 R/Z_∞ 局域同构于 R，且有

$$R/Z_\infty \cong SO(2).$$

即是说，Z_∞ 是 R 的中心，而 R 为 $SO(2)$ 的覆盖群. $SO(2)$ 是无限度连通的.

李群整体(拓朴)性质小结：

(1) 简单或局域李群. 群中任意两元素均可在群参数空间中连线联结. 如 $SO(n)$ 群、$SU(n)$ 群，等等.

(2) 混合李群 G. 群流形分为不相连通的几叶，其中与单位元相通的那一叶，是群的不变子群，叫局域李群，记为 G_0，其它诸叶均为 G_0 的陪集.

例 4 $O(n)$ 群. $\det A = \pm 1, \forall A \in O(n)$. 其中 $SO(n)$ 对应 $\det A = +1$. 另一叶为 $(-E)SO(n)$，即其中任一元素均可用 $-E$ 与 $SO(n)$ 中元素的乘积得到. 而 $SO(n)$ 的任一表示，在 $O(n)$ 中对应两个表示. 注意此时两叶中的元素分处于群参数空间中不相连通的两区域.

(3) 简单李群的连通度. 简单李群的任两元素的连线，在拓扑上可能有若干不等价的连线类，各类连线彼此无法通过连续变形重合(所谓道路同伦意义上不同类)，使得连通群空间有不同连通度. 如 $SO(3)$ 群空间连通度为 2，而 $SO(2)$ 群空间连通度为无穷大.

覆盖群. 每一个多连通的李群 G，在同一群空间对应单连通李群 $\tilde{G}$，G 与 $\tilde{G}$ 存在同态映射关系，$\tilde{G}$ 称为 G 的覆盖群，$\tilde{G}$ 的表示称为 G 的多值表示.

二连通的 $SO(3)$ 群的覆盖群是 $SU(2)$，而 $SO(2)$ 的每一个表示都对应 $SU(2)$ 的双值表示.

连通度无限大的 $SO(2)$ 群的覆盖群是实数加法群 R，而 R 的每一个表示都对应于 $SO(2)$ 的无穷多个表示. 事实上

R(群)	$SO(2)$ 群	
$\theta+2n\pi$	$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$	$(n=0,\pm 1,\cdots,\pm\infty)$,

其中整数 n 叫绕数. 这个结果在量子色动力学的 θ 真空理论中会用到.

(4) 紧致性. 所有群参数是有界的，则相应的群空间称为紧致的，相应的李群称为紧致李群. 反之，则为非紧致的. 只有紧致李群方可进行群积分运算.

表 6.1 给出了具有同构李代数 A 的实李群的覆盖群 $\widetilde{G}$ 及局部同构，便于参阅.

表 6.1　覆盖群及其局部同构

李　群	覆盖群	局域同构
$SO(2)$	R	$SO(2)\sim R/Z_\infty$
$SO(3)$	$SU(2)$	$SO(3)\sim SU(2)/Z_2$
$SO(4)$	$SU(2)\otimes SU(2)$	$SO(4)\sim[SU(2)\otimes SU(2)]/Z_2$
$SO(5)$	$S_p(4)$(辛群)	$SO(5)\sim S_p(4)/Z_2$
$SO(6)$	$SU(4)$	$SO(6)\sim SU(4)/Z_2$
$SO(2,1)$	$SU(1,1)$	$SO(2,1)\sim SU(1,1)/Z_2$
$SO(3,1)$	$SL(2,c)$(复群)	$SO(3,1)\sim SL(2,c)/Z_2$
$SO(2,2)$	$SU(1,1)\otimes SU(1,1)$	$SO(2,2)\sim/[SU(1,1)\otimes SU(1,1)]/Z_2$
$SO(4,1)$	$S_p(2,2)$	$SO(4,1)\sim S_p(2,2)/Z_2$
$SO(3,2)$	$S_p(4,R)$(实)	$SO(3,2)\sim S_p(4,R)/Z_2$
$SO(3,3)$	$SL(4,R)$	$SO(3,3)\sim SL(4,R)/Z_2$
$SO(4,2)$	$SU(2,2)$	$SO(4,2)\sim SU(2,2)/Z_2$

辛群 $Sp(2n)$ 的元素系反厄密矩阵，$A^+=-A$. 它是将 $2n$ 维线性空间矢量 $\widetilde{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n;x'_1,\cdots,x'_n)$ 与 $\widetilde{y}=(y_1,\cdots,y_n;y'_1,y'_2,\cdots,y'_n)$ 的内积

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} (x_i y'_i - y_i x'_i), \tag{6.7}$$

在其变换下，

$$\begin{cases} Ax = x_p = (x_{p_1}, \cdots, x_{p_n};\ x'_{p_1}, \cdots, x'_{p_n}), \\ Ay = y_p = (y_{p_1}, \cdots, y_{p_n};\ y'_{p_1}, \cdots, y'_{p_n}) \end{cases} \tag{6.8}$$

保持不变，$(x_p,\ y_p) = (x,y)$. 易知，$\forall\ A \in Sp(2n)$，有

$$A = \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_3 & -\tilde{Z}_1 \end{pmatrix}, \quad (Z_1,\ Z_2,\ Z_3 \text{ 均为 } n \times n \text{ 复矩阵}, Z_i = \tilde{Z}_i, i = 1,2). \tag{6.9}$$

$Sp(2n)$ 群的独立参数为 $2n(n+1)$. $Sp(2n)$ 群是单连通的. $SO(n)(n>2)$ 均为双连通，而 $SU(n)$ 则为单连通.

问　　题

1. $Sp(2n)$ 的独立参数为何是 $2n(n+1)$?

[提示：反厄密条件 $A^+ = -A$，相当 $2n(n-1)$ 个约束条件.]

2. 证明 $SU(n)(n>2)$ 是单连通的.

[提示：$\forall\ A \in SU(n)$，$A = \exp\left[-\mathrm{i}\sum_{\alpha=1}^{n^2-1} a_\alpha X_\alpha\right]$，其中独立参数 $a_\alpha(\alpha = 1,\cdots,n^2-1)$ 共 n^2-1 个，X_α 为生成元. 幺正矩阵 A 对角化后，$Ax = \lambda x$，本征值 $\lambda = \exp[-\mathrm{i}\Phi_\rho]$，原因是 $\| A \| = 1$. 所有 Φ_ρ 相同者为同一共轭类. $n \times n$ 矩阵的本征值有 n 个，但约束条件 $\| A \| = 1$，$\mathrm{Tr}A = 1$，就是 $\exp\left(-\mathrm{i}\sum_{\rho}^{n}\Phi_\rho\right) = 1$，即

$$\phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_n = 0.$$

由此可见 $SU(n)$ 有 $n-1$ 个共轭类. 但是由 $Z_n = \{\exp[-\mathrm{i}\phi]^p\}$，其中 $\phi = \dfrac{2\pi}{n}$，$p = 0,1,2,\cdots,n-1$，构成的 n 阶循环群，为 $SU(n)$ 的不变子群. 其中元素与 $SU(n)$ 所有元素对易，故 Z_n 为 $SU(n)$ 中心. 商群 $SU(n)/Z_n$ 与 $SU(n)$ 有 1 对 n 的同态映射关系，且两者有局域

同构关系. 因此 $SU(n)/Z_n$ 是连通度为 n 的空间，而 $SU(n)$ 则为其覆盖群，且为单连通的.]

§6.2 李代数的概念

李代数起源于李群的研究，但是后来发展成为代数学的分支. 但是，在本章我们不拟多去讨论抽象李代数，而是尽可能在李群的范畴内讨论李代数的概念和最重要的性质. 我们会发现，与李群对应的李代数完全确定李群的局域性质，结合 §6.1 节对李群的整体性质的讨论，就会对李群的全部性质彻底掌握. 李群的分类和表示，归根结底就是李代数的分类和表示问题.

1. 李代数的一般概念

设 L 为线性空间(维数有限或无限)，Ω 为数域(复或实数域). $\forall X,Y,Z \in L, a,b \in \Omega$，定义双线性封闭运算(或对易运算)

$$[X,Y] \equiv Z \in L,$$

且对易运算满足如下条件：

(1) 第一个因子线性性：

$$[aX + bY, Z] = a[X,Z] + b[Y,Z].$$

(2) 反对称性：

$$[X,Y] = -[Y,X].$$

(3) 雅可比条件(或恒等式)：

$$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0. \quad (6.10)$$

则称 L 为域 Ω 上的李代数.

由条件(1)与(2)易知，对易运算对于第二个因子也是线性的：

$$[X, aY + bZ] = a[X,Y] + b[X,Z]. \quad (6.11)$$

显然有，$\forall X \in L$，

$$[X,X] = 0.$$

但如果 $\forall X,Y \in L$,均有

$$[X,Y] = 0,$$

则称 L 为阿贝尔代数.

例 1 r 秩李群 G 对应的无穷小算子 $\{X^{(\rho)}\}$ 的集合 A,构成 r 维李代数.(6.10) 式的条件显然都满足;此时

$$[X^{(\rho)},X^{(\sigma)}] = X^{(\rho)}X^{(\sigma)} - X^{(\sigma)}X^{(\rho)},$$

$$[X^{(\rho)},X^{(\sigma)}] = C^{\tau}_{\rho\sigma}X^{(\tau)} \quad (\rho,\sigma,\tau = 1,\cdots,r)$$

$$(C^{\tau}_{\rho\sigma} = - C^{\tau}_{\sigma\rho}),$$

$$[X^{(\rho)},X^{(\sigma)}] = 0,$$

以及雅可比条件

$$[[X^{(\rho)},X^{(\sigma)}],X^{(\tau)}] + [[X^{(\sigma)},X^{(\tau)}],X^{(\rho)}] + [[X^{(\tau)},X^{(\rho)}],X^{(\sigma)}] = 0.$$

例 2 n 维欧氏空间 L_n, $\forall x,y \in L_n$,定义普通矢量标乘 x、$y = [x,y] = 0$,因此 L_n 构成 n 维阿贝尔李代数.

例 3 三维欧氏空间 E_3,其基矢为 e_1、e_2、e_3,且 $x,y \in E_3$,定义对易运算为

$$[x,y] = (x_2y_3 - y_2x_3)e_1 + (x_3y_1 - y_3x_1)e_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)e_3, \tag{6.12}$$

其中 $x = \sum_{i=1}^{3} x_ie_i, y = \sum_{i=1}^{3} y_ie_i$. 这里对易运算就是普通所谓矢乘. 则易证(6.11) 式定义了在 E_3 中的一个李代数.

如果数域 Ω 为实数域,对应的李代数称为实李代数. 如果 Ω 为复数域,则对应的李代数称为复李代数. 与李群联系的李代数(见例 1) 总是实李代数. 以后李群的符号用英文大写,相应的李代数则用小写,便于区分.

2. 同构与同态

若 A 与 A' 为定义在数域 Ω 上两李代数,定义线性映射 f 为 $\forall x,y \in A$,及 $a,b \in \Omega$ 有

$$\begin{cases} x \to x' = f(x) \in A', y \to y' = f(y) \in A', \\ aX + bY \to f(aX + bY) = aX' + bY' \in A', \\ [X,Y] \to f[X,Y] = [X',Y'] \in A', \end{cases} \quad (6.13)$$

则称映射 f 为从 A 到 A' 的同态映射. 若映射是一一对应的,则称为同构映射. 如 $A = A'$,称自同构.

例 4 $SU(2)$ 群与 $SO(3)$ 群是局部同构,其相应李代数 $su(2)$ 与 $so(3)$ 则同构.

平移群 $T(1)$ 与 $SO(2)$ 局域同构,其相应李代数 $\left(\text{只有一个无穷小算子}\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ 显然同构.

小结:两李群局域同构的条件是其李代数同构. 李代数的基本问题之一就是寻求所有不同构的李代数.

3. 子代数、理想和中心

子代数 若李代数 A 的子集合 Θ 是其线性子空间,且对 $\forall\ X,Y \in \Theta$,有

$$[X,Y] \equiv Z \in \Theta, \quad (6.14)$$

则称 Θ 为 A 的李子代数,简称子代数.

理想 若 Θ 为李代数 A 的线性子空间,且对 $\forall\ X \in \Theta$, $\forall\ Y \in A$,有

$$[X_\rho,\ X_\sigma] \equiv Z \in \Theta, \quad (6.15)$$

则 Θ 称 A 的理想,或不变子代数. 除零元素与 A 本身以外的理想称为真理想.

在李代数 A 中,$\forall\ X \in A$,且 $Y \in \Theta$(理想),所有满足条件

$$[Y,X] = 0 \quad (6.16)$$

的元素 Y 的集合 Θ 称为李代数 A 的最大阿贝尔子代数,或极大可对易理想,更多时候称为李代数 A 的中心. 中心的所有元素与李代数的元素均可对易. 这里的定义与(6.5) 定义李群的中心是一致的.

例 5 $gL(n,\mathbf{C})$ 是复数域 $\Omega(\mathbf{C})$ 上 $n \times n$ 矩阵的集合. 对于矩阵加法与数乘矩阵两种运算构成 $\Omega(\mathbf{C})$ 上 n^2 维矢量空间, 对 $\forall\ X, Y \in gL(n,\mathbf{C})$ 定义

$$[X,Y] = XY - YX,$$

则 $gL(n,\mathbf{C})$ 构成一李代数, 原因是 $gL(n,\mathbf{C})$ 的对易运算显然满足李代数三条件.

$sL(n,C)$ 为所有迹为零的矩阵的集合(对应李群元素 $A = \exp\sum_i a_i X_i, \det A = 1$), 是 $gL(n,\mathbf{C})$ 的理想. 事实上, 令 $X,Y \in gL(n,\mathbf{C})$, 则

$$\mathrm{Tr}[X,Y] = \mathrm{Tr}(XY - YZ) = 0,$$

即
$$[X,Y] \equiv Z \in sL(n,\mathbf{C}).$$

此外, 令 $\forall\ \lambda \in \Omega(\mathbf{C})$, 则集合 $\{\lambda E\}$ 构成一维子代数, 显然它是 $gL(n,\mathbf{C})$ 的理想. 因为对 $\forall\ X \in gL(n,\mathbf{C})$, 有

$$[X,\lambda E] = 0.$$

同样, $gL(n,\mathbf{C})$中所有对角矩阵的集合 $b(n,\mathbf{C})$构成 n 维阿贝尔子代数. $gL(n,\mathbf{C})$中所有迹为 0 的对角矩阵则构成 $sL(n,\mathbf{C})$的 $n-1$ 维阿贝尔子代数. 它是 $gL(n,\mathbf{C})$的中心.

4. 基底变换

李群三条件并不能唯一确定李代数 A 的基矢$\{X_\rho\}$. 我们可以自由地选取同构的基矢. 对于与李群相对应的李群, 基底的变换导致新的结构常数, 实质上对应新的参数化形式. 基底选择的任意性, 便于我们选取最简捷的基底, 或称标准化基底.

设新基底为$\{X'_\rho\}$, 则有

$$X'_\rho = \sum_{\sigma=1}^{r} a_{\rho\sigma} X_\sigma. \tag{6.17}$$

如果对原基底$\{X_\rho\}$, 结构常数 $C^\sigma_{\rho\sigma}$ 为

$$[X_\rho, X_\sigma] = \sum_\tau C^\tau_{\rho\sigma} X_\tau \quad (\rho,\sigma = 1,\cdots,r), \tag{6.18}$$

则对新基底应有，

$$[X'_\rho, X'_\sigma] = \sum_{\alpha,\beta}[a_{\rho\alpha}X_\alpha,\ a_{\sigma\beta}X_\beta]$$

$$= \sum_{\alpha,\beta,\gamma} a_{\rho\alpha}X_{\sigma\beta}C^{\gamma}_{\alpha\beta}X_\gamma. \tag{6.19}$$

但利用新结构常数$C'^{\tau}_{\rho\sigma}$,(6.19) 式亦可写作

$$[X'_\rho,\ X'_\sigma] = \sum_{\tau} C'^{\tau}_{\rho\sigma} X'_\tau = \sum_{\tau,\lambda} C'^{\tau}_{\rho\sigma}a_{\tau\lambda}X_\lambda. \tag{6.20}$$

对比(6.19)与(6.20)式，有

$$\sum_{\alpha,\beta} a_{\rho\alpha}a_{\sigma\beta}C^{r}_{\alpha\beta} = \sum_{\tau} C'^{\tau}_{\rho\sigma}a_{\tau\gamma}. \tag{6.21}$$

令$\sum\limits_{\gamma} a_{\tau\gamma}a^{-1}_{\gamma\lambda} = \delta_{\tau\lambda}$，在(6.21) 式两边乘以 $a_{\gamma\lambda}$，再对 γ 求和，有

$$C'^{\lambda}_{\rho\sigma} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} a_{\rho\alpha}a_{\sigma\beta}C^{\gamma}_{\alpha\beta}(a^{-1})_{\gamma\lambda}, \tag{6.22}$$

(6.22)式既可视为在基底变换下结构常数变换的规律，亦可视为两个李代数同构其结构常数应满足的条件.

问　　题

1. 李代数 $A=[X_1,X_2,X_3]$,$[X_1,X_2]=X_3$,$[X_2,X_3]=X_1$,$[X_3,X_1]=X_2$，与李代数 $A'=[X'_1,X'_2,X'_3]$,$[X'_1,X'_2]=X_3$,$[X_2,X_3]=-X_3$,$[X_3,X_1]=-X_2$，它们相应的基底变换是什么？[提示：变换矩阵 a 应为对角的. $X'_1=iX_1$, $X'_2=iX_2$, $X'_3=-X_3$.]

2. 试证当 M 为 $n\times n$ 矩阵，则适合条件

$$XM+MX'=0$$

的 $n\times n$ 复矩阵 X、X' 的集合 A 构成李代数.

[提示：由 $X,X',Y,Y'\in A$，且 $XM+MX'=0$ 和 $YM+MY'=0$，有

$$[X,Y]'=[X',Y'],$$

$$[X,Y]M + M[X',Y'] = (XY - YX)M + M(X'Y' - Y'X')$$
$$= - XMY' + YMX' - YMX' + XMY'$$
$$= 0.$$

亦即$[X,Y],[X,Y]' \in A$. 该李代数记为$g(n,M,\mathbf{C})$.]

3. 若M_1与M_2对合,即

$$M_1^2 = M_2,$$

则$g(n,M_1,\mathbf{C})$与$g(n,M_2,\mathbf{C})$同构.

[提示:设$XM_1 + M_1X' = 0 \Rightarrow g(n,M_1,\mathbf{C})$; $YM_2 + M_2Y = 0 \Longrightarrow g(n,M_2,\mathbf{C})$. 作变换$Z = M_1Y, Z' = Y'M_1$,则

$$ZM_1 + M_1Z' = YM_1^2 + M_1^2Y' = YM_2 + M_2Y' = 0,$$

对应$g(n,M_2,\mathbf{C})$. 故此变换即两代数同构映射.]

注:由$g(n,M,\mathbf{C})$可以得到所有经典李代数.

(1) 当M为正则对称矩阵,即$\det M \neq 0$,且$\widetilde{M} = M$时,构成正交代数.

当$n = 2m$(偶数),令

$$M = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix} \quad (M^2 = E_{2m}),$$

则所有满足$XM + MX' = 0$的矩阵X组成李代数D_n,而其中元素X的维数为$2n^2 - n$,

$$X = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & -A_{11}^T \end{pmatrix},$$

当$n = 2m + 1$(奇数),令

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_m \\ 0 & I_m & 0 \end{pmatrix} \quad (M^2 = E_{2m+1}),$$

则满足$XM + MX' = 0$的矩阵X的集合构成李代数B_n,$\forall X \in B_n$,有

$$X = \begin{pmatrix} 0 & u & v \\ -v' & A_{11} & A_{12} \\ -u' & A_{21} & -A'_{11} \end{pmatrix}.$$

(2) 当 M 为正则反对称矩阵时，$\widetilde{M} = -M$，n 必为偶数. 令 $n = 2m$，则适合条件 $XM + MX' = 0$ 的所有 X 集合构成李代数 C_n，其中

$$X = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & -A'_{11} \end{pmatrix}.$$

C_n 代数的维数为 $2n^2 + 1$.

(3) $gL(n+1,\mathbf{C})$ 中所有迹为零的矩阵构成的子代数 A_n. 即 $\forall\ X,Y \in gL(n+1,\ \mathbf{C})$，则

$$\forall\ Z \equiv [X,Y] \in A_n.$$

A_n 的维数为 $n(n+2)$.

§6.3　李代数的基本性质与结构分类

李代数的结构与分类，最主要的依据是它所含李代数的性质.

1. 单纯李代数与半单李代数

单纯李代数系指不含真理想的李代数. 半单李代数则指不含真阿贝尔理想的李代数. 显然单纯李代数一定是半单李代数，反之则不然. 半单李代数应用极广.

例 1　一维李代数均为单纯李代数. 所有经典李代数 A_n、B_n、C_n 和 D_n 为单纯李代数.

例 2　$so(4)$ 代数. 有 6 个元素 J_i、$K_i (i = 1,2,3)$. 其对易关系是

$$[j_i, J_j] = \varepsilon_{ijk} J_k, \quad [K_i, K_j] = \varepsilon_{ijk} K_k,$$
$$[J_j, K_j] = 0, \qquad (i,j,k = 1,2,3). \tag{6.23}$$

实质上子代数 $J = [J_1, J_2, J_3]$ 与 $K = [K_1, K_2, K_3]$ 均是 $so(4)$ 的

真理想，故 $so(4)$ 为非单纯李代数. 由(6.22)式知，这两个理想均非阿贝尔的，故 $so(4)$ 为半单李代数.

例 3 E_2 代数的三个元素有对易关系：

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_3] = -X_2, \quad [X_2, X_3] = 0.$$

显然阿贝尔子代数 $N = [X_2, X_3]$ 是 E_2 代数的真理想，故 E_2 为非半单李代数.

从群结构来说，单纯李代数和半单李代数显然是最简单的. 从某种意义上讲，一般李代数的研究的目的在于获取该代数所包含的单纯或半单李代数的信息. 为此，必须引入导出代数、幂零代数与可解代数的概念. 所谓导出代数可以类比“导数”.

2. 导出代数、可解代数与幂零代数

导出代数 $\forall X, Y \in A$(李代数)，$\forall [X, Y] \equiv Z$ 的集合构成 $A^{(1)}$，简记为

$$A^{(1)} = [A, A], \tag{6.24}$$

$A^{(1)}$ 为 A 的理想，$A^{(1)}$ 称为 A 的导出代数. 相应的高次导出代数是

$$\begin{cases} A^{(2)} = [A^{(1)}, A^{(1)}], \\ \cdots\cdots \\ A^{(n)} = [A^{(n-1)}, A^{(n-1)}]. \end{cases} \tag{6.25}$$

子代数系列 A, $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, …, $A^{(n)}$… 构成所谓 A 的导出链，且有(记 $A^{(0)} \equiv A$)

$$A^{(0)} \supset A^{(1)} \supset A^{(2)} \supset \cdots \supset A^{(n)} \supset \cdots \tag{6.26}$$

可解代数 若在导出链(6.26)中，存在正整数 k，使得

$$A^{(k)} = 0, \tag{6.27}$$

则称代数 A 为可解代数. 显然，可解代数具有性质：

(1) 可解代数的子代数及其同态像均系可解的.

(2) 可解代数不包含单纯子代数.

(3) 设 A 及其真理想 A_0 是可解的，则其商代数 A/A_0 亦可解. 这里商代数由 A_0 及其陪集构成.

例 4 E_2 代数. 此时 $A=\{X_1, X_2, X_3\}$, 则 $A^{(1)}=[X_2,X_3]\equiv N$(见例 3), $A^{(2)}=0$. 故 E_2 为可解代数.

幂零代数 定义 $A'=A$, 及

$$A^2=A^{(1)}=[A,A],\ A^3=[A,A^2],\ \cdots,\ A^n=[A,A^{n-1}]. \tag{6.28}$$

这里 $A^k(k=1,2,\cdots,n)$ 都是 A 的理想. 实际上, $A^2=[A,A]\subset A^1\equiv A$, $A^n=[A,A^{n-1}]$. 亦即有下列子代数系列

$$A\supset A^2\supset A^3\supset\cdots\supset A^n\supset\cdots \tag{6.29}$$

称为降中心链或理想的降序列. 只有对于某正整数 K, 上链中止, 即 $A^K=0$, 则代数 A 称为幂零代数.

由幂零代数与导数的定义, 可以证明

$$A^{n+1}\supset A^{(n)}. \tag{6.30}$$

当 $n=1$ 时, $A^2=[A,A]=A^{(1)}$. 设(6.30)式在 $n=k$ 时成立, 则 $A^{k+1}\supset A^{(k)}$. 当 $n=k+1$ 时,

$$\begin{aligned}A^{(k+1)}&=[A^{(k)},\ A^{(k)}]\subset[A^{(k)},\ A^{k+1}]\\&\subset[A,\ A^{k+1}]=A^{k+2}.\end{aligned}$$

由此可见:

(1) 若 A 幂零, 则必可解; 反之则不然.

(2) 幂零代数的子代数及其同态像(包含两代数) 均为幂零.

例 5 所有形如下式的上三角矩阵

$$X=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&\cdots&x_{1n}\\0&x_{22}&\cdots&x_{2n}\\\vdots&\ddots&&\vdots\\0&\cdots&\cdots&x_{nn}\end{pmatrix},$$

构成李代数, 记为 $t(n,\mathbf{C})$. 在 $t(n,\mathbf{C})$ 中所有对角元素相等: $x_{11}=x_{22}=\cdots=x_{nn}\equiv\lambda$ 的矩阵集合亦构成李代数, 记为 $n(n,\mathbf{C})$. 可证明 $t(n,\mathbf{C})$ 可解, 而 $n(n,\mathbf{C})$ 则幂零.

令 $n_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 表示 $n(n,\mathbf{C})$ 中所有形如

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & x_{1i} & \cdots & \cdots & x_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & x_{2,i+1} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & x_{n-i+1,n} \\ \vdots & & & & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{6.31}$$

的矩阵的集合，即

$$n_{n+1} = (0), \quad n_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & x_{nn} \\ \vdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \cdots,$$

$$n_2 = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & \cdots & \cdots & x_{1n} \\ 0 & 0 & x_{23} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & x_{n+1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad n_1 = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & \cdots & x_{1n} \\ & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & x_{nn} \end{pmatrix}.$$

用归纳法证明：

$$x_{11} = x_{22} = \cdots = x_{nn} = \lambda,$$

$$n(n,\mathbf{C})^{(i-1)} \subset n_i \quad (i = 1,2,\cdots,n+1). \tag{6.32}$$

当 $i=1$ 时，$n(n,\mathbf{C})^{(0)} = n(n,\mathbf{C})$，上式成立. 设上式当 $i = j \leqslant n$ 时成立. 令 $\forall\, B \in n(n,\mathbf{C})$，

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda_{12} & \cdots & \cdots & \lambda_{1n} \\ 0 & \lambda & \lambda_{23} & \cdots & \lambda_{2n} \\ \vdots & & & \ddots & \lambda_{n-n,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda \end{pmatrix}, \tag{6.33}$$

则

$$CB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda x_{1j} & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda x_{2j} & & * \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \lambda x_{n-j+1,n} \\ & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \vdots \\ 0 & & & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$BC = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda x_{1j} & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda x_{2,j+1} & & * \\ \vdots & & & & & & \ddots & \\ \vdots & & & & & & & \lambda x_{n-j+1,n} \\ \vdots & & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & 0 \end{pmatrix},$$

故$[C,B]\in n_{j+1}$，即

$$n(n,\mathbf{C})^{(j)}=[n(n,\mathbf{C}),n(n,\mathbf{C})^{(j-1)}]\subset[n(n,\mathbf{C}),\ n_j]\subset n_{j+1}.$$

上式表明(6.32)式对 $j+1$ 时也成立. 同时 $n_{n+1}=0$，故 $n(n,\mathbf{C})^{(n)}=\{0\}$. 可见 $n(n,\mathbf{C})$ 为幂零.

此外，$t(n,\mathbf{C})^{(1)}\equiv[t(n,\mathbf{C}),\ t(n,\mathbf{C})]\subset n(n,\mathbf{C})$，故 $t(n,\mathbf{C})^{(1)}$ 幂零、可解，故 $t(n,\mathbf{C})$ 也可解.

例 6 E_2 代数. $A^1=[X_1,X_2,X_3]$，$A^2=[A,A]=A^{(1)}=[X_2,X_3]$，$A^3=[A,A^2]=A^2$. 即是说，$E_2$ 可解，但不幂零.

注意，幂零与可解代数与单纯李代数、半单代数是概念完全不同的代数. 利用这两类概念可以将李代数作完全不同的两种结构类型分析.

3. 直和与半直和

$\forall\ x \in A$，有 $\sum_{i=1}^{n} X_i = X$，其中 $X_i \in A_i (i = 1, \cdots, n)$，并且对任意 A_i 与 $A_j (i \neq j)$，有 $A_i \cap A_j = \varnothing$，$[A_i, A_j] = 0$，则称李代数 A 为其诸李子代数 A_i 的直和，记为

$$A = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n. \tag{6.34}$$

若 A_1 与 A_2 为 A 的子代数，且对 $\forall\ X \in A$，有 $X = X_1 + X_2$，$X_1 \in A_1$，$X_2 \in A_2$，并且

$$[A_1, A_1] \subset A_1, \quad [A_2, A_2] \subset A_2,$$
$$A_1 \cap A_2 = \varnothing, \ [A_1, A_2] \subset A_1,$$

则称 A 为 A_1 与 A_2 的半直和，记为

$$A = A_1 \oplus_S A_2. \tag{6.35}$$

显然，A_1 是 A 的理想. 注意直和与半直和的不同在于，前者 $[A_1, A_2] = 0$，表明两子代数 A_1 与 A_2 彼此无关联；而后者则有 $[A_1, A_2] \subset A_1$，表明两者有关联，A_1 是理想，A_2 是子代数.

可解李代数的直和亦可解. 幂零代数的直和也幂零. 证明极其简单.

例 7 $so(4)$ 代数. 子代数 $J = [J_1, J_2, J_3]$ 与 $K = [K_1, K_2, K_3]$ 有

$$[J_i, J_j] = \varepsilon_{ijk} J_k, \quad [K_i, K_j] = \varepsilon_{ijk} K_k, \quad [J_i, K_j] = 0,$$

故

$$so(4) = so_J(3) \oplus so_K(3).$$

例 8 E_2 代数. 见例 4，$A_1 = [X_2, X_3]$ 是 E_2 的理想. 设 X_1 生成子李代数 A_2，则

$$E_2 = A_1 \oplus_S A_2. \tag{6.36}$$

李群分解的基本定理. 任意李代数 A 都可以表示为一个可解李代数 P 与一个半单李代数 S 的半直和

$$A = p \oplus_S s. \tag{6.37}$$

例 8 就是本定理的一个实例. 本定理不予证明. 由于可解李代数结

构的分析，包括相应可解子代数链 $A^{(1)}, A^{(2)}, \cdots, A^{(n)}, \cdots$ 可以直接得到．剩下的问题就是对半单李代数的群结构进行讨论了．何况许多与实际应用相关的李群都是半单李群．

以上关于直和、半直和的概念，对应的李群就是直积和半直积了．$G = H \otimes K$，或 $G = H \otimes_S K$．关于李群的分解的基本定理，应为

$$G = H \otimes_S K, \tag{6.38}$$

其中 H 为可解李群，K 为半单李群．

这里可解李群、半单李群以及幂零李群、导出李群、单纯李群等等，只不过就是相应无穷小算子构成的李代数是可解、半单以及幂零、导出、单纯罢了．

李群与李代数的关系，我们可以用图 6.2 表示（混合李群结构请参阅 §6.1 节）．李代数与单连通的李群 SG 是一一对应（同构）的．同一李代数都可以对应许多的多连通李群 $G_i(i = 1,2,\cdots,n)$，即 A 同态对应 G_i．SG 称为 G_i 的通用覆盖群或覆盖群．其中离散群 D_i，是 SG 到 G_i 同态映射的核，即 $G_i \cong SG/D_i$．

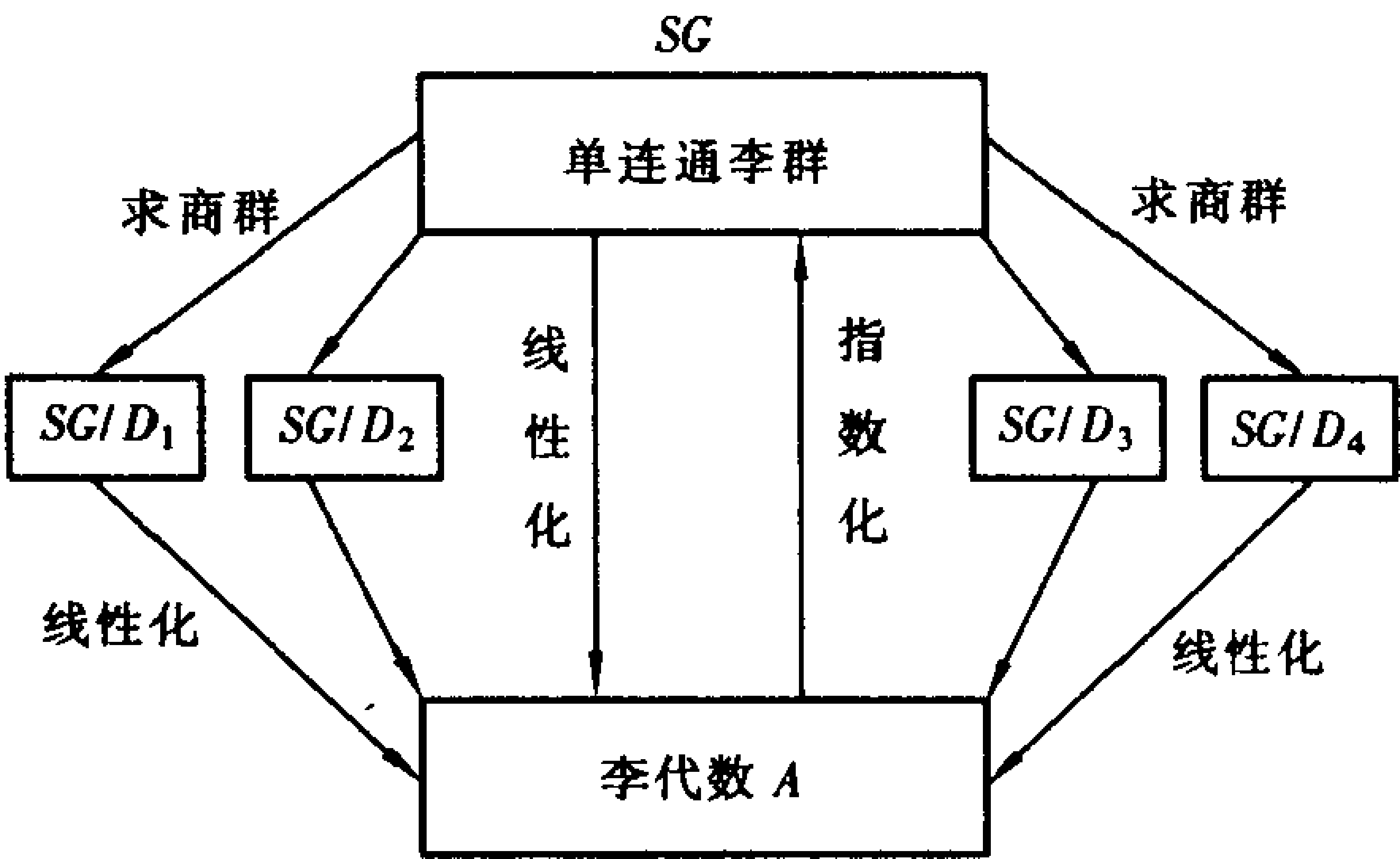


图 6.2　连通李群与李代数关系

问　题

1. 证明 E_3 代数可以表示为空间平移群 T_3 的三个无穷小算子集合 $p=(p_1,p_2,p_3)$ 与 $so(3)$ 代数 $J=(J_1,J_2,J_3)$ 的半直和.

[提示：p 与 J 均为 E_3 的子代数，$[p_i,p_j]=0$，$[J_i,J_j]=\varepsilon_{ijk}J_k$，且 p 为 A 的阿贝尔理想，$[p_i,J_j]=\varepsilon_{ijk}p_k(i\neq j)$，$[p_i,J_i]=0$，因此 E_3 非半单纯代数，可表为 $E_3=p\oplus_S so(3)$.]

2. 证明 E_3 代数不可解.

[提示：E_3 的导出代数，$A^{(1)}=[E_3,E_3]=E_3$.]

3. 设 N 为李代数 A 的理想，试证 $N^{(1)}=[N,N]$ 也是 A 的理想.

[提示：$[A,N^{(1)}]=[A,[N,N]]\subset[N,[N,A]]+[N+[A,N]]\subset[N,N]+[N,N]=N^{(1)}$.]

4. 试证 $gL(n,\mathbf{C})$ 代数为 A_{n-1} 与纯量矩阵构成的一维李代数 $p(n,\mathbf{C})$ 的直和 $gL(n,\mathbf{C})=A_{n-1}\oplus p(n,\mathbf{C})$.

[提示：$\forall X\in gL(n,\mathbf{C})$，且 $\mathrm{Tr}X=x$，则

$$X=\left(X-\frac{x}{n}E_n\right)+\frac{x}{n}E_n, \tag{6.39}$$

其中 $\mathrm{Tr}\left(X-\frac{x}{n}E_n\right)=0$，故 $X-\frac{x}{n}E_n\in A_{n-1}$. 又令 $X=X_1+\lambda_1E=X_2+\lambda_2E$，其中 $X_1,X_2\in A_{n-1}$，$\lambda_1\lambda_2\in\Omega(\mathbf{C})$. 则 $X_1-X_2=(\lambda_2-\lambda_1)E$. $\mathrm{Tr}(X_1-X_2)=\mathrm{Tr}X_1-\mathrm{Tr}X_2=0\Longrightarrow\mathrm{Tr}(\lambda_2-\lambda_1)E=(\lambda_2-\lambda_1)n=0$. 故 $\lambda_1=\lambda_2$. 表明(6.39)式的唯一性.]

5. 设 N_1 与 N_2 为 A 的可解理想，则 N_1+N_2 亦为可解理想.

[提示：设 $N_1^{(n_1)}=\varnothing$，$N_2^{(n_2)}=\varnothing$. 则

$$\begin{aligned}(N_1+N_2)^{(1)}&=[N_1+N_2,\ N_1+N_2]\subset[N_1,N_2]+N_2\\&=N_1^{(1)}+N_2.\end{aligned}$$

令$(N_1+N_2)^{(m)}\subset N_1^{(m)}+N$，则用归纳法可证

$$\begin{aligned}[N_1+N_2]^{(m+1)} &\subset [N_1^{(m)}+N_2, N^{(m)}+N_2] \\ &\subset [N_1^{(m)}, N_1^{(m)}]+N_2 \\ &= N_1^{(m+1)}+N_2.\end{aligned}$$

因此，
$$(N_1+N_2)^{(n_1)}\subset N_1^{(n_1)}+N_2\subset N_2$$
$$\Longrightarrow (N_1+N_2)^{(n_1+n_2)}\subset N_2^{(n_2)}=\phi.$$

故 N_1+N_2 亦可解，而 A 应有一个极大可解理想，称为根基.]

6. 设 h 为李代数 A 的根基，则商代数 A/h 必为半单.

[提示：设 $\overline{A}$ 为 A/h 的一个可解理想. 令 $\overline{A}_1$ 为同态映射 $A\xrightarrow{f}A/h$ 中 $\overline{A}$ 的原像，即 $A_1\xrightarrow{f}\overline{A}_1$，则 A_1 可解. 由题设知 $A_1=h$，$\overline{A}_1=\varnothing$，故 A/h 半单.]

7. 试证(6.31)与(6.32)式.

8. 设 X 为代数 A 给定元素，定义映射

$$ad(X)=[X,Z],\ \forall\ Z\in A, \tag{6.40}$$

则 $ad(X)$ 给出 A 的一个表示(以后称伴随表示(正则表示)).

[提示：$\forall\ Y\in A$，有

$$\begin{aligned}[ad(X),\ ad(Z)]Y &= ad(X)ad(Z)Y-ad(Z)ad(X)Y \\ &= ad(X)[Z,Y]-ad(Z)[X,Y] \\ &= [X,[Z,Y]]-[Z,[X,Y]] \\ &= [[X,Z],Y] \\ &= ad([X,Z])Y.\end{aligned}$$

实质上这是一同态映射，读者试证明，此外容易证明 $ad(\lambda_1X_1+\lambda_2X_2)=\lambda_1adX_1+\lambda_2adX_2$，$ad([X_1,X_2])=[ad(X_1),ad(X_2)]$，$X_1,X_2$ 为 A 的固定元素.]

9. 设 $\forall\ X,Y\in A$，定义

$$(X,Y)=\mathrm{Tr}ad(X)ad(Y), \tag{6.41}$$

证明：(1) $(X,Y)=(Y,X)$.

(2) $(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2, Y) = \lambda_1(X_1, Y) + \lambda_2(X_2, Y)$.

(3) $ad(K,(X,Y)) \equiv (ad(K,X),Y) + (X, ad(KY)) = 0$.

[提示：(6.41) 定义 A 上卡当(Canton) 内积性质(1)、(2) 是显然的.

$$\begin{aligned}(3)\text{ 式左} &= \mathrm{Tr}\{ad([K,X]ad(Y)\} + \mathrm{Tr}\{ad(X)ad([K,Y])\} \\ &= \mathrm{Tr}\{ad(K)ad(X)ad(Y)\} - \mathrm{Tr}\{ad(X)ad(K)ad(Y)\} \\ &\quad + \mathrm{Tr}\{ad(X)ad(K)ad(Y)\} - \mathrm{Tr}\{ad(X)ad(Y)ad(K) \\ &= 0.\end{aligned}$$

此式表明卡当内积在伴随映射变换(6.40)下具有不变性，即此内积是"标量".]

§6.4 基林度规与半单李代数的卡当判据

我们研究的重点转而讨论半单李代数的群结构和表达的最简捷形式.

1. 半单李代数与单纯李代数的关系

这个重要定理是 1894—1899 年基林(W. Killing)与卡当(E. Canton)证明的(可参见万哲先编写的《李代数》，科学出版社，1964 年. 该书第四章有详细证明)：李代数 A 是半单李代数的充分而且必要的条件是，A 可表示有限个单纯李代数 $A_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 的直和：

$$A = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n, \tag{6.42}$$

而且其中 A_i 均为 A 的理想.

但这个定理不便应用，必须寻求更方便的判据以鉴别李群的半单纯性，并进而简化其表达形式(选择适当基矢).

2. 基林度量张量

在群参数空间中定义基林度量张量

$$g_{\sigma\lambda} = C^{\tau}_{\sigma\rho}C^{\rho}_{\lambda\tau}(\sigma,\lambda,\rho,\tau = 1,\cdots,r;\text{右式哑指标求和}). \quad (6.43)$$

显然，$g_{\sigma\lambda}$ 具有对称性.

$$g_{\sigma\lambda} = C^{\tau}_{\sigma\rho}C^{\rho}_{\lambda\tau} = C^{\rho}_{\lambda\tau}C^{\tau}_{\sigma\rho} = g_{\lambda\sigma}. \quad (6.44)$$

这里用群或李代数的结构常数定义的度规张量，又称基林形式(Killing form). 在上节问题 9 用抽象形式定义卡当内积.

这里 $g_{\sigma\lambda}$ 实际上是协变的，为定义逆变度量张量 $g^{\sigma\lambda}$，先定义三阶张全反对称张量 $C_{\sigma\mu\gamma}$. 其定义为

$$C_{\sigma\mu\nu} = g_{\sigma\lambda}C^{\lambda}_{\mu\nu}. \quad (6.45)$$

由于 $g_{\sigma\nu}$ 对称性，和 $C^{\lambda}_{\mu\nu}$ 反对称($C^{\lambda}_{\mu\nu} = -C^{\lambda}_{\nu\mu}$)，

$$C_{\sigma\mu\nu} = -g_{\sigma\lambda}C^{\lambda}_{\nu\mu} = -C_{\sigma\nu\mu}. \quad (6.46)$$

代入 $g_{\sigma\lambda}$ 定义，有

$$\begin{aligned}
C_{\sigma\mu\nu} &= C^{\tau}_{\sigma\rho}C^{\rho}_{\lambda\tau}C^{\lambda}_{\mu\nu} = C^{\tau}_{\sigma\rho}C^{\lambda}_{\mu\nu}C^{\rho}_{\lambda\tau} \\
&= -C^{\tau}_{\sigma\rho}C^{\lambda}_{\mu\nu}C^{\mu}_{\tau\lambda} \quad (\text{代入 Jacobi 恒等式}) \\
&= C^{\tau}_{\sigma\rho}[C^{\lambda}_{\nu\tau}C^{\rho}_{\mu\lambda} + C^{\lambda}_{\tau\mu}C^{\rho}_{\nu\lambda}] \\
&= C^{\tau}_{\sigma\rho}C^{\lambda}_{\nu\tau}C^{\rho}_{\sigma\lambda} + C^{\tau}_{\sigma\rho}C^{\lambda}_{\tau\mu}C^{\rho}_{\nu\lambda} \quad (\mu\longleftrightarrow\sigma) \\
&= C^{\tau}_{\mu\rho}C^{\lambda}_{\nu\tau}C^{\rho}_{\sigma\lambda} + C^{\rho}_{\mu\rho}C^{\lambda}_{\tau\sigma}C^{\rho}_{\nu\lambda},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{\mu\sigma\nu} &= C^{\lambda}_{\mu\tau}C^{\rho}_{\nu\lambda}C^{\tau}_{\sigma\rho} + C^{\rho}_{\mu\lambda}C^{\tau}_{\rho\sigma}C^{\lambda}_{\nu\tau} \quad (\text{因子次序交换}) \\
&= -C^{\lambda}_{\tau\mu}C^{\rho}_{\nu\lambda}C^{\tau}_{\sigma\rho} - C^{\rho}_{\mu\lambda}C^{\tau}_{\sigma\rho}C^{\lambda}_{\nu\tau} \quad (C^{\lambda}_{\tau\mu} = -C^{\lambda}_{\mu\tau} \quad C^{\tau}_{\rho\sigma} = -C^{\tau}_{\sigma\rho}) \\
&= -C_{\sigma\mu\nu}.
\end{aligned} \quad (6.47)$$

即是说，$C_{\sigma\mu\nu}$ 确为三阶全反对称张量.

对于半单李代数，$\det\{g_{\sigma\lambda}\} \neq 0$，则令

$$g_{\sigma\lambda} \cdot g^{\lambda\sigma'} = g^{\sigma\lambda} \cdot g_{\lambda\sigma'} = \delta_{\sigma\sigma'}, \quad (6.48)$$

这里 $g^{\sigma\lambda}$ 为二阶逆变度规张量，也有

$$g^{\sigma\lambda} = g^{\lambda\sigma} \quad (\sigma,\lambda = 1,2,\cdots,r). \quad (6.49)$$

原则上就可以根据 $g_{\sigma\lambda}$ 或 $g^{\sigma\lambda}$ 将逆变或协变矢量互相变换，可以构造各种混合张量，或标量(不变量).

3. 卡塞米尔(Casmir)算子

(1) 二阶卡塞米尔算子的定义是

$$C_2 = g^{\rho\sigma}X_\rho X_\sigma. \tag{6.50}$$

这样定义的 C_2 跟所有半单李代数的元素对易,由舒尔引理,$C_2 = \lambda E$,相当于量子论中的守恒算子. $\forall\ X_\tau \in A$,计算

$$\begin{aligned}
[C_2, X_\tau] &= g^{\rho\sigma}[X_\rho X_\sigma,\ X\tau] \\
&= g^{\rho\sigma}\{X_\rho[X_\sigma,\ X_\tau] + [X_\rho, X_\tau]X_\sigma\} \\
&= g^{\rho\sigma}C^\lambda_{\sigma\tau}X_\rho X_\lambda + g^{\rho\sigma}C^\lambda_{\rho\tau}X_\lambda X_\sigma \\
&\xlongequal{(第二项\ \rho\leftrightarrow\sigma)} g^{\rho\sigma}C^\lambda_{\sigma\tau}X_\rho X_\lambda + g^{\sigma\rho}C^\lambda_{\sigma\tau}X_\lambda X_\rho \\
&= g^{\rho\sigma}C^\lambda_{\sigma\tau}[X_\rho X_\lambda + X_\lambda X_\rho] \\
&= g^{\rho\sigma}g^{\lambda\nu}C_{\nu\sigma\tau}[X_\rho X_\lambda + X_\lambda X_\rho].
\end{aligned}$$

其中因子 $C_{\nu\sigma\tau}$ 的指标$(\nu,\ \sigma,\ \tau)$ 是全对称的,因子 $g^{\rho\sigma}\cdot g^{\lambda\nu}[X_\rho X_\lambda + X_\lambda X_\rho]$ 对脚标(ν,σ) 是对称的,故 $\forall\ X_\tau \in A$,有

$$[C_2, X_\tau] = 0. \tag{6.51}$$

例 1 $so(3)$代数,

$$C_2 = -\frac{1}{2}(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2) \propto L^2, \tag{6.52}$$

实际上是角动量平方算子.

例 2 $so(2,1)$代数.

$$C_2 = -\frac{1}{2}(X_1^2 - X_2^2 - X_3^2). \tag{6.53}$$

例 3 $so(4)$代数. 因为$so(4) = so(3)\oplus so(3)$,有两个卡氏算子,

$$C_2^{(1)} = J^2 + K^2, \quad C_2^{(2)} = K^2 - J^2. \tag{6.54}$$

(2) 推广的卡塞米尔算子 C_n,其定义是

$$C_n = C^{\beta_2}_{\alpha_1\beta_1}C^{\beta_3}_{\alpha_2\beta_2}\cdots C^{\beta_1}_{\alpha_n\beta_n}X^{\alpha_1}X^{\alpha_2}\cdots X^{\alpha_n}, \tag{6.55}$$

其中 $X^{\alpha_1} = g^{\alpha_1\alpha_2}X_{\alpha_2}$. 可以证明 C_n 与 $\forall\ X \in A$,

$$[C_n, X] = 0. \tag{6.56}$$

但是,并非所有的 C_n 都是独立的.

例 4 $so(3)$代数.

$$\begin{aligned} C_3 &= X_1X_2X_3 - X_1X_3X_2 + X_2X_3X_1 - X_2X_1X_3 \\ &\quad + X_3X_1X_2 - X_3X_2X_1 \\ &= X_1[X_2, X_3] + X_2[X_3, X_1] + X_3[X_1, X_2] \\ &= X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = -2C_2. \end{aligned}$$

根据拉卡(Racah)的结果,一般秩为 l 的李代数有 l 个独立的卡氏算子(有些代数符号的含义,在第七章读者可以找到):

$$\left.\begin{aligned} &A_l:\ C_2, C_3, \cdots, C_{l+1}, \\ &B_l:\ C_2, C_4, \cdots, C_{2l}, \\ &C_l:\ C_2, C_4, \cdots, C_{2l}, \\ &D_l:\ C_2, C_4, \cdots, C_{2l-2}, C_l, \\ &G_2:\ C_2, C_6, \\ &F_4:\ C_2,\ C_6,\ C_8,\ C_{12}, \\ &E_6:\ C_2,\ C_5,\ C_6,\ C_8,\ C_9,\ C_{12}, \\ &E_7:\ C_2,\ C_6,\ C_8,\ C_{10},\ C_{12},\ C_{14},\ C_{18}, \\ &E_8:\ C_2,\ C_8,\ C_{12},\ C_{14},\ C_{18},\ C_{20},\ C_{24},\ C_{30}. \end{aligned}\right\}\text{经典代数}$$

以后我们可以知道,广义卡氏算子的本征值集合可以作为李群的不可约表示编号.

4. 半单李代数的卡当判据

一个李代数是半单纯的,其充要条件是

$$\det[g_{\rho\sigma}] \neq 0. \tag{6.57}$$

其必要条件的证明,请见万哲先编《李代数》第四章. 现证充分条件. 设 A 为非半单纯的,即含有阿贝尔理想,则必有 $\det[g_{\rho\sigma}] = 0$. 用加撇的指标表示它. 事实上,

$$g_{\sigma\lambda'} = C^{\tau}_{\sigma\rho}C^{\rho}_{\lambda'\tau}([X_{\lambda'}, X_{\tau}] = C^{\rho}_{\lambda'\tau}X_{\rho}),$$

由理想定义，$X_\tau \in A, X_{\lambda'} \in \Theta$(理想)，$\forall X_\rho \in \Theta$,

$$
\begin{aligned}
\text{上式} &= C^\tau_{\sigma\rho'} C^{\rho'}_{\lambda'\tau} \quad (\text{若 } X_\rho \overline{\in} \Theta, \text{则 } C^{\rho}_{\lambda'\tau} = 0) \\
&= - C^\tau_{\rho'\sigma} C^{\rho'}_{\lambda'\tau} \quad (\text{反对称性}, C_{\rho'\sigma} = - C_{\sigma\rho'}) \\
&= - C^{\tau'}_{\rho'\sigma} C^{\rho'}_{\lambda'\tau'} \quad (\text{理由同前两行}) \\
&= 0 \quad ([X_{\lambda'}, X_{\tau'}] = C^{\rho'}_{\lambda'\tau'} X_{\rho'} = 0 \longrightarrow C^{\rho'}_{\lambda'\tau'} = 0).
\end{aligned}
$$

因此行列式 $\det[g_{\sigma\lambda'}]$ 的第 λ' 列为 0，故有

$$\det[g_{\sigma\lambda}] = 0. \tag{6.58}$$

例 5 $so(3)$ 代数. 半单纯.

$$g_{11} = C^\tau_{1\rho} C^\rho_{1\tau} = 1 \times (-1) + (-1) \times 1 = -2,$$

$$g_{22} = g_{33} = 2, \quad g_{ij} = 0 \quad (i \neq j, i, j = 1,2,3),$$

故有

$$g = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det[g_{\sigma\lambda}] = -8 < 0(\text{负定}).$$

例 6 $so(2,1)$ 代数，半单纯.

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_2, X_3] = -X_1, \quad [X_3, X_1] = X_2,$$

即 $C^3_{12} = C^2_{31} = 1, C^1_{23} = -1$，其余为 0. 由此

$$g_{11} = -1, \quad g_{22} = g_{33} = 1, \quad g_{ij} = 0 \quad (i \neq j).$$

$$\det[g_{\sigma\lambda}] = -8 < 0.$$

例 7 E_2 代数. $C^3_{12} = 1, C^2_{13} = -1$，其余结构常数为 0. 易得 $g_{11} = -2$，其余为 0.

$$g = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det[g_{\sigma\lambda}] = 0.$$

故 E_2 为非半单. 事实上 $E_2 = T_2 \oplus_S A_1$.

5. 紧致李代数的判据

对于实数域的李代数，若其基林形式是负定的，则必为紧致

的，对应的李代数是半单纯的．紧致李代数对应的李群也是紧致的．所有复数域上的李代数都是非紧致的，其基林形式是不定的．非紧致李代数对应非紧致李群．

问　题

1. 试证 $so(3)$ 与 $so(2,1)$ 是单纯李代数．

2. 试证 E_3 是非紧非半单李代数．

[提示：先计算 $C^{\tau}_{\rho\sigma}$，再计算 $g_{\rho\sigma}$，$6\times n$ 矩阵．$\det[g_{\rho\sigma}]=0$．]

3. 试证 E_n 是非紧非半单李代数，它可表示为

$$E_n = T_n \oplus_S so(n) \tag{6.59}$$

[提示：$T=(T_1,\cdots,T_n)$，$so(n)=\{J_{ij}\}$，其中 $J_{ij}=-\mathrm{i}\left(x_i\frac{\partial}{\partial x_j}-x_j\frac{\partial}{\partial x_i}\right)(i>j,i,j=1,\cdots,n)$，共 $n(n-1)/2$ 个，且有

$$[J_{ab},J_{cd}]=-\mathrm{i}[\delta_{ba}J_{bd}+\delta_{ad}J_{bc}-\delta_{ac}J_{bd}-\delta_{bd}J_{ac}],$$

$$[T_i,T_j]=0,\quad [T_i,J_i]=0,$$

$$[T_i,J_{ab}]=\alpha_i T_i,$$

其中系数 α_i 可以精细算出．现 $g_{\sigma\lambda}$ 为 $n(n+1)/2$ 维矩阵，$\det[g_{\sigma\lambda}]=0$．故非半单代数，$T_n$ 为其理想，故有(6.59)式．]

4. 计算 $so(n)$ 的基林形，设已知 $n(n-1)/2$ 个无穷小算子为

$$(X_{ab})_{cd}=-\mathrm{i}[\delta_{ac}\delta_{bd}-\delta_{ad}\delta_{ba}] \tag{6.60}$$

$$(a,b)=1,2,\cdots,n,a>b;\ c,d=1,2,\cdots,n).$$

[提示：$[X_{ab},X_{cd}]=-\mathrm{i}(\delta_{bc}X_{ab}+\delta_{ad}X_{ba}-\delta_{ac}X_{bd}-\delta_{bd}X_{ac})$．

$$g_{\sigma\lambda}=\sum_{\rho,\tau}C^{\rho}_{\sigma\tau}C^{\tau}_{\lambda\rho}\equiv \mathrm{Tr}[ad(X_\sigma)ad(X_\lambda)].$$

但
$$[X_\rho,X_\sigma]=C^{\tau}_{\rho\sigma}X_\tau=ad(X_\rho)_{\tau\sigma}X_\tau,$$

其中
$$(ad(X_\rho))_{\tau\sigma}=C^{\tau}_{\rho\sigma}.$$

故
$$\mathrm{Tr}[ad(X_\sigma)ad(X_\lambda)]=\mathrm{Tr}[C^{\beta}_{\sigma\alpha}C^{\nu}_{\lambda\mu}]$$

$$= [C^{\beta}_{\sigma\alpha}C^{\nu}_{\lambda\mu}]\delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu} = C^{\beta}_{\sigma\alpha}C^{\alpha}_{\lambda\beta}.$$

这里证明了基林形两种定义的等价性.

注意 $\mathrm{Tr}[X_{ab}X_{cd}] = 2(\delta_{ac}\delta_{bd} - \delta_{ad}\delta_{bc})$,

结构常数

$$C^{pq}_{ab,cd} = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(T_{ab}[T_{cd}, T_{pq}])$$

$$\Longrightarrow g_{ab,cd} = \sum_{\mu\nu,\alpha\beta} C^{\mu\nu}_{ab,\alpha\beta}C^{\alpha\beta}_{cd,\mu\nu} = -\delta_{ab,cd}2(n-2).$$

亦即除 $so(2)$, $g=0$, $so(n)$ 的 $\det[g] = -2n(n-2)$, 为负定, 故均为半单代数和紧代数.]

*5. 计算 $su(n)$ 的基林形, 设其无穷小算子:

对称 $$(X^{(1)}_{ab})_{cd} = \frac{1}{2}[\delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{bc}] \quad (a \neq b),$$

不对称 $$(T^{(2)}_{ab})_{cd} = -\frac{\mathrm{i}}{2}[\delta_{ac}\delta_{bd} - \delta_{ad}\delta_{bc}].$$

以上两类共 $[n(n-1)/2] \times 2 = n(n-1)$ 个.

若迹对角

$$(X^{(3)}_{a})_{bc} = \begin{cases} \delta_{bc} \cdot [2a(a-1)]^{-1/2} & (b < a), \\ -\delta_{bc} \cdot [(a-1)/2a]^{1/2} & (b = a, 2 \leqslant a \leqslant n), \\ 0 & (b > a). \end{cases}$$

此类 $n-1$ 个. 总数 $n(n-1)+n-1 = n^2-1$ 个. 用盖尔曼记号重新编号,

$$X_1 = X^{(1)}_{12},\ X_2 = X^{(2)}_{12},\ X_3 = X^{(3)}_{2},$$
$$X_4 = X^{(1)}_{13},\ X_5 = X^{(2)}_{13},\ X_6 = X^{(4)}_{23},$$
$$X_7 = X^{(2)}_{23},\ X_8 = X^{(3)}_{3},\ \cdots,\ X_{n^2-1} = X^{(3)}_{n,n-1}. \quad (6.61)$$

在新编号下有

$$\mathrm{Tr}(X_aX_b) = \frac{1}{2}\delta_{ab} \quad (a, b = 1, \cdots, n^2-1),$$

计算较复杂, 请参阅马中琪的《群论及其在物理中应用》第七章, 北京理工大学出版社, 1988. 结果有

$$g_{\sigma\lambda} = -\delta_{\sigma\lambda} n \quad (\sigma, \lambda = 1, 2, \cdots, n^2 - 1).$$

$$\det[g_{\sigma\lambda}] = \sum_{\sigma=1}^{n} \delta_{\sigma\sigma} \cdot n = -n^2 < 0.]$$

6. 令 $ad(X_\alpha)_{\beta\gamma} = C^\beta_{\alpha\gamma}$(结构常数),验证这样定义的无穷小算子是李群 G 或相应李代数 A 的一个表示.

[提示:令 $ad(X_i)_{jk} = C^j_{ik}$,则有

$$\begin{aligned}
[ad(X_i), ad(X_j)]_{\alpha\beta} &= \sum_\sigma [ad(X_i)_{\alpha\sigma} ad(X_j)_{\sigma\beta} \\
&\quad - ad(X_j)_{\alpha\sigma} ad(X_i)_{\sigma\beta}] \\
&= \sum_\sigma [C^\alpha_{j\sigma} C^\sigma_{j\beta} - C^\alpha_{j\sigma} C^\sigma_{i\beta}] \\
&= \sum_\sigma [C^\alpha_{\sigma i} C^\sigma_{\beta j} + C^\alpha_{\sigma j} C^\sigma_{i\beta}] \\
&= \sum_\sigma C^\alpha_{\sigma\beta} C^\sigma_{ji} \\
&= \sum_\sigma C^\sigma_{ij} ad(X_\sigma)_{\alpha\beta}.
\end{aligned}$$

满足对易关系 $[X_{ij} X_j] = C^\sigma_{ij} X_\sigma$,故(6.62)式确实是 G 或 A 的一个表示,即伴随表示.]

7. 计算 $so(n)$ 与 $su(N)$ 代数的二阶卡塞米尔算子.

[提示:现采取较直接方法,令

$$C_2 \equiv \sum_{\alpha=1}^{r} X_\alpha X_\alpha.$$

易证

$$\begin{aligned}
[C_2, X_i] &= \sum_\alpha \{X_\alpha [X_\alpha, X_i] + [X_\alpha, X_i] X_\alpha\} \\
&\sum_{\alpha, j} \{X_\alpha C^j_{\alpha i} X_j + C^j_{\alpha i} X_j X_\alpha\} \\
&= \sum_{\alpha, j} C^j_{\alpha i} [X_\alpha X_j + X_j X_\alpha\}.
\end{aligned}$$

当哑指标 $\alpha \longleftrightarrow j$ 时,$C^j_{\alpha j} = -C^\alpha_{ji}$,但 $[X_\alpha X_j + X_j X_\alpha]$ 不变,故 $[C_2,$

$X_i] = 0, \forall X_i \in A$.

令 $C_2 = \chi_2 E$. 现确定 χ. 对于单纯李代数引入 $r \times r$ 维矩阵 $X_{\alpha\beta} \equiv \mathrm{Tr}(X_\alpha X_\beta)$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, r)$ 在正则表示(现为不可约表示)中,

$$
\begin{aligned}
[ad(X_i), T]_{\alpha\beta} &= \sum_\sigma [ad(X_i)_{\alpha\sigma} \mathrm{Tr}(X_\sigma \cdot X_\beta) - \mathrm{Tr}(X_\alpha X_\sigma) ad(X_i)_{\sigma\beta}] \\
&= \sum \{C_{i\sigma}^\alpha \mathrm{Tr}(X_\sigma X_\beta) - \mathrm{Tr}(X_\alpha X_\sigma) C_{i\beta}^\sigma\} \\
&= \sum \{- C_{i\alpha}^\sigma \mathrm{Tr}(X_\sigma X_\beta) - C_{i\beta}^\sigma \mathrm{Tr}(X_\alpha X_\sigma)\} \\
&= - \mathrm{Tr}\{[X_i, X_\alpha] X_\beta + X_\alpha [X_i, X_\sigma]\} = 0.
\end{aligned}
$$

故 $X_{\alpha\beta}$ 为常数矩阵. 在不可约表示 i 中,可设

$$\mathrm{Tr}(X_\alpha^{(i)} \cdot X_\beta^{(i)}) \equiv \delta_{\alpha\beta} X_\alpha(i),$$

对上式求和,并令 $\alpha = \beta$,有

$$\mathrm{Tr}\Big[\sum_{\alpha=1}^{r} (X_\alpha)^2\Big] = m_i \chi_2(i) \quad (m_i \text{ 表示 } i \text{ 的维数}).$$

$$\Longrightarrow r X_2(i) = m_i \chi_2(i) \quad (X_2(i) = \mathrm{Tr}(I_\alpha^2) = \text{常数}),$$

因此定出 $X_2(i)$,就可确定 $\chi_2(i)$.

对于 $so(n)$ 代数,在正则表示中, $m_i = n$.

$$(X_{\alpha\beta}) \xlongequal{\mu\nu} - \mathrm{i}[\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}] \quad (\alpha \neq \beta),$$

$$
\begin{aligned}
T_2(i) &= \mathrm{Tr}(X_{\alpha\beta}^2) = \mathrm{Tr}(X_{12})^2 \quad (\text{任取一个}) \\
&= (X_{12})_{\mu\rho} (X_{12})_{\rho\mu} \\
&= - [\delta_{1\mu}\delta_{2\rho} - \delta_{1\rho}\delta_{2\mu}][\delta_{1\rho}\delta_{2\mu} - \delta_{1\mu}\delta_{2\rho}] \\
&= - [- \delta_{1\mu}\delta_{2\rho}\delta_{1\mu}\delta_{2\rho} - \delta_{1\rho}\delta_{2\mu}\delta_{1\rho}\delta_{2\mu}] = 2,
\end{aligned}
$$

$$\chi_i(i) = r T_2(i)/m_i = \frac{1}{2} n(n-1) \times 2/n = n - 1.$$

对于 $su(N)$. 利用盖尔曼矩阵,

$$
\begin{aligned}
T_2(i) &= \mathrm{Tr}(X_i^2) \quad (i = 1, \cdots, n^2 - 1) \\
&= \frac{1}{2} \quad (\text{计算中可任取一个}).
\end{aligned}
$$

$$\chi_2(i) = rT_2(i)/m_i = (n^2-1)\cdot\frac{1}{2}/n$$

$$= (n^2-1)/2n. \quad]$$

*8. 证明 n 阶广义卡什米尔算子是守恒量.

[提示：$\forall X_\alpha$，证明 $[C_n, X_\alpha] = 0$，其中 $C_n = C_{\alpha_1\beta_1}^{\beta_2} C_{\alpha_2\beta_2}^{\beta_3} \cdots C_{\alpha_n\beta_n}^{\beta_1} X^{\alpha_1}\cdots X^{\alpha_n}$.

$$[X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}, \cdots, X_{\alpha_n}, X_\alpha]$$

$$= \sum_{\sigma=1}^{r} X_{\alpha_1}X_{\alpha_2}\cdots X_{\alpha_{\sigma-1}}[X_{\alpha_\sigma}, X_\alpha]X_{\alpha_{\sigma+1}}\cdots X_r$$

$$= \sum_\sigma\sum_\tau C_{\alpha_\sigma\alpha}^{\tau} X_{\alpha_1}\cdots X_{\alpha_{\sigma-1}} \cdot X_\tau X_{\alpha_{\sigma+1}}\cdots X_r.$$

但是

$$\sum_{\alpha_a, p} C_{\alpha_a\beta_a}^{\beta_{a+1}} \cdot C_{pq}^{\beta_a} g^{\alpha_a p}$$

$$= \sum_{\alpha_a, p}^{\alpha} C_{\alpha_a\beta_a}^{\beta_{a+1}} C_{pqd} g^{d\beta_a} g^{\alpha_a p} \quad (\text{放进三阶全反对称张量})$$

$$= \sum_{\alpha_a, d} C_{\alpha_a\beta_a}^{\beta_{a+1}} C_{qd}^{\alpha_a} g^{d\beta_a}$$

$$= \sum_{\alpha_a, d} [C_{q\alpha_a}^{\beta_{a+1}} C_{d\beta_a}^{\alpha_a} - C_{d\alpha_a}^{\beta_{a+1}} C_{qd}^{\alpha_a}] g^{d\beta_a}$$

$$\xrightarrow{d\leftrightarrow\alpha_a} \sum_{d, \alpha_a} [C_{qd}^{\beta_{a+1}} C_{\alpha_a\beta_a}^{d} - C_{\alpha_a d}^{\beta_{a+1}} C_{q\beta_a}^{d}] g^{\alpha_a\beta_a}.$$

由此得

$$[C_n, X_\sigma] = \sum_{a=1}^{n}\sum C_{\alpha_1\beta_1}^{\beta_2}\cdots C_{\alpha_{a-1}}^{\beta_a}{}_{\beta_{a-1}}$$

$$\cdot [C_{\alpha_a\beta_a}^{d} C_{qd}^{\beta_{a+1}} - C_{q\beta_a}^{d} \cdot C_{\alpha_a d}^{\beta_{a+1}}] C_{\alpha_{a+1}\beta_{a+1}}^{\beta_{a+2}} \cdots$$

$$\cdot C_{\alpha_n\beta_n}^{\beta_1} g^{\alpha_1\beta_1}\cdots g^{\alpha_n\beta_n} X_{\beta_1}\cdots X_{\beta_n} = 0. \quad]$$

9. 根据问题 4 与 5 给出的 $su(n)$ 与 $so(n)$ 的无穷小算子表达式，验证：

(1) $so(n)$ 代数：

$$[X_{ab}, X_{cd}] = -[\delta_{bc}X_{ad} + \delta_{ad}X_{bc} - \delta_{ac}X_{bd} - \delta_{bd}X_{ac}]$$

(2) $su(n)$ 代数

$$[X_{ab}^{(1)}, X_{cd}^{(1)}] = \frac{1}{2}[\delta_{bc}X_{ad}^{(1)} + \delta_{ad}X_{bc}^{(1)} + \delta_{ac}X_{bd}^{(1)} + \delta_{bd}X_{ac}^{(1)}],$$

$$[X_{ab}^{(2)}, X_{cd}^{(2)}] = -\frac{\mathrm{i}}{2}[\delta_{bc}X_{ad}^{(2)} + \delta_{ad}X_{bc}^{(1)} - \delta_{ac}X_{bd}^{(2)} - \delta_{bd}X_{ac}^{(2)}],$$

$$[X_{ac}^{(\beta)}, X_{cd}^{(\alpha)}] = -\frac{\mathrm{i}}{2}[\delta_{bc}X_{ad}^{(1)} - \delta_{ad}X_{bc}^{(1)} + \delta_{ac}X_{bd}^{(1)} - \delta_{bd}X_{ac}^{(1)}],$$

$$[X_{a}^{(3)}, X_{ab}^{(1)}] = -\mathrm{i}[(a-1)/2a]^{1/2}X_{ab}^{(2)},$$

$$[X_{ab}^{(2)}, X_{c}^{(3)}] = \mathrm{i}[2c(c-1)]^{-1/2}X_{ab}^{(1)} \quad (a < c < b),$$

$$[X_{b}^{(3)}, X_{ab}^{(1)}] = \mathrm{i}\left[\frac{b}{2(b-1)}\right]^{1/2}X_{al}^{(2)},$$

$$[X_{ab}^{(2)}, X_{b}^{(3)}] = \mathrm{i}\left[\frac{b}{2(b-1)}\right]^{1/2}X_{al}^{(1)}.$$

第七章　半单李代数

本章将详细研究半单李代数的分类、结构与基本性质. 首先选择卡当-魏尔基作为李代数的标准化基底，讨论半单李代数的根系问题. 然后将所得到的分类、结构信息，用邓金(Dynkin)图显示出来.

§7.1　半单李代数的标准形式

1. 卡当-魏尔基及半单李代数的标准形式

这两个问题是密切相关的. 我们通过卡当-魏尔基，将李代数化为标准形式.

首先研究李代数 A 在其伴随表示中的本征值问题. 设给定元素 $B\in A$，$\{X_\rho\}(\rho=1,2,\ldots,r)$ 为 A 的一组基矢，则在伴随表示 $ad(B)$ 中的本征方程是

$$ad(B)X=[B,X]=\rho X, \tag{7.1}$$

其中 ρ 为本征矢 X 的本征值与通常量子论及工程应用的本征值方程不同的是，X 是一个方阵. 令 $B=\sum_{\mu=1}^{r}b_\mu X_\mu$，$X=\sum_{\mu=1}^{r}a_\mu X_\mu$，代入(7.1)式中，即得

$$\begin{aligned}&\sum_{\mu,\nu}[a_\mu X_\mu,b_\nu X_\nu]=\rho\sum_\tau a_\tau X_\tau\\ \Rightarrow&\sum_{\mu,\nu,\tau}a_\mu b_\nu C^\tau_{\mu\nu}X_\tau=\rho\sum_\tau a_\tau X_\tau\\ \Rightarrow&\sum_{\tau=1}^{r}\Big[\sum_{\mu,\nu}a_\mu b_\nu C^\tau_{\mu\nu}-\rho a_\tau\Big]X_\tau=0.\end{aligned} \tag{7.2}$$

在 r 个关于 $X_\tau(\tau=1,2,\cdots,r)$ 的联立方程组(7.2)中，非零解条件是

$$\sum_{\mu}[b_\nu C^\tau_{\mu\nu} - \rho\delta_{\tau\mu}]a_\mu = 0. \tag{7.3}$$

(7.3)式的非零解条件是(所谓久期方程)

$$\det[b_\nu C^\tau_{\mu\nu}-\rho\delta_{\tau\mu}] = 0. \tag{7.4}$$

这是一个 r 次代数方程，在复数域中有 r 个解，即李代数 A 的 r 个根. 当然有可能有简并. 注意现在讨论的是复李代数 A.

卡当证明，适当选择 B，可以使李代数 A 具有最大数目的不同根，并且对半单李代数来说重根只出现在零根上($\rho=0$). 满足方程(7.4)并且在这样选择的 B 的伴随表示中，由 r 个根 ρ 对应 r 个不同本征矢 $X_\rho(\rho=1,\cdots,r)$ 构成李代数 A 的新基底，如果零根有简并，则应讨论零根简并条件，这是以后讨论的基础.

如果根 $\rho=0$ 有 l 重简并，则称李代数 A 的秩为 l. 设与 $\rho=0$ 相应 l 个线性无关的本征矢值为 $H_i(i=1,2,\cdots,l)$，即

$$ad(B) = [B,H_i] = 0 \quad (i = 1,\cdots,l). \tag{7.5}$$

$\{H_i\}$ 张成线性空间 L_r 中的 l 维子空间，构成 A 中一个子代数 $\mathscr{H}$. 原因是，由于雅可比条件 $[B,[H_i,H_j]]=[[B,H_i],H_j]+[H_i,[B,H_j]]=0$.

由于 $[B,B]=0$，知 $B\in\mathscr{H}$，故可以表为

$$B = \sum_{i=1}^{l}\lambda_i H_i.$$

因此 $[B,B]=\sum_{i,j}\lambda_i\lambda_j[H_i,H_j]=0$. 由于 λ_i 的任意性，得

$$[H_i,H_j] = 0. \tag{7.6}$$

由此可见，$\mathscr{H}$ 是 A 的极大阿贝尔子代数，常称为 A 的卡当子代数，相应线性空间称为卡当空间.

再看非零根对应的本征矢. 其个数共计 $r-l$ 个，记为 $E_\alpha(\alpha=1,\cdots,r-l)$. 由(7.1)式

$$ad(B)E_\alpha = [B,E_\alpha] = \alpha E_\alpha, \tag{7.7}$$

其中 E_α 是本征值 $\alpha\neq 0$ 的本征矢($\alpha=1,\cdots,r-l$). $\{E_\alpha\}$张成 $r-l$ 维子空间 $\mathscr{E}$,为 $\mathscr{H}$ 的补空间,

$$\mathscr{E}\oplus\mathscr{H}=L_r.$$

由于

$$\begin{aligned}
&ad(B)[H_i,E_\alpha]=[B,[H_i,E_\alpha]]\\
&=[B,H_iE_\alpha]-[B,E_\alpha H_i]\\
&=[B,H_i]E_\alpha+H_i[B,E_\alpha]\\
&\quad-E_\alpha[B,H_i]-[B,E_\alpha]H_i\\
&=\alpha H_iE_\alpha-\alpha E_\alpha H_i=\alpha[H_i,E_\alpha],
\end{aligned}\tag{7.8}$$

亦即$[H_i,E_\alpha]$($i=1,\cdots,l$)属于本征值 α 的本征矢. α 非简并,故

$$[H_i,E_\alpha]=\alpha_iE_\alpha\quad(i=1,\cdots,l)\tag{7.9}$$

其中 α_i 为比例系数. 注意到 $B=\sum_i\lambda_iB_i$,有

$$[B,E_\alpha]=[\sum\lambda_iB_i,E_\alpha]=\sum_i\lambda_i\alpha_iE_\alpha=\alpha E_\alpha,$$

得

$$\alpha=\sum_i\lambda_i\alpha_i,\tag{7.10}$$

因此 α_i 可视为为 l 维空间的矢量 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_l)$ 的第 i 分量,α 称为根矢量,所处的空间称为根空间,λ_i 则可视为根空间的基. 根空间是卡当子空间 $\mathscr{H}$ 的对偶空间 R^* 即有线性映射 $f(\mathscr{H})=R$,非零根全体称为李代数 A 的根系,记如 $\sum=\{\alpha\}$.

例 1 $su(n)$代数. 有 $n-1$ 个相互对易的生成元$\{X_a^{(3)}\}$,故秩为 $n-1$,其中有($n-1$)个卡塞米尔算子. 有 $n(n-1)$个对应于非零根的元素 $X_{ab}^{(2)}$、$X_{ab}^{(3)}$ ($a>b,a,b=1,\cdots,n$). 相应李群 $SU(n)$有($n-1$)个不可约表示,可用杨图$[\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1}]$标志,其中

$$\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i=n^2-1.$$

---

* 详见,邦德列雅金. 连续群(第十一章定义 51). 科学出版社,1978.

例 2 $so(n)$代数. 等价表示为 $so(2n)$和 $so(2n+1)$,其中有 n 个相互对易生成元 $X_{ij}, i=1,3,\cdots,(2n-1), j=i+1$,故秩为 n. 其卡氏算子为 n. 对应李群亦有 n 个不可约表示,对应杨图为$[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n]$,其中 m 为 $n/2(N=2n$ 或 $N=2n-1)$.

现在李代数 A 有了一组完备新基$\{H_1,\cdots,H_l,E_1,\cdots,E_\alpha,\cdots,E_{r-R}\}$,称为正则基,此时基尚未唯一确定. 新基的对易关系是(7.6)、(7.9)式,相应的结构常数 $C_{i\alpha}^{\beta}=\alpha_i\delta_{\alpha\beta}(i=1,\cdots,l;\alpha=1,\cdots,r-l,\beta=1,\cdots,r), C_{ij}^{k}=0(i,j,k=1,\cdots,l)$.

关于根系的下列性质是重要的,即

(1) 若 α 为根,则$-\alpha$ 必为根.

(2) 若根 α 与 β 不相等,则非零矢量 $\alpha+\beta$ 亦为根,$E_{\alpha+\beta}$为相应本征矢.

由雅可比条件,

$$[B,[E_\alpha,E_\beta]]+[E_\alpha,[E_\beta,B]]+[E_\beta,[B,E_\alpha]]=0,$$

利用对易关系(7.9),将上式改写为

$$\begin{aligned} ad(B)[E_\alpha,E_\beta] &= [[B,E_\alpha],E_\beta]-[[B,E_\beta],E_\alpha] \\ &= \alpha[E_\alpha,E_\beta]-\beta[E_\beta,E_\alpha] \\ &= (\alpha+\beta)[E_\alpha,E_\beta]. \end{aligned} \tag{7.11}$$

由于 $\alpha+\beta\neq 0$,故由(7.11)式知,$\alpha+\beta$ 亦为根,且本征矢为$[E_\alpha,E_\beta]$,故可令

$$[E_\alpha,E_\beta]=N_{\alpha\beta}E_{\alpha+\beta}\quad (C_{\alpha,\beta}^{\tau}=N_{\alpha\beta}\delta_{\tau,\alpha+\beta}). \tag{7.12}$$

当 $\beta=-\alpha$ 时,则(7.11)式变为

$$[E_\alpha,E_{-\alpha}]=C_{\alpha,-\alpha}^{i}H_i\quad (i=1,\cdots,l), \tag{7.13}$$

亦即$[E_\alpha,E_{-\alpha}]\in\mathscr{H}$,$-\alpha$ 亦为根.

2. 卡当-魏尔基

我们引进附加条件,以消除新基底$\{H_i,\alpha_i\}$的不确定性. 试考察度规张量 $g_{\sigma\lambda}$. 先看

(Ⅰ) 卡当子空间 $\mathscr{H}$

$$g_{ij} = \sum_{\rho,\sigma}^{\alpha} C_{i\rho}^{\sigma} C_{j\sigma}^{\rho} = \sum_{\rho,\sigma} \alpha_i \delta_{\rho\sigma} \alpha_j \delta_{\sigma\rho}$$

$$= \sum_{\alpha} \alpha_i \alpha_j \quad (\alpha = 1, \cdots, r - l, i, j = 1, \cdots, l) \tag{7.14}$$

（Ⅱ）$\mathscr{H}$ 与其补空间 $\mathscr{E}$ 之间矩阵元

$$g_{i\alpha} = \sum_{\rho,\sigma} C_{i\rho}^{\sigma} C_{\alpha\sigma}^{\rho} = \sum_{\rho,\sigma} \alpha_i \delta_{\rho\sigma} C_{\alpha\rho}^{\sigma}$$

$$= \sum_{\rho} \alpha_i C_{\alpha\rho}^{\rho} = 0. \tag{7.15}$$

其中 $C_{\alpha\rho}^{\rho}$必为 0，原因是 $H_i + E_\alpha$ 不是根.

（Ⅲ）在补空间 $\mathscr{E}$ 中

$$g_{\alpha\beta} = \sum_{\rho,\sigma} C_{\alpha\rho}^{\sigma} C_{\beta\sigma}^{\rho} = \sum_{\rho,i} C_{\alpha\rho}^{i} C_{\beta i}^{\rho} + \sum_{\rho,\tau} C_{\alpha\rho}^{\tau} C_{\beta\tau}^{\rho},$$

此时第一项求和，$i=1,\cdots,l$. 第二项 $\tau=\alpha+\beta$.

$$g_{\alpha\beta} = \sum_{\rho_i} C_{\alpha,-\alpha}^{i} \delta_{\rho,-\alpha} C_{\beta i}^{\rho} + \sum_{\rho,\tau} C_{\alpha,\beta+\tau}^{\tau} \delta_{\rho,\beta+\tau} C_{\beta\tau}^{\rho}$$

$$= \sum_{i=1}^{l} C_{\alpha,-\alpha}^{i} C_{\beta i}^{-\alpha} + \sum_{\tau} C_{\alpha,\beta+\tau}^{\tau} C_{\beta\tau}^{\beta+\tau}$$

$$= \sum_{i} \left(\sum C_{\alpha,-\alpha}^{i} C_{\alpha i}^{-\alpha} \delta_{-\alpha\beta} + \sum_{\tau} C_{\alpha,-\alpha+\tau}^{\tau} C_{-\alpha,\tau}^{-\alpha+\tau} \delta_{-\alpha\beta} \right),$$

上式即改写为

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha-\alpha}\delta_{\alpha\beta} = \left(\sum_{i} C_{\alpha i}^{i} C_{\alpha i}^{-\alpha} + \sum_{\tau} C_{\alpha}^{\tau}{}_{-\alpha+\tau} C_{-\alpha\tau}^{-\alpha+\tau} \right] \delta_{\alpha\beta} \tag{7.16}$$

由(7.14)、(7.15)和(7.16)式可知，结构常数的大小依赖于非零根，或本征矢 E_α 的长度. 为简便计，选择 E_α 的归一化，使 $g_{\alpha-\alpha}=1$（补空间）. 则度规张量应取如下形式

$$g = \left[\begin{array}{c:cccc} g_{ij} & & & & \\ \hdashline & 0\,1\,0\,0 & \cdots & 0\,0 & \\ & 1\,0\,0\,1 & & 0 & \\ & 0\,0\,1\,0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & 0\,1 & \\ & & & 1\,0 & \end{array}\right] \tag{7.17}$$

（其中左上角 g_{ij} 块为 l 行 l 列，右下块为 $r-l$ 行 $r-l$ 列.）

显然，$\det g = \det g_r \neq 0$（半单代数）.

在卡当子空间 $\mathscr{H}$ 定义根矢量内积，

$$(\alpha,\beta) = \sum_{i,j=1}^{l} \alpha_i g^{ij} \beta_i, \tag{7.18}$$

其中 $g^{ij} \equiv (g^{-1})_{ij}$. 根矢量的逆变分量定义为

$$\alpha^i \equiv \sum_j g^{ij} \alpha_i. \tag{7.19}$$

例 3 计算 $C^i_{\alpha,-\alpha}$.

$$\begin{aligned}
C^i_{\alpha,-\alpha} &= \sum_j \delta_{ij} C^j_{\alpha,-\alpha} = \sum_j (g^{-1}g)_{ij} C^j_{\alpha,-\alpha} \\
&= \sum_{j,k} (g^{ik} g_{kj}) C^j_{\alpha,-\alpha} = \sum_k g^{ik} C_{k\alpha-\alpha} \\
&= \sum_k g^{ik} C_{-\alpha k\alpha} \text{（三阶反对称张量脚标循环）} \\
&= \sum_k g^{ik} g_{-\alpha\beta} C^\beta_{k\alpha} \quad (C_{\alpha\beta\gamma} \text{ 定义}) \\
&= \sum_k g^{ik} \delta_{-\alpha,\alpha} \delta_{\alpha\beta} C^\beta_{k\alpha} = \sum_k g^{ik} C^\alpha_{k\alpha} \\
&= \sum_k g^{ik} \alpha_k = \alpha^i.
\end{aligned} \tag{7.20}$$

总结以上结果，半单李代数的卡当-魏尔基的标准形式是

$$\begin{aligned}
&[H_i, H_j] = 0 \Leftrightarrow C^k_{ij} \qquad (i,j,k = 1,\cdots,l), \\
&[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha \Leftrightarrow C^\tau_{i\alpha} = \alpha_i \delta_{\alpha\tau} \quad (\alpha = 1,\cdots,r-l), \\
&[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \sum_i \alpha^i E_i \Leftrightarrow C^i_{\alpha,-\alpha} = \alpha^i, \\
&[E_\alpha, E_\beta] = \begin{cases} 0 \quad (\alpha \neq \beta \,\overline{\in}\, \mathscr{E}), \\ N_{\alpha\beta} E_{\alpha+\beta} (\alpha+\beta \in \mathscr{E}), \text{且 } \alpha+\beta \neq 0, \end{cases}
\end{aligned} \tag{7.21}$$

其中常数 $N_{\alpha\beta}$ 有待确定.

问　题

1. 试用度规矩阵 $\{g_{\alpha\beta}\}$ 证明半单纯李代数有非零根对称定理：

对于非零根 $\alpha\neq 0$，必存在根 $-\alpha$.

[提示：
$$
\begin{aligned}
g_{\alpha\beta} &= \sum_{\rho,\sigma} C^{\sigma}_{\alpha\rho} C^{\rho}_{\beta\sigma} \quad (\text{展开分为三部分}) \\
&= \sum_{i,\sigma} C^{\sigma}_{\alpha i} C^{i}_{\beta\sigma} + \sum_{i,\rho} C^{i}_{\alpha\rho} C^{\rho}_{\beta i} + \sum_{\rho,\tau} C^{\tau}_{\alpha\rho} C^{\rho}_{\beta\tau} \\
&= \sum_{i,\sigma} C^{\alpha}_{\alpha i} \delta_{\alpha\sigma} C^{i}_{\beta\sigma} + \sum_{i,\rho} C^{i}_{\alpha,-\alpha} \delta_{\rho,-\alpha} C^{\rho}_{\beta i} \\
&\quad + \sum_{\rho,\tau} C^{\rho+\alpha}_{\alpha\rho} \delta_{\tau,\alpha+\rho} C^{\rho}_{\beta\tau} \\
&= \sum_{i} C^{\alpha}_{\alpha i} C^{\alpha}_{\beta\alpha} + \sum_{i} C^{i}_{\alpha,-\alpha} C^{-\alpha}_{\beta i} + \sum_{\rho} C^{\alpha+\rho}_{\alpha\rho} C^{\rho}_{\beta,\alpha+\rho}
\end{aligned}
$$

其中 $C^{i}_{\tau\alpha}=-C^{i}_{\alpha\tau}=-C^{i}_{\alpha,-\alpha}\delta_{\tau,-\alpha}$；$C^{-\alpha}_{\beta i}=-C^{-\alpha}_{i\beta}=-\delta_{\beta,-\alpha}\cdot C^{-\alpha}_{i,-\alpha}$，$C^{\rho}_{\beta,\alpha+\rho}=\delta_{\beta,-\alpha}C^{\rho}_{-\alpha,\alpha+\rho}$. 对于后一因子 $C^{\rho}_{\beta,\alpha+\rho}=\delta_{\beta-\alpha}C^{\rho}_{-\alpha,\alpha+\beta}$，当 $-\alpha$ 不是根时，度规矩阵 g 的第 α 行元素全为 0，原因是 $\delta_{\beta,-\alpha}=0$. 就是说，违反卡当判据.]

2. 证明：若代数的基林型退化($\det g=0$)，则代数必非半单.

[提示：设 $\det g=0$，令 $N=\{X|X\in A\}$，且对 $\forall X\in A$，有 $(X,Y)=0$. 故知 N 为 A 的理想. 令 $(X,Y)_N$ 为 N 的基林型，则 $\forall X,Y\in N$，

$$(X,Y)_N=(X,Y),$$

即对 $\forall X\in N$，有 $(X,X)=0$，故知代数 A 可解(参见万哲先编《李代数》第四章定理 2.]

3. 试给出 $SU(2)$ 代数的卡当-魏尔基.

[提示：即 $H_1=J_3$，$\sqrt{2}E_1=J_+=J_1+\mathrm{i}J_2$，$\sqrt{2}E_{-1}=J_-=J_1-\mathrm{i}J_2$，有

$$[H_1,E_1]=E_1,\quad [H_1,E_{-1}]=-E_{-1},$$
$$[E_1=E_{-1}]=H_1.]$$

4. 计算 $U(2)$ 群的无穷小生成元，并讨论相应 $U(2)$ 代数是否半单李代数.

[提示：由 $A^+A=E\Rightarrow$ 生成元 J_1,J_2,J_3 和 $Y=\mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial x_4}$.

令 $A=(E+\mathrm{d}A)x$，$AA^+=E\Rightarrow \mathrm{d}A+\mathrm{d}A^+=0$，

$$dA = \begin{pmatrix} ia_1 & a_2 + ia_3 \\ -a_2 + ia_3 & ia_1 + ia_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} dx_1 = ia_1x_1 + (a_2 + ia_3)x_2 \\ dx_2 = (-a_2 + ia_3)x_1 + ia_4x_2 + ia_1x_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_1 = ix_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - ix_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, X_2 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \end{cases}$$

$$X_3 = ix_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + ix_3 \frac{\partial}{\partial x_2}, X_4 = Y = i \frac{\partial}{\partial x_4}.$$

Y 与所有 $X_i \equiv J_i$ 对易，故 $U(2)$ 非半单. 该代数(群)与 $U(1) \otimes SU(2)$ 代数局域对易.]

§7.2 关于根系的基本定理及其图示法

本节讨论李代数根系的若干基本性质，结果发现李代数的根系具有极其优美的性质，据此可以容易找到经典李代数及常见例外李代数的全部根系，并且直观地用图示法表现出来. 不言而喻，从中我们也得到相应李群的局域结构的信息.

根系性质定理一 设 α 与 β 是半单李代数 A 的两个非零根，则

(1) $2(\alpha,\beta)/(\alpha,\alpha)$ 是整数.

(2) $\beta - [\alpha(\alpha,\beta)/(\alpha,\alpha)]\alpha$ 也是根.

证明 设 α 与 γ 均为根，但 $\alpha+\gamma$ 不是根，则由(7.21)式，有

$$[E_\alpha, E_\gamma] = 0. \tag{7.22}$$

但 $\alpha+\beta$ 可能为根，依此类推，可能有根列 $\beta+h\alpha, \cdots, \beta+2\alpha, \beta+\alpha, \beta, \beta-\alpha, \beta-2\alpha, \cdots, \beta-f\alpha$，称为含 β 的 α 根列. 设 $\gamma=\beta+h\alpha$，显然有(7.22)式成立. 此外，根据根列假设及(7.21)式，得

$$[E_{-\alpha}, E_\gamma] = N_{-\alpha\gamma}E_{\gamma-\alpha} \equiv E'_{\gamma-\alpha},$$

$$[E_{-\alpha}, E'_{\gamma-\alpha}] = E'_{\gamma-2\alpha},$$

$$\cdots\cdots$$

$$[E_{-\alpha}, E'_{\gamma-j\alpha}] = E'_{\gamma-(j+1)\alpha} \tag{7.23}$$

……

由于根列假设，上述运算经过 $h+f$ 步后终止于

$$[E_{-\alpha}, E'_{\gamma-(h+f)\alpha}] = E'_{\gamma-(h+f+1)\alpha} = 0.$$

现推导 (α,γ) 与 (α,α) 的递推公式. 定义 μ_{j+1} 为

$$[E_\alpha, E'_{\gamma-(j+1)\alpha}] = \mu_{j+1} E_{\gamma-j\alpha}. \tag{7.24}$$

注意到(7.23)式，得到

$$\begin{aligned}
\mu_{j+1} E'_{\gamma-j\alpha} &= [E_\alpha, E'_{\gamma-(j+1)\alpha}] = [E_\alpha, [E_{-\alpha}, E'_{\gamma-j\alpha}]] \\
&= -[E_{-\alpha}, [E'_{\gamma-j\alpha}, E_\alpha]] \\
&\quad - [E'_{r-j\alpha}, [E_\alpha, E_{-\alpha}]] \quad \text{（雅可比恒等式）} \\
&= [E_{-\alpha}, [E_\alpha, E'_{\gamma-j\alpha}]] - [E'_{\gamma-j\alpha}, \sum_i \alpha^i H_i] \\
&= \mu_j [E_{-\alpha}, E'_{\gamma-(j+1)\alpha}] - \sum_i \alpha^i [E'_{\gamma-j\alpha}, H_i] \\
&= \mu_j E'_{\gamma-j\alpha} + \sum_i \alpha^i (\gamma - j\alpha)_i E'_{\gamma-j\alpha}.
\end{aligned}$$

考虑到
$$\sum_i \alpha^i (\gamma - j\alpha) = (\alpha,\gamma) - j(\alpha,\alpha),$$

$$\mu_{j+1} = \mu_j + (\alpha,\gamma) - j(\alpha,\alpha). \tag{7.25}$$

确定 μ_{j+1}，必须确定 μ_0. 由于 $\alpha+\gamma$ 不是根，

$$[E_\alpha, E_\gamma] = \mu_0 E'_{\gamma+\alpha} = 0 \text{（注意(7.24)式）},$$

可令 $\mu_0=0$，由(7.25)式，得到($j=0$)

$$\mu_1 = (\alpha,\gamma),$$

以及 $\mu_2=2(\alpha,\gamma)-(\alpha,\alpha)$，$\mu_3=3(\alpha,\gamma)-3(\alpha,\alpha)$，

$$\mu_j = j(\alpha,\gamma) - \frac{1}{2} j(j-1)(\alpha,\alpha). \tag{7.26}$$

又由于

$$[E_\alpha, E'_{\gamma-(h+f+1)\alpha}] = \mu_{h+f+1} E'_{\gamma-(h+f)\alpha} = 0,$$

所以

$$\mu_{h+f+1} = 0.$$

代入(7.26)式，

$$0=(h+f+1)(\alpha,\gamma)-\frac{1}{2}(h+f+1)(h+f)(\alpha,\alpha).$$

得到

$$(\alpha,\gamma)=\frac{1}{2}(h+f)(\alpha,\alpha). \tag{7.27}$$

因此(7.26)递推公式变为

$$\mu_j=\frac{1}{2}j(h+f-j+1)(\alpha,\alpha). \tag{7.28}$$

代入 $\gamma=\beta+h\alpha$，则(7.27)式变为

$$(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}(f-h)(\alpha,\alpha),$$

亦即 $2[(\alpha,\beta)/(\alpha,\alpha)]=f-h$ 确为整数，且存在代数 A 的根列

$$\gamma,\gamma-\alpha,\gamma-2\alpha,\cdots,\gamma-(h+f)\alpha,$$

或者用 β 表示，则为

$$\beta+h\alpha,\beta+(h-1)\alpha,\cdots,\beta+\alpha,\beta,\beta-\alpha,\cdots,\beta-f\alpha.$$

显然，

$\beta-\dfrac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\alpha=\beta-(f-h)\alpha$ 在此述根列中，是代数 A 的一个根.

讨论 任一非零根的模必不为零，即 $(\alpha,\alpha)\neq 0$.

若 $(\alpha,\alpha)=0$，则由 $(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}(f-h)(\alpha,\alpha)$，推知 $(\alpha,\beta)=0$. 而 β 为任一根，换言之，α 将与所有的根正交，这是不可能的.

另证 $(\alpha,\beta)=\sum_i\alpha^i\beta_i=(g^{-1})_{ij}\alpha_j\beta_i=0$，由于 β 为任取，故必

$$(g^{-1})_{ij}\alpha_j=0.$$

α 为非零根，故 $\{\alpha_j\}$ 必不全为零，这要求

$$\det(g^{-1})=(\det g)^{-1}=0.$$

显然不对，故 $(\alpha,\alpha)\neq 0$.

根系性质定理二 如果 α 为半单李代数 A 的根，则在 α 的整数倍 $k\alpha$ 中，只有 $\alpha,0,-\alpha$ 才是根.

证明 由于 $[E_\alpha,E_\alpha)=0,[E_{-\alpha},E_{-\alpha}]=0$，故此 2α 与 -2α 均不是根.

令 $\gamma=\alpha$，则

$$2\frac{(\alpha,\gamma)}{(\alpha,\alpha)}=2=h-f,$$

则有根列 $\alpha,0,-\alpha$.

若取 $\gamma=k\alpha(k>1)$，则 $h-f=2k(4,6,\cdots)$. 根系中必包含 2α，因此是不正确的.

根系性质定理三 设 α 与 β 为两个根，则含 β 的 α 根列 $(\alpha,\beta\neq0)$ 最多包含四个根. 因此

$$2\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}=0,\quad \pm1,\pm2,\pm3. \tag{7.29}$$

证明 若 $\beta=\alpha$，即为定理二，本定理显然成立. 设 $\beta\neq\alpha$，根系有五个根，表记如下：

$$\beta+2\alpha,\beta+\alpha,\beta,\beta-\alpha,\beta+2\alpha,$$
$$(\gamma,\gamma-\alpha,\gamma-2\alpha\equiv\beta,\gamma-3\alpha,\gamma-4\alpha)$$

由于 $\gamma\equiv\beta+2\alpha$ 的 β 根列中，$\gamma-\beta=2\alpha$ 不是根，同样 $\gamma+\beta=2(\alpha+\beta)$ 也不是根(定理二). 因此，含 β 的 γ 的根列中，只有一项 γ. 由定理一，

$$2\frac{(\gamma,\beta)}{(\beta,\beta)}=0\Longrightarrow(\gamma,\beta)=0\Rightarrow((\beta+2\alpha),\beta)=0. \tag{7.30}$$

令 $\gamma'\equiv\beta-2\alpha$，由 $\gamma'-\beta=-2\alpha,\gamma'+\beta=2(\beta-\alpha)$，都不是根(定理二)，可知含 β 的 γ' 根列只有一项，故与 γ 相同，有

$$(\gamma',\beta)=0\Longrightarrow((\beta-2\alpha),\beta)=0. \tag{7.31}$$

(7.30)式与(7.31)式相加，得到

$$(\beta,\beta)=0,$$

与定理前提矛盾. 换言之两式必不能同时成立，在 γ 与 γ' 中，必有

一非零根. 就是说含 β 的根列只含四个根.

以上证明适用于根列含六个或六个以上根的情况，证明时只须取前五个即可.

由于根列最多只有四列，可设为

$$\gamma,\quad \gamma-\alpha,\quad \gamma-2\alpha,\quad \gamma-g\alpha(g=h+f),$$

其中 $g\leqslant 3$. 又设 $\beta+h\alpha$ 为根，而 $(\beta+h\alpha)+\alpha=(\beta+h+1)\alpha$ 不是根，则

$$\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}=g-2h\leqslant 3-2h,$$

就是 h 的取值范围在 $h=0,1,2,3$. 对于 γ 的不同取法，

$$\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3.$$

1. 根矢量的图形表示

设半单李代数 A 的秩为 l，则每一个根可视为 l 维空间的矢量

$$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l).$$

每一个代数中 $(r-l)$ 个非零根 (r 为该代数维数) 对应于 l 维空间的唯一的图形，根的矢量图形，简称根图. 我们可以根据根图，对相应的半单李代数(包括单纯李代数)进行分类.

但是，只有当 $l\leqslant 2$ 的情况下，根图才可以在二维平面直观地表示出来. 我们重点讨论二维根图. 如同二维普通欧代空间一样，矢量 α 与 β 夹角 ϕ 的方向余弦是

$$\cos\phi=\frac{(\alpha,\beta)}{\sqrt{(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)}},\tag{7.32}$$

或

$$\cos^2\phi=\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\cdot\frac{(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}.\tag{7.33}$$

注意到

$$(\alpha,\beta)=(g^{-1})_{ij}\alpha_i\beta_j=(g^{-1})_{ji}\alpha_j\beta_i=(\beta,\alpha),$$

设

$$\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}=n, \quad \frac{2(\beta,\alpha)}{(\beta,\beta)}=n',$$

$$(n,n'=0,\pm 1,\pm 2,\pm 3)$$

则由 $0\leqslant\cos^2\phi\leqslant 1$，有

$$\cos^2\phi=\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\cdot\frac{(\beta,\alpha)}{(\beta,\beta)}=\frac{n}{2}\cdot\frac{n'}{2}$$

$$=0,\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},1. \tag{7.34}$$

由于 $-\alpha$ 也是根，故 α 只能在第一象限，$\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$，可知 ϕ 的可取值为

$$\phi=0,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}.$$

现确定根的长度比，即相对长度. 实际上，

$$\frac{(\alpha,\alpha)}{(\beta,\beta)}=\left[\frac{2(\beta,\alpha)}{(\beta,\beta)}\right]\Big/\left[\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\right]=\frac{n'}{n}.$$

设 α 为长根，则 $n'/n\geqslant 1$，则 n'/n 的值由夹角 ϕ 而定. 当 $\phi=0$ 时，$\alpha=\beta$，这是显然的. 当 $\phi=30°$时，$\cos^2\phi=\cos^2 30°=\frac{3}{4}=\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\Rightarrow n'=3, n=1, (\alpha,\alpha)/(\beta,\beta)=3$. 当 $\phi=90°$时，α 与 β 正交，其长度比不确定. 总结以上结果，归纳于表 7.1 中.

表 7.1　非零根 α 与 β 的长度平方比

$\cos^2\phi$	ϕ	$n=\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}$	$n'=\frac{2(\beta,\alpha)}{(\beta,\beta)}$	$\frac{n'}{n}=\frac{(\alpha,\alpha)}{(\beta,\beta)}$
1	0	2	2	1
$\frac{3}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	1	3	3
$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	1	2	2
$\frac{1}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	1	1	1
0	$\frac{\pi}{2}$			不定

约定 $\sqrt{(\beta,\beta)}=1$，则可以确定 β 的模.

$l=1$ 的李代数 A_1 只有一个零根，若还有根，则有根系 $\beta,0,$

$-\beta$. 此时 $\phi=0$. 根图为

$-\beta \quad 0 \quad \beta \Longleftrightarrow$ 本征矢 $E_{-\alpha}, H, E_{\alpha}$ 对应的量子力学记法为 J_-, J_0, J_+

相应李代数为 $su(2)$，与 $so(3)$ 局域同构. 这里的 A 以及下面出现的 B、C 和 D 为卡当符号.

$l=2$ 的李代数. 根图为二维平面图形.

(i) G_2 代数，此时 $\phi=\dfrac{\pi}{6}$. 取 $\|\beta\|=\sqrt{(\beta,\beta)}=1$，则另一根 $\|\alpha\|=\sqrt{3}$，α 的坐标应为 $(3/2, \sqrt{3}/2)$. 反向等量延长即得 $-\alpha$. 然后根据矢量合成法则易得 $\alpha-\beta$，$\alpha-2\beta$，$\alpha-3\beta$；反向延长可得 $\beta-\alpha$，$\beta-2\alpha$，$\beta-3\alpha$. 由 $\alpha-\beta$ 与 $\alpha-2\beta$ 可合成 $2\alpha-3\beta$，以及反向矢量 $3\beta-2\alpha$. 共有 12 个非零根矢量和 2 个零根. 图形颇似大卫王之星（见图 7.1）. 相应的李代数通常记为 G_2.

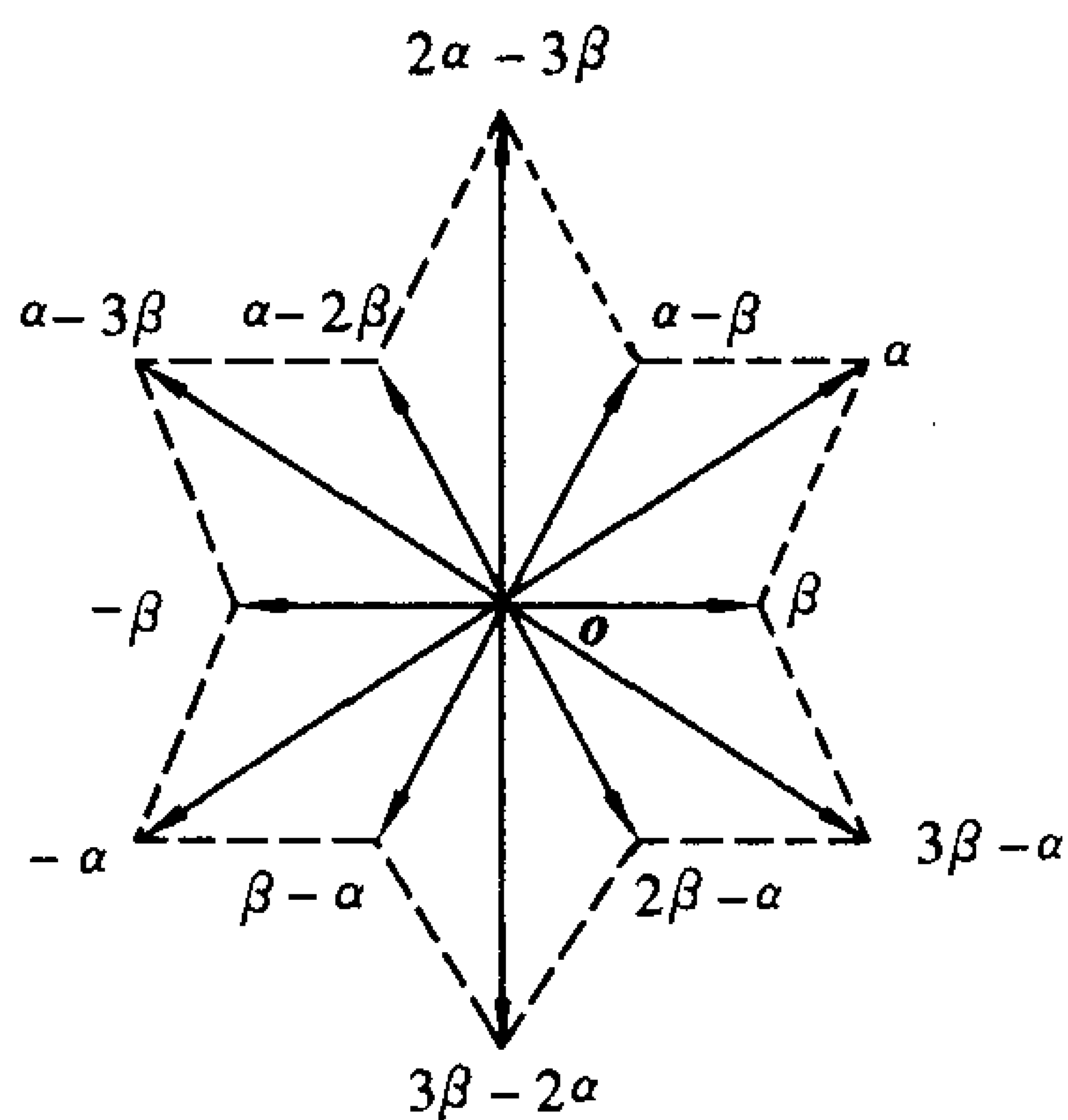


图 7.1 G_2 的根图

(ii) $\phi=\dfrac{\pi}{4}$，B_2 与 C_2 的根图如图 7.2、图 7.3.

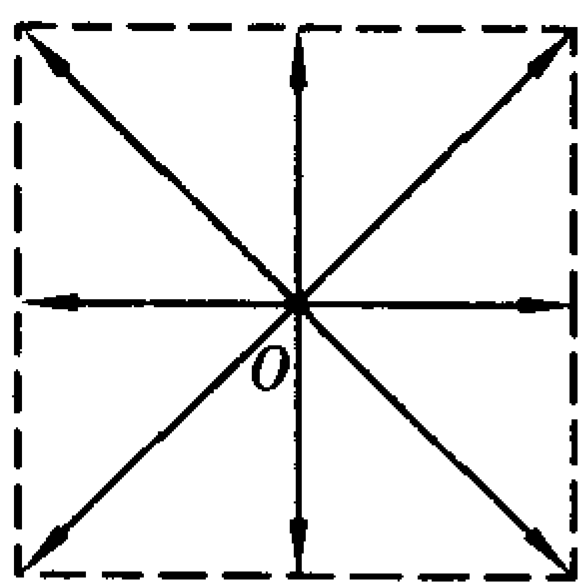


图 7.2 B_2 的根图

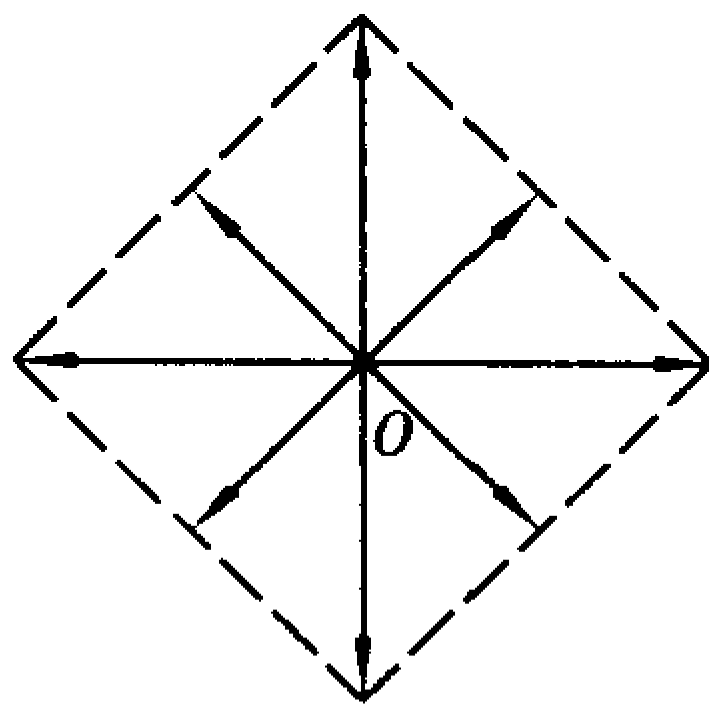


图 7.3 C_2 的根图

此时有 8 个非零根，两个零根，相应的根图为 B_2 与 C_2，分别对应李代数 $so(5)$ 与 $sp(4)$. B_2 与 C_2 同构，只是图形转过了 $\frac{\pi}{4}$.

(iii) $\phi=\frac{\pi}{3}$，A_2 如图 7.4. 此时 $\|\alpha\|=\|\beta\|$. 有 6 个非零根矢量，2 个零根矢量. 卡当 A_2 代数，对应 $su(3)$ 代数. 其相应根图为正六边形.

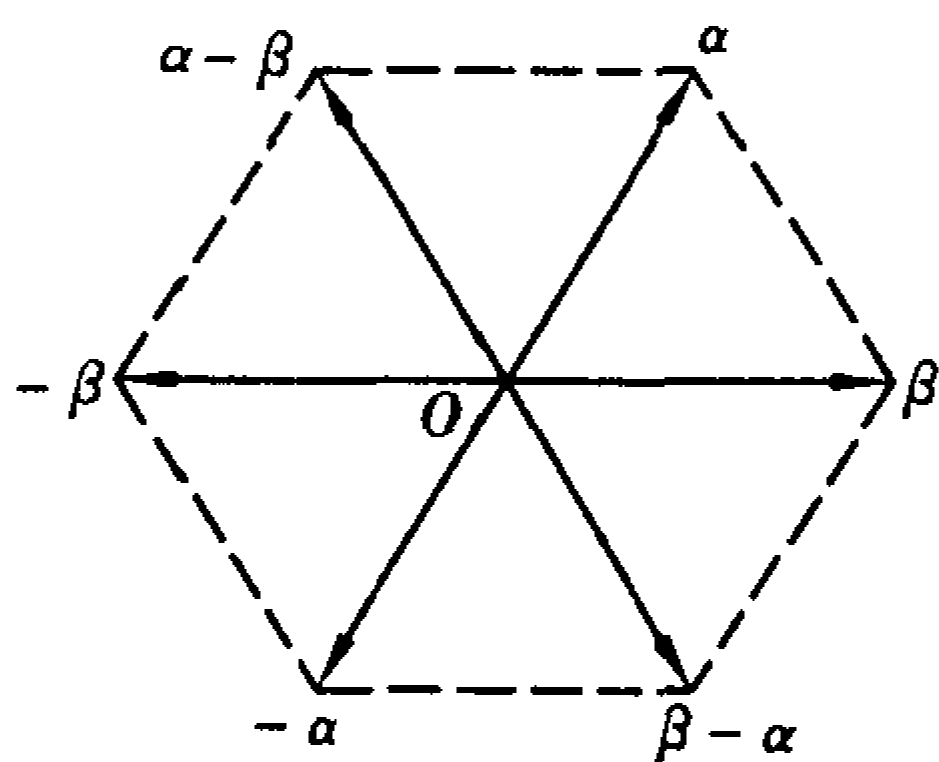


图 7.4　A_2 的根图

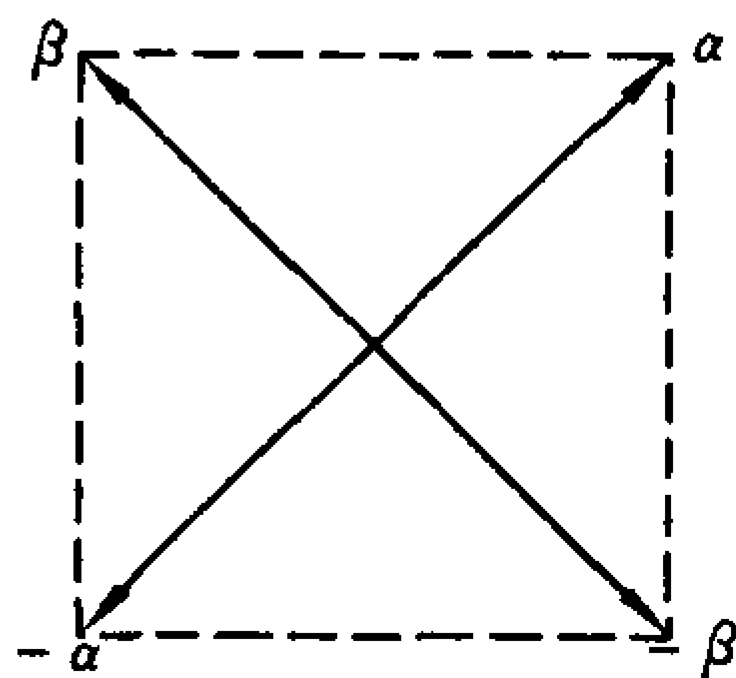


图 7.5　D_2 的根图

(iv) $\phi=\frac{\pi}{2}$，D_2 如图 7.5. 此时 $\|\beta\|/\|\alpha\|$ 不定. 为确定起见，令 $\|\alpha\|=\|\beta\|$. 两根正交. 共有 4 个非零根矢量，2 个零根矢量，卡当记号为 D_2，对应李代数 $so(4)$. 实际上相当于两正交矢量组 $(-\alpha,0,\alpha)$ 与 $(-\beta,0,\beta)$ 的集合，即 $D_2=A_1\oplus A_1$，或

$$so(4)=so(3)\oplus so(3).$$

至于 $l>2$ 的李代数的根图，不能在平面上表示. 但我们很容易把 $l=2$ 的根图向高维情况推广.

(i) B_l. 考虑 B_2(见图 7.2)，引入正交单位矢量 $e_1=(1,0)$，和 $e_2=(0,1)$，则 B_2 的 8 个非零根矢量可表如

$$(\pm 1,0),(0,\pm 1),(1,\pm 1),(-1,\pm 1).$$

加上 2 个零根 $(0,0)$，即得 B_2 根矢量图形.

再看 B_3. 引入两两正交的三个单位矢量，

$$e_1=(1,0,0),\quad e_2=(0,1,0),\quad e_3=(0,0,1),$$

则 B_3 的非零根矢可表如

$$\pm e_i\ (i=1,2,3),\ \pm e_i \pm e_j (i,j=1,2,3,i<j).$$

（6个）　　　　　　（12个）

共计 18 个，连同 3 个零根，总计 21 根．相应代数为 $so(7)$．

对于一般 B_l，可取 l 个相互正交的单位矢量 $e_i(i=1,\cdots,l)$，相应非零根可以表如

$$\pm e_i\ (i=1,\cdots,l),\quad \pm e_i \pm e_j (i,j=1,\cdots l,i<j).$$

（$2l$个）　　　　　　（$2l(l-1)$个）

非零根矢量 $2l^2$ 个，加上零根矢量，总计 $2l(l+1)$根，对应 $2l(l+1)$ 维李代数，即 $so(2l+1)$．

(ii) C_l．相应的非零根矢量可以表为

$$\pm 2e_i(i=1,\cdots,l);\quad \pm e_i \pm e_j(i,j=1,2,3,i<j),$$

共 $2l^2$ 个．加上 l 个零根，与 B_l 一样，总计 $2l(l+1)$个根矢量．对应李代数 $Sp(2l)$．

(iii) $D_l(l>\alpha)$．相应的非零根矢量可以表为

$$\pm e_i \pm e_j \quad (i,j=1,\cdots,l,i<j),$$

共 $2l(l-1)$个．加上 l 个零根，总计 $l(2l-1)$个根矢量．对应李代数 $so(2l)$．

(iv) A_l．相应根空间为 l 维．但为了得到全部根系，在 $l+1$ 维欧氏空间，取 $l+1$ 个相互正交的单位矢量 $e_i(i=1,\cdots,l+1)$，则 A_l 的非零根矢可表为 $e_i-e_j(i,j=1,\cdots,l+1,i\neq j)$，计有 $l(l+1)$个．再加上 l 个零根矢量，总计 $l(l+2)$个，对应 $SU(l+1)$维代数．注意，全部根系实际上处于 $l+1$ 维空间的 l 维超平面上．

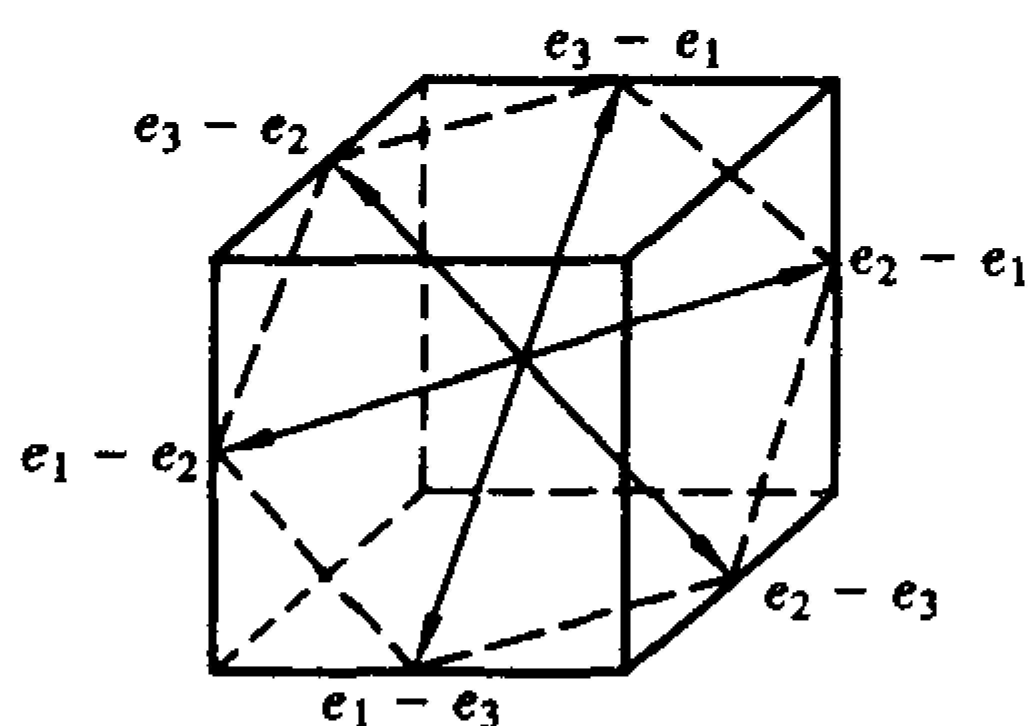


图 7.6　正交基下 A_2 的根图

例　A_2 代数．

图 7.6 中用三维正交基表示 A_2 代数的非零根，注意其中 6 个非零根矢量均在平面上．

(v) 例外李代数 G_2、F_4、E_6、E_7 和 E_8.

上述 A_l、B_l、C_l 和 D_l 四个系列根系对应的李代数称为经典李代数，此外，业已证明，还存在五个可能的根系 G_2、F_4、E_6、E_7 和 E_8. 其中 G_2 已经研究过，见图 7.1.

F_4 是在 B_4 的根系中增加 16 个非零根

$$\pm(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4).$$

其根系总共 52 个根系，其中 4 个零根. B_4 为其子代数.

E_6 是在 A_5 的根系中，增加 42 个非零根

$$\pm\sqrt{2}e_7;$$

$$\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4 \pm e_5 \pm e_6) \pm \frac{1}{\sqrt{2}}e_7$$

(在括号中取 3 个正号和 3 个负号).

其根系共 72 个非零根，6 个零根，对应 78 维李代数. 显然，$su(6)\oplus su(2)$为其子代数.

在 A_7 的根系中增加非零根

$$(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4 \pm e_5 \pm e_6 \pm e_7 \pm e_8)$$

(括号中取 4 个正号 4 个负号)

构成 E_7 根系. 共计 126 个非零根，8 个零根，对应 133 维李代数. $SU(8)$是其子代数.

在 D_8 的根系中增加非零根

$$\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4 \pm e_5 \pm e_6 \pm e_7 \pm e_8)$$

(括号中取偶数个正号)

构成 E_8 根系，共计 240 非零根，8 个零根，对应 248 维李代数. D_8 即 $so(16)$是其李代数.

问　　题

1. 计算 A_l、B_l、C_l 和 D_l 的非零根个数.

[提示：A_l，$e_i-e_j(i<j,i,j=1,\cdots,l+1)$，

$i=$	1	2	$3,\cdots,$	$(l+1)$
$j=$	—	1	$1,2,\cdots,$	$1,2,\cdots,l$（正、负根之和）
根数	0	(2×1)	$2\times2\cdots\cdots,$	$(2l)$

总个数 $S_{l+1}=\dfrac{(0+2l)}{2}(l+1)=l(l+1)$.

B_l：$\pm e_i,\pm e_i\pm e_j\quad(i<j,i、j=1,\cdots,l)$，

$\pm e_i(i=1,\cdots,l)$，　$2l$ 个

$\pm e_i\pm e_j(i<j,i、j=1,\cdots,l)$

$i=$	±1	$\pm2,$	$\cdots$	$\pm l$
$j=$	0	$\pm1,$	$\cdots\pm1,\pm2,\cdots,\pm l-1$	
根数	0	2×2	$2\times2(l-1)=4(l-1)$	

$$S_l=\frac{0+4(l-1)}{2}\cdot l=2(l-1)l$$

非零根数$=2l(l-1)+2l=2l^2$.

C_l 与 D_l 算法相同.]

2. 计算例外李代数的总根数.

[提示：由 G_2 易知，F_4、B_4 的非零根为 $2\times4^2=32$，

$\frac{1}{2}(\pm e_1\pm e_2\pm e_3\pm e_4)$，$2^4=8$.

E_6，$\pm\sqrt{2}e_7$，2 个

$\frac{1}{2}(\pm e_1\pm e_2\pm e_3\pm e_4\pm e_5\pm e_6)\pm\frac{1}{\sqrt{2}}l_1$　（正负号各 3 个），

$2\times C_6^3=40$.

非零根个数$=42+5\times6=72$ 个.

E_8、D_8 的非零根 $2l(l-1)=16\times7=112$.

$\frac{1}{2}(\pm e_1\pm e_2\pm e_3\pm\cdots\pm e_8)$（取偶数个正号）.

2 个正号　$C_8^2=28$.

4 个正号　　$C_8^4=70.$

6 个正号　　$C_8^6=28.$

8 个正号(0 个正号)　　$2\times C_8^8=2.$

总计非零根$=2+28+70+28+112=240.$

E_7 的根数可仿此得到.]

3. 设 A 为半单李代数,设 α、β、γ 为其非零根,且 $\alpha+\beta+\gamma=0$,令 $[E_\alpha,E_\beta]=N_{\alpha\beta}E_{\alpha+\beta}$,归一化 $(E_\alpha,E_{-\alpha})=1$,试证 $N_{\alpha\beta}=N_{\beta\gamma}=N_{\gamma\alpha}$.

[提示:显然,$N_{\alpha\beta}=-N_{\beta\alpha}$. 又 $-\gamma=\alpha+\beta$,可知 $\alpha+\beta$ 是根,$\beta+\gamma$ 和 $\gamma+\alpha$ 亦然. 从

$$([E_\alpha,E_\beta],E_\gamma)+(E_\beta,[E_\alpha,E_\gamma])=0,$$

以及

$$([E_\alpha,E_\beta],E_\gamma)=N_{\alpha\beta}(E_{-\gamma},E_\gamma)=N_{\alpha\beta},$$
$$(E_\beta,[E_\alpha,E_\gamma])=N_{\alpha\gamma}(E_\beta,E_{-\beta})=N_{\alpha\gamma},$$

亦即 $N_{\alpha\beta}=-N_{\alpha\gamma}=N_{\gamma\alpha}$,同理 $N_{\alpha\beta}=N_{\beta\gamma}$.]

4. 上题中条件 $\alpha+\beta+\gamma=0$,换为

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=0(\alpha,\beta,\gamma,\delta \text{ 均为非零根})$$

试证　$N_{\alpha\beta}N_{\gamma\delta}+N_{\alpha\gamma}N_{\delta\beta}+N_{\alpha\delta}N_{\beta\gamma}=0.$

[提示:$[E_\alpha,[E_\beta,E_\gamma]]=N_{\beta\gamma}[E_\alpha,E_{\beta+\gamma}]=N_{\beta\gamma}N_{\alpha,\beta+\gamma}E_{\alpha+\beta+\gamma}=N_{\beta\gamma}\cdot N_{\delta\alpha}E_{-\delta}$(上题结果).

此外

$$[E_\alpha,[E_\beta,E_\gamma]]=-N_{\alpha\delta}N_{\beta\gamma}E_{-\delta},$$
$$[E_\beta,[E_\gamma,E_\alpha]]=-N_{\beta\delta}N_{\gamma\alpha}E_{-\delta},$$
$$[E_\gamma,[E_\alpha,E_\beta]]=-N_{\gamma\delta}N_{\alpha\beta}E_{-\delta},$$

此三式相加,并利用雅可比恒等式得

$[E_\alpha,[E_\beta,E_\gamma]]+[E_\beta,[E_\gamma,E_\alpha]]+[E_\gamma,[E_\alpha,E_\beta]]=0$,即得到所证结果.]

5. 试证半单李代数任何实线性组合的内积为实数，若组合的矢量不为零，则其自身内积(即模的平方)必大于0.

[提示：令 $V=\sum_{\beta}b_{\beta}\beta, V'=\sum_{\beta}b'_{\beta}\beta'$，其中 β、β' 属于全部根系 Σ，$b_{\beta}, b'_{\beta}\in\Omega(\mathbf{R})$，则

$$(V,V')=\sum_{b_\beta,b_\beta'}b_{\beta}b'_{\beta}(\beta,\beta')=\sum_{\substack{b_\beta,b'_\beta\\ i,j}}b_{\beta}b_{\beta}'g_{ij}\beta^{i}\beta'^{j}.$$

但

$$g_{ij}\equiv\sum_{\alpha\in\Sigma}\alpha_i\alpha_j,$$

$$\begin{aligned}(V,V')&=\sum_{b_\beta,b_\beta'}\sum_{i,j}\sum_{\alpha\in\Sigma}b_{\beta}b_{\beta}'(\alpha_i\beta^{i})(\alpha_j\beta'^{j})\\&=\sum_{\alpha,\beta,\beta'\in\Sigma}b_{\beta}b_{\beta}'(\alpha,\beta)(\alpha,\beta')\in\Omega(\mathbf{R}),\\&\Rightarrow(V,V)=\sum_{\alpha\in\Sigma}(\alpha,V)^{2}\geqslant 0.\end{aligned}$$
]

6. 试给出 $su(3)$ 代数(A_2)的诸根及其相应本征矢的具体表达式，给出基林形式及根图.

[提示：$l=\alpha$，2 个零根，6 个非零根.

$$H_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad H_2=\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix},$$

$$\underset{(1\longleftrightarrow\alpha)}{E_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}},\quad \underset{(2\longleftrightarrow\beta)}{E_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}},$$

$$\underset{(3\longleftrightarrow\gamma)}{E_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}},\quad E_{-1}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$E_{-2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{-3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

由$[H_1, E_1] = \alpha_1 E_1$，$[H_2, E_1] = \alpha_2 E_1$，直接计算

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, 0\right).$$

同理可得

$$\beta = (\beta_1, \beta_2) = \left(+\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right); \quad \gamma = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

相应根图见图 7.7，其中

$$-\alpha = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, 0\right),$$

$$-\beta = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$-\gamma = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

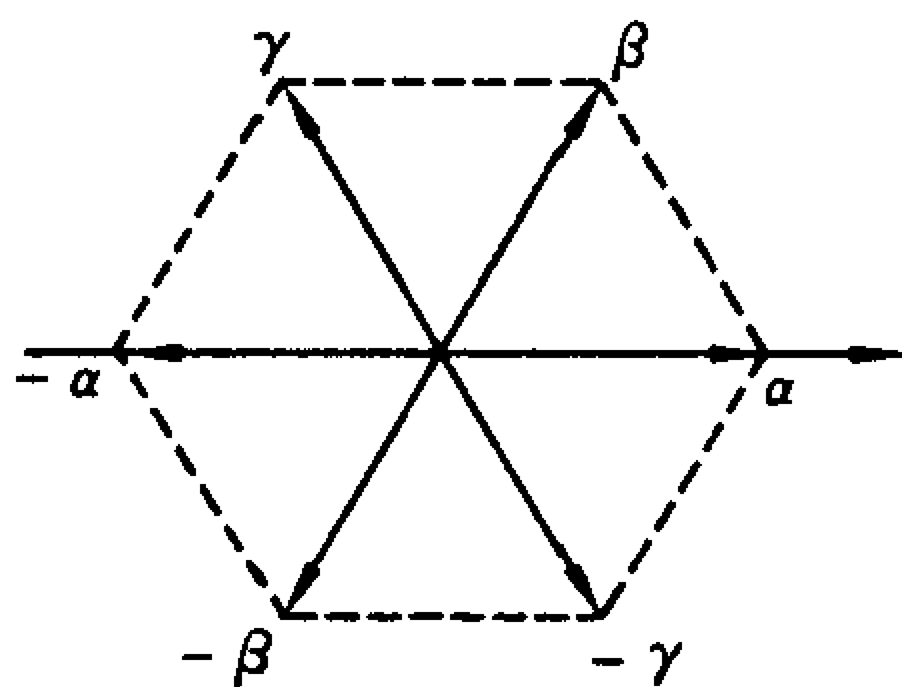


图 7.7　$su(3)$根图

显然有关系 $\alpha + \gamma = \beta$.

$[E_1, E_3] = \frac{1}{\sqrt{3}}E_2$. 即是 $N_{13} = -N_{31} = -N_{12} = -N_{23} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

基林度规：$g_{ij} = \sum\limits_{\alpha \in \Sigma} \alpha_i \alpha_j$,

$$\begin{aligned} g_{\alpha,-\alpha} &= \sum_j C_{\alpha j}^{\alpha} \cdot C_{-\alpha\alpha}^{j} + \sum_i C_{\alpha,-\alpha}^{j} C_{-\alpha j}^{-\alpha} \\ &\quad + \sum_{\beta \in \Sigma} C_{\alpha\beta}^{\alpha+\beta} C_{-\alpha,(\alpha+\beta)}^{\beta} \\ &= 2\sum_j \alpha_j \alpha^j - \sum_{\beta \in \Sigma} N_{\alpha\beta} N_{-\alpha(\alpha+\beta)}. \end{aligned}$$

最后得到$g_{11} = g_{22} = 1$，$g_{12} = g_{21} = 0$；

$g_{1,-1} = g_{2,-2} = g_{3,-3} = 1$（$\alpha \Rightarrow 1, \beta \Rightarrow 2, \gamma \Rightarrow 3$），其余为 0.

$$g=\begin{bmatrix}1&0&&&&&&\\0&1&&&&&&\\&&0&1&&&&\\&&1&0&&&&\\&&&&0&1&&\\&&&&1&0&&\\&&&&&&0&1\\&&&&&&1&0\end{bmatrix}\quad(8\times 8)$$

若令 $\widetilde{E}_\alpha=(E_\alpha+E_{-\alpha})/2,\widetilde{E}'=\frac{\mathrm{i}}{2}(E_\alpha-E_{-\alpha})$ 等，则 $g_{AB}=\delta_{AB}$，可全部归一化.]

§7.3　单纯根与邓金(Dynkin)图

当 $l>2$ 时，我们无法直观地将李代数的根系全部表达出来.但是，基于 l 维空间只有 l 个线性独立的矢量或根矢量，所有根系均由这些独立的根矢量构成.因此探明这些独立的根矢量，根据根系的性质，就可以找到其它的根或基础根系，并用这些独立的根矢量的线性组合表达出来.确定独立根矢量的集合，有多种选择方案，其中单纯根是最常见的选择.单纯根可以用二维图形表现，这就是所谓邓金图.邓金图中，蕴藏有根矢量完备集合 Σ，以及有关根的长度及夹角的所有信息.

1. 单纯根

在任意选定的正交基中，根矢量均可以用坐标表示.若根坐标中，第一个非零分量是正的，则称此根为正根.正根集合记为 Σ^+.

例 1　B_2 的 8 个非零根

$$(1,0),(1,1),(0,1),(-1,1),$$
$$(-1,0),(-1,1),(0,-1),(1,-1)$$

中,有 4 个正根

$$(1,0),(1,1),(0,1),(1,-1).$$

则所有正根之和 $\Sigma\alpha^+=(3,1)$.

例 2 例外李代数 F_4,其正根集合 Σ^+ 包含 24 个正根:

$e_j(j=1,2,3,4)$;$e_j\pm e_i(j<i,i,j=1,2,3,4)$(共 16 个);

$$\frac{1}{2}(e_1\pm e_2\pm e_3\pm e_4)\quad(8\text{ 个}).$$

$$\Sigma\alpha^+=(11,5,3,1).$$

如果根不能分解为两个正根之和,则此根称为单纯根(也有译作素根).单纯根的集合常记为 Π.

一般说来,正根、单纯根与基的选择有关.但是由于根 α 与 $(-\alpha)$ 均为根,故以前谈及的经典李代数与例外李代数都有一半非零根是正根.

例 3 B_2 中有 2 个正根是单纯根

$$(0,1),\quad(1,-1).$$

其它 2 个正根由于可以作分解:

$$(1,0)=(1,-1)+(0,1),\quad(1,1)=(1,0)+(0,1),$$

故非单纯根.

单纯根系具有下列重要性质.

(1) 设 α 与 β 为两单纯根,则其差非单纯根,即若 $\alpha,\beta\in\Pi$,则 $\alpha-\beta\overline{\in}\Pi$.

证明 设 $\alpha-\beta\equiv\gamma\in\Pi$.若 γ 为正根,则 $\alpha=\beta+\gamma$ 为正根,因此 α 为非单纯根,与题设不符.若 γ 为负根,因 $-\gamma$ 为正根,且 $\beta=\alpha+(-\gamma)$,即 β 为非单纯根,又与题设不符.故 $\alpha-\beta$ 不是单纯根.

(2) 若 $\alpha,\beta\in\Pi$,且 $\alpha\neq\beta$,记

$$2(\alpha,\beta)/(\alpha,\alpha)=-p,\quad\frac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}=-q,$$

则 p 与 q 均为非负整数.

证明 按根列性质 $-p$ 或 $-q$ 应为整数.若为正整数,则 $\alpha-\beta$

或 $\beta-\alpha$ 是根，两者必有一个是正根($\alpha\neq\beta$). 设 $\phi\equiv\beta-\alpha\in\Sigma^+$，则 $\beta=\phi+\alpha$，β 必非正根，与题设矛盾.

(3) 若 $\alpha,\beta\in\Pi$，且 $(\alpha,\alpha)\leqslant(\beta,\beta)$，则两根矢夹角 θ 为 90°、120°、135°或 150°，且

$$\frac{(\beta,\beta)}{(\alpha,\alpha)}=\begin{cases}1 & (\theta=120°),\\ 2 & (\theta=135°),\\ 3 & (\theta=150°),\\ \text{不确定} & (\theta=90°).\end{cases}$$

本性质与第六章根列类似性质证法相同.

(4) 单纯根集合对于 l 维根空间是完备集合，即 $\forall\ \alpha\in\Sigma$，$\forall\ \alpha_i\in\Pi$，有

$$\alpha=\sum_i m_i\alpha_i,\tag{7.35}$$

其中 m_i 是相应线性组合系数.

证明 先证单纯根 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性相关. 可设

$$\alpha_n=\sum_i^m\lambda_i\alpha_i+\sum_{j=m+1}^{n-1}\lambda_j\alpha_j\equiv y^{(+)}+z^{(-)},$$

其中 $\lambda_i>0(i=1,\cdots,m)$，$\lambda_j<0(j=m+1,\cdots,n-1)$.

$$(y^{(+)},z^{(-)})=\sum_{i=1}^m\lambda_i\sum_{j=m+1}^{n-1}\lambda_j(\alpha_i,\alpha_j).$$

注意到 $\lambda_i>0$，$\lambda_j<0$，$(\alpha_i,\alpha_j)<0$(性质 2)，有

$$(y^{(+)},z^{(-)})>0.$$

显然，由此可得

$$(\alpha_n,y^{(+)})=(y^{(+)},y^{(+)})+(z^{(-1)},y^{(+)})>0.$$

但是由于性质 2，$\forall\ \alpha_i\in\Pi$，均有

$$(\alpha_i,\alpha_j)\leqslant 0,$$

因此应有

$$(\alpha_n,y)=\sum_{i=1}^m\lambda_i(\alpha_n,\alpha_i)\leqslant 0.$$

这是一个矛盾. 因此 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性独立.

设 $\alpha\in\Sigma^+$. 如果 α 为单纯根，则(7.35)式显然成立. 若 α 为非单纯根，则 $\alpha=\beta+\gamma,\beta,\gamma\in\Sigma^+$. 将全体正矢量按大小排列起来，小的在前，大的在后. 此时，$\alpha>\beta,\alpha>\gamma$，其中 β 与 γ 按归纳法假设可表为(7.35)式，代入 $\alpha=\beta+\gamma$，α 亦表如(7.35)式. 且系数 m_i 均为非负整数.

设 α 为负根矢，则 $-\alpha\in\Sigma^+$，即是 $-\alpha$ 可表为(7.35)式，α 亦可表为(7.35)式.

换言之，在半单李代数的根矢线性空间，只要引进一个次序以后，单纯根的全体集合 Π 就是根系 Σ 的基矢(基础根矢)集合，单纯根的个数为 l. 一般地说，(7.35)式可改写为

$$\alpha=\varepsilon\sum_{i=1}^{l}m_i\alpha_i, \tag{7.36}$$

其中 $\forall\ \alpha\in\Sigma,\forall\ \alpha\in\Pi$. 当 $\alpha\in\Sigma^+$ 时，$\varepsilon=+1$；当 $\alpha\in\Sigma^-$ 时，$\varepsilon=-1$；$\forall\ m_i\geqslant 0$.

经典李代数的单纯根系与例外李代数的单纯根系可表示为：

$\Pi(A_l):(e_i-e_{i+1})(i=1,\cdots,l)$；

$\Pi(B_l):(e_i-e_{i+1})(i=1,\cdots,l-1),e_l$；

$\Pi(C_l):(e_i-e_{i+1})(i=1,\cdots,l-1),2e_l$；

$\Pi(D_l):(e_i-e_{i+1})(i=1,\cdots,l-1),e_{l-1}+e_l$；

$\Pi(G_2):\alpha=(1,0),\beta=(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，

或记为 $\{e_1-e_2,3e_2-e^{(3)}\},e^{(n)}=\sum_{k=1}^{n}e_k$；

$\Pi(F_4):\{e_1-e_2,e_2-e_3,e_3,\frac{1}{2}(e_4-e_1-e_2-e_3)\}$

$\Pi(E_6):\{e_1-e_2,e_2-e_3,e_3-e_4,e_4-e_5,e_5-e_6;$

$$-e_1-e_2-e_3+\frac{1}{2}e^{(6)}+\frac{\sqrt{2}}{2}e_7\};$$

$\Pi(E_7):\{e_i-e_{i+1}(i=1,\cdots,6);\frac{1}{2}e^{(6)}-e_1-e_2-e_3-e_4\}$；

$$\Pi(E_8):\{e_i-e_{i+1}(i=1,\cdots,6),e_6+e_7,e_8-\frac{1}{2}e^{(8)}\}. \qquad (7.37)$$

可以证明,半单李代数单纯根系 Π 只存在经典李代数与例外李代数两种类型.

2. 邓金图

表达单纯根系全部信息(个数、夹角和长度比)的图形称为邓金图.其作图规则是:

○ 较长的单纯根　　● 较短的单纯根

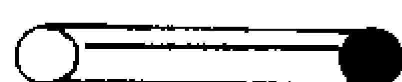
—— 连接夹角为 120°的单纯根

═ 连接夹角为 135°的单纯根

≡ 连接夹角为 150°的单纯根

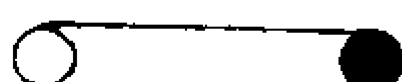
正交的单纯根之间无连线

例 4　G_2 的邓金图



表示两单纯根一长一短,夹角为 150°;

B_2 的邓金图



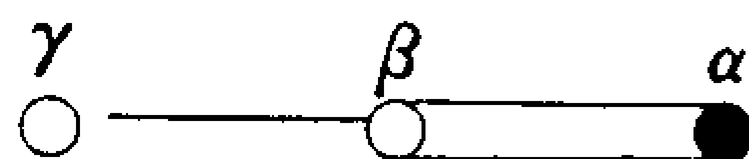
表示两单纯根一长一短,但夹角为 135°;

D_2 的邓金图



表示两正交的子根系;

B_3 的邓金图



表示有三单纯根,其中 2 个较长,1 个为短根.两长根之间夹角为 120°,其中一长根 β 与短根 α 之间的夹角为 135°.

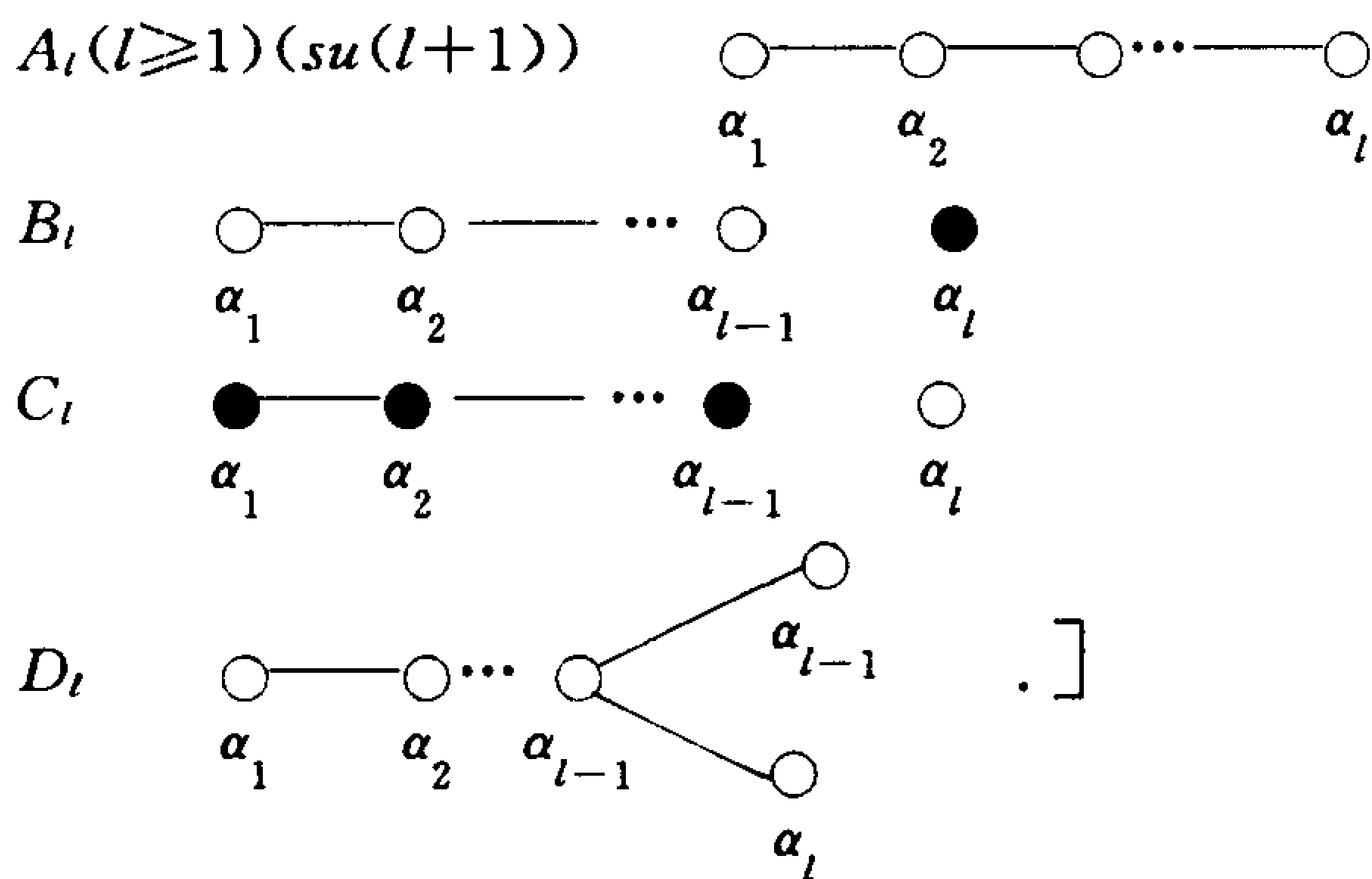
一般而论,如果邓金图不连通,则表明 Π 由 n 个正交子系构成.每个邓金图中连通的子系,确表一个单纯李代数,原半李代数

是这些单李代数的直和.

问　　题

1. 给出所有经典李代数的邓金图.

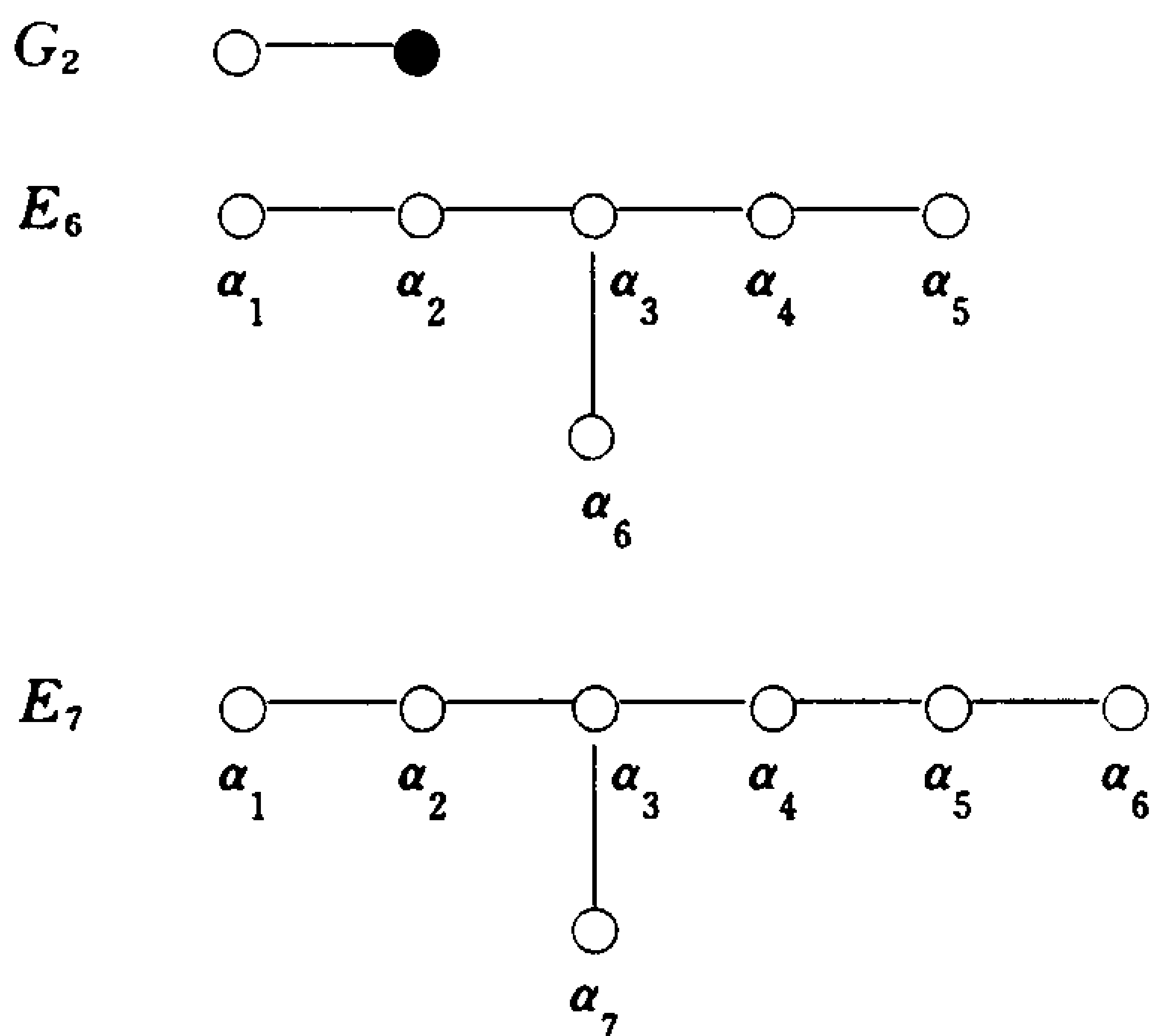
[提示:

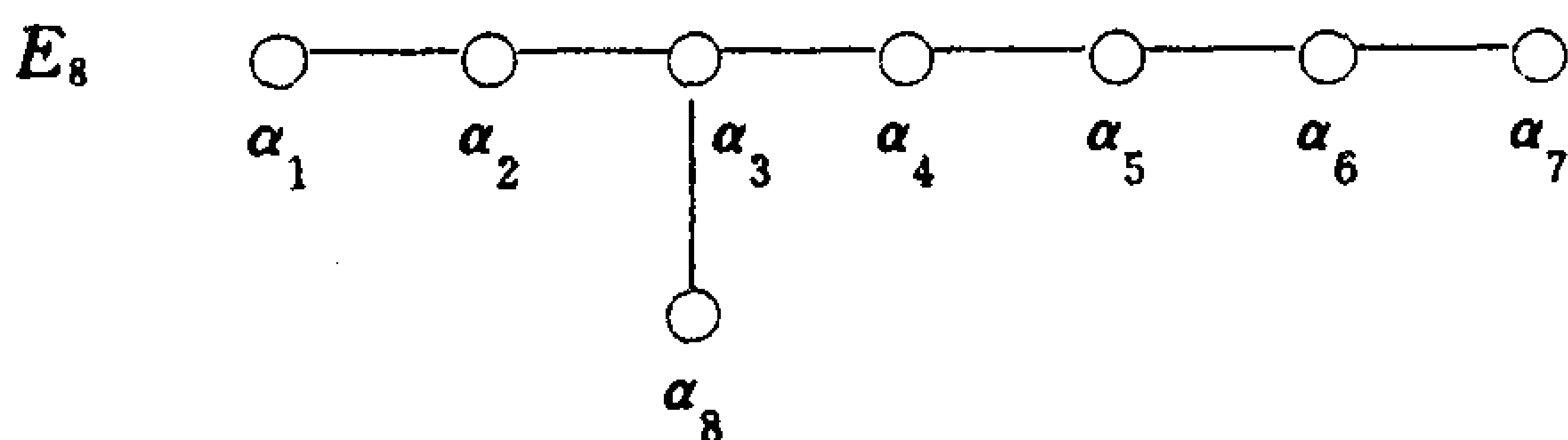


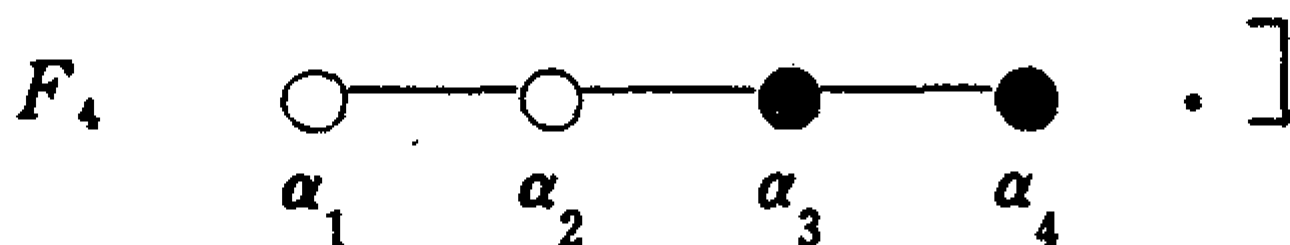
.]

2. 给出所有例外李代数的邓金图.

[提示:







.]

3. 证明单纯李代数的邓金图不会断开.

[提示:易证两单纯根之和或之差均非根.非连通部分单纯根均正交,故相应生成元相互对易.就是李代数分解为两理想的直和,与单纯性相矛盾.]

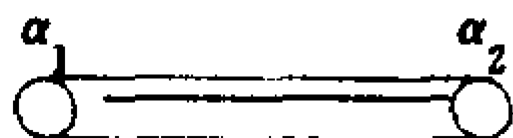
4. 试证任何邓金图不含封闭环.

[提示:用反证法.设有闭环 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,且 $\alpha_1=\alpha_{n+1}$. 令 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\neq 0$,则

$$
\begin{aligned}
(\alpha,\alpha) &= \Big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i,\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\Big) \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}2(\alpha_i,\alpha_i)+2\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i,\alpha_{i+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[(\alpha_i,\alpha_i)(1+2\cos(\alpha_i,\alpha_{i+1})\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\|\alpha_i\|^2(1-1)=0,
\end{aligned}
$$

即 $(\alpha,\alpha)=\|\alpha\|^2\leqslant 0$. 这与正定性矛盾.]

5. 证明角图



是 Π 系角图(两根之间有线段连结起来的图形)中唯一含有三线连接的图形.

[提示:用反证法,设还有单纯根 α_3 与 α_2 相连结.对于三个线性无

关的矢量，其夹角

$$\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle+\langle\alpha_2,\alpha_3\rangle+\langle\alpha_3,\alpha_1\rangle<360^\circ$$

但$\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle=150^\circ$，$\langle\alpha_2,\alpha_3\rangle\Longrightarrow 120$，$\langle\alpha_3,\alpha_1\rangle\Longrightarrow 90^\circ$，故不可能还有$\alpha_3$与$\alpha_2$连接.]

5. 单纯根Π系中任何一点不能引出三条以上的线与之连结.

[提示：设$\alpha,\alpha_i(i=1,\cdots,l)\in\Pi$，且$\alpha_i$均与$\alpha$相连. α_i之间无连线，表明它们彼此正交$\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle=90^\circ(i\neq j,i,j=1,\cdots,l)$，$(\alpha,\alpha_i)<0$. 由$\alpha$与$\alpha_i$的线性组合可以构成$\gamma$，

$$\gamma=\sum_{j=0}^{l}\frac{(\gamma,\alpha_j)\alpha_j}{|\alpha_j|^2}$$

$$\xrightarrow{(\alpha\equiv\alpha_0)}|\gamma|^2=\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{l}\left[\frac{2(\gamma,\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)}\frac{2(\gamma,\alpha_j)}{(\gamma,\gamma)}|\gamma_j|^2\right]$$

$$+\frac{(\gamma,\alpha)^2}{(\alpha,\alpha)}<\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{l}[\cdots]|\gamma|^2$$

$$\Rightarrow\sum_{j=1}^{l}\left[\frac{2(\gamma,\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)}\frac{2(\gamma,\alpha_j)}{(\gamma,\gamma)}<4\right.$$

$\Rightarrow$ 连线数 <4.]

6. 验证对于半单李代数，

$$4\sum_{j=1}^{l}\cos^2(\alpha,\alpha_j)\equiv\sum_{j=1}^{l}\frac{2(\alpha,\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)}\frac{2(\alpha,\alpha_j)}{(\alpha,\alpha)}\equiv k,$$

即是与根α相连的线的数目.

[提示：证明5题用到这个结果.]

7. 设有m个单纯根$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$一一单线相连构成的集合Π，且$\|\alpha_1\|=\|\alpha_2\|=\cdots=\|\alpha_m\|$，则该集合与其它简纯根的连线小于4.

[提示：显然，当$i\neq j$时，$2(\alpha_i,\alpha_j)=-v^2(\delta_{i,j-1}+\delta_{i,j+1})$，$v\equiv\|\alpha_i\|$ $(i=1,\cdots,m)$. 令$\alpha=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j$，则

$$(\alpha,\alpha)\equiv|\alpha|^2=(\sum_i\alpha_i,\sum_j\alpha_j)$$

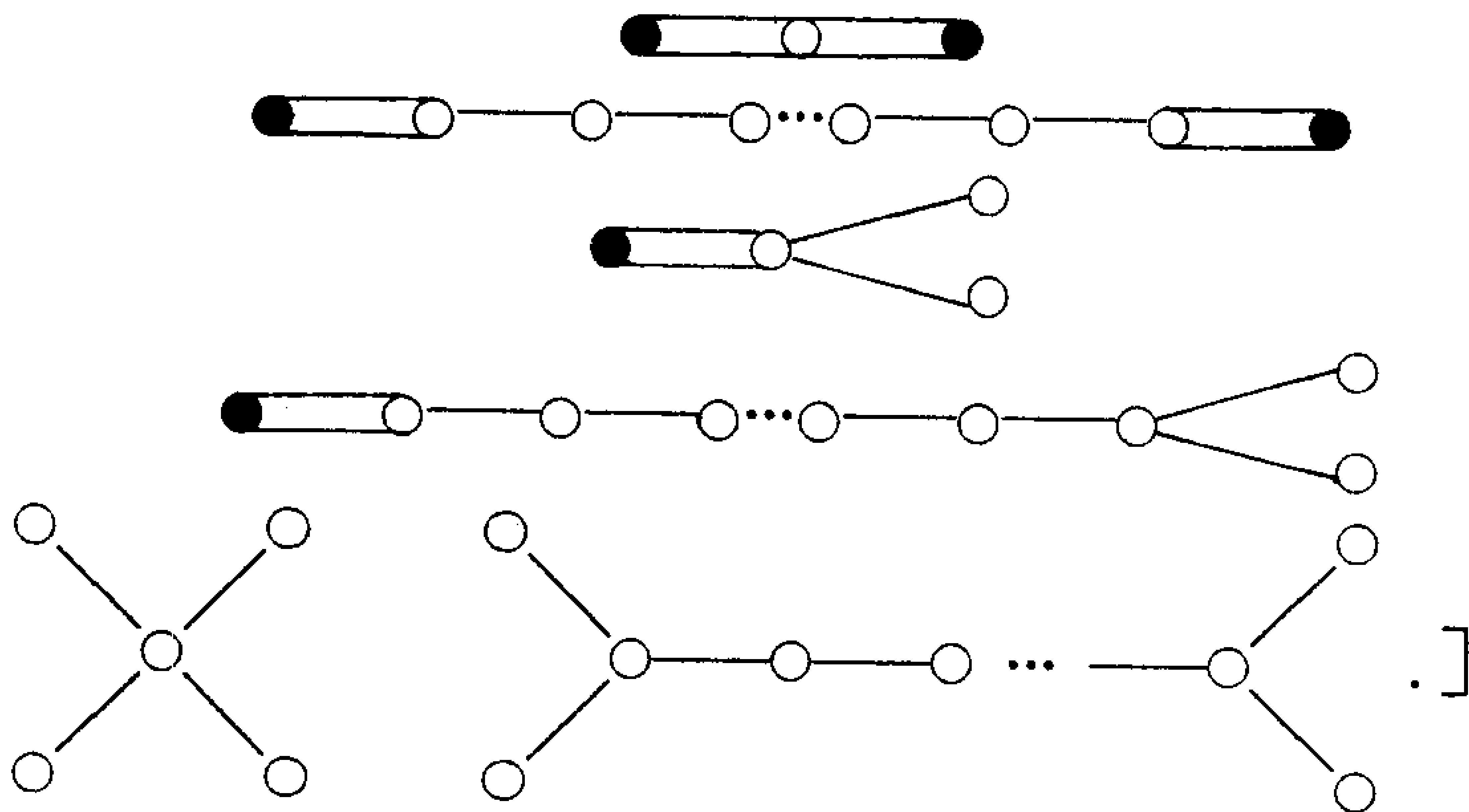
$$=\sum_{i,j=1}^{m}(\alpha_i,\alpha_j)=\sum_{i,j=1}^{m}{}'(\alpha_i,\alpha_j)+\sum_{i=1}^{m}(\alpha_i,\alpha_i)$$

$$=+mv^2+\sum_{i,j}{}'-v^2(\delta_{i,j-1}+\delta_{i,j+1})/2$$

$$=+mv^2+\sum_{i=1}^{m-1}-\frac{v^2}{2}[(\alpha_i,\alpha_{i-1})+(\alpha_i,\alpha_{i+1})]$$

$$=+mv^2-(m-1)v^2=v^2.$$

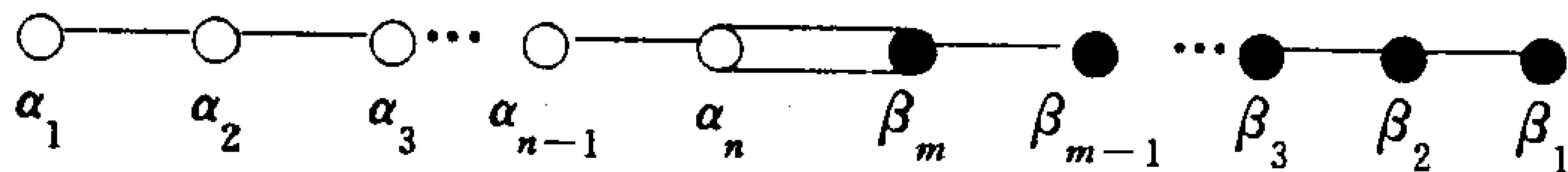
用 α 代替第 4 题中 γ，即得所证. 综合 4、6 题，下列图形不允许：



.]

8. 试给出带双线邓金图所有可能形式.

[提示：由 4、6、7 题结果，带双线邓金图可设为



图中 $\|\alpha_1\|=\|\alpha_2\|=\cdots=\|\alpha_n\|=v$，$\|\beta_1\|=\cdots=\|\beta_m\|=\sqrt{2}\,v$.

令 $\alpha=\sum_{j=1}^{n}j\alpha_j$；$\beta=\sum_{j=1}^{m}j\beta_j$，则，

$$\|\beta\|^2=(\beta,\beta)=(\sum_{i=1}^{m}i\beta_i,\sum_{j=1}^{m}j\beta_j)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{m} ij(\beta_i,\beta_j) = \sum_{i=1}^{m}(i)^2(\beta_i,\beta_i) + \sum_{i,j}^{m_7} ij(\beta_i,\beta_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}(i)^2(2v)^2 + 2\sum_{i=1}^{m-1} i(i+1)(-v^2)$$

$$= (m^2 - \sum_{i=1}^{m-1} i)(2v)^2 = (m^2 - \frac{1}{2}m(m-1))(2v)^2$$

$$= m(m+1)v^2.$$

同样可得

$$\| \alpha \|^2 = (\alpha,\alpha) = \frac{1}{2}n(n+1)v^2.$$

由于 α 与 β 并非线性相关(即共线),则

$$(\alpha \times \beta, \alpha \times \beta) \equiv (\alpha \times \beta)^2 = \| \alpha \|^2 \| \beta \|^2 - (\alpha,\beta)^2$$

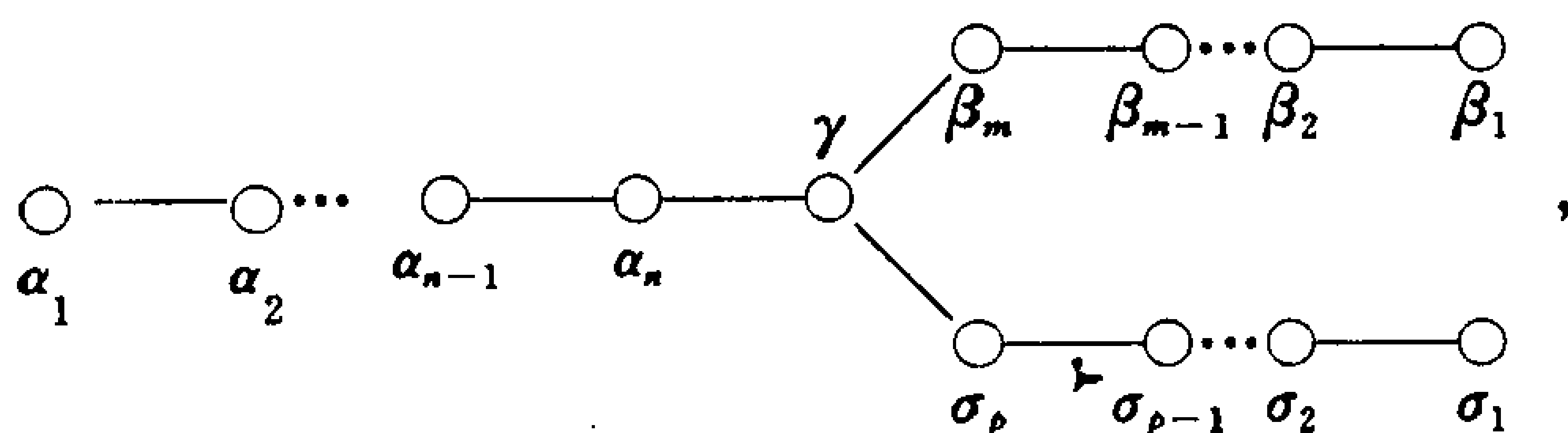
$$= \frac{1}{2}mn(m+1)(n+1)v^4 - 2mn(\alpha_m,\beta_n)^2$$

$$= \frac{1}{2}mnv^4[mn + m + n + 1 - 2mn] > 0,$$

$$\Rightarrow (m-1)(n-1) - 2 < 0.$$

若 $m=1$,则 n 可取任何整数,设 $n=l-1$,则得 B_l 的邓金图.若 $n=1$,则 m 可取任何整数,设 $m=l-1$,则得 C_l 的邓金图.若 $n=m=2$,则得 F_4 的邓金图.]

9. 由单纯根构成的分叉图.



所有单纯根模相等,讨论其可能图形.

[提示,令 $\alpha = \sum_{j=1}^{n} j\alpha_j, \beta = \sum_{j=1}^{m} j\beta_j, \sigma = \sum_{j=1}^{p} j\sigma_j$.

由图可知,它们正交,且与 γ 线性无关,

$$|\gamma|^2 > \frac{(\gamma,\alpha)}{|\alpha|^2} + \frac{(\gamma,\beta)}{|\beta|^2} + \frac{(\gamma,\sigma)}{|\sigma|^2}.$$

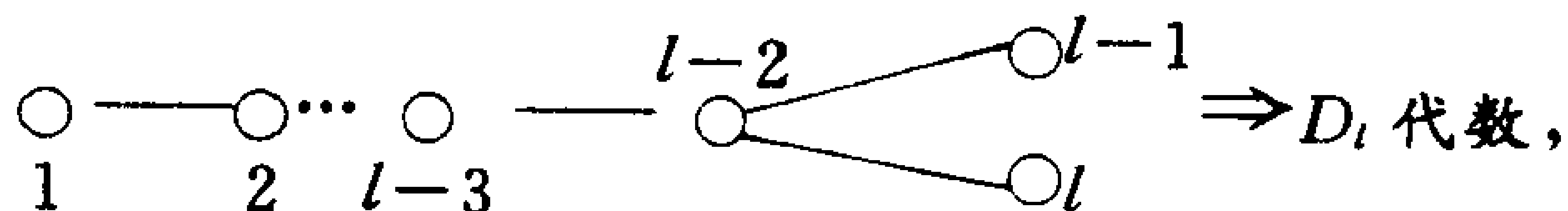
但

$$\begin{cases}(\gamma,\alpha)/|\gamma^2||\alpha|^2 = \frac{n^2}{4}/\frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+1)} \\ (\gamma,\beta)/|\gamma^2||\beta|^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(m+1)} \\ (\gamma,\sigma)/|\gamma|^2|\sigma|^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(p+1)}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{p+1}\right] < 1. \\ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{p+1} > 1.\end{cases}$$

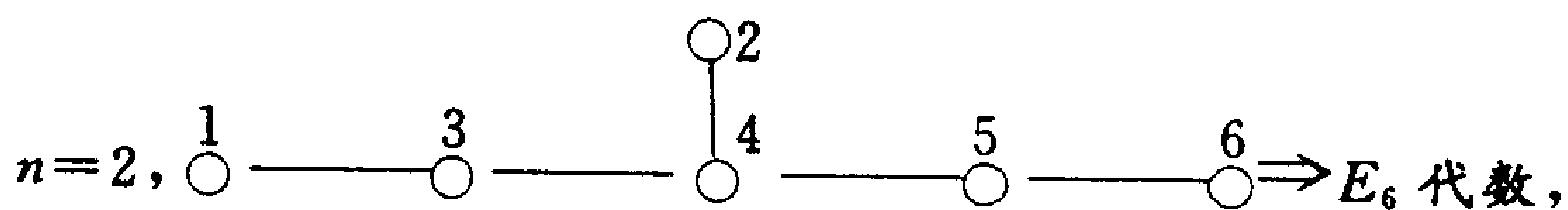
由于图形的对称性，可令 $n\geqslant m\geqslant p\Rightarrow\frac{3}{p+1}>1$，$p=1$；$\frac{2}{m+1}>\frac{1}{2}$，$m=1,2$，即是

当 $m=p=1$ 时，令 $n=l-3$，得

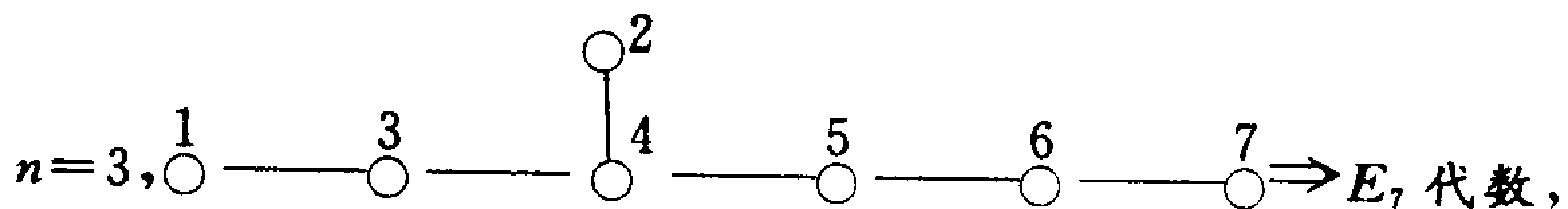


$\Rightarrow D_l$ 代数，

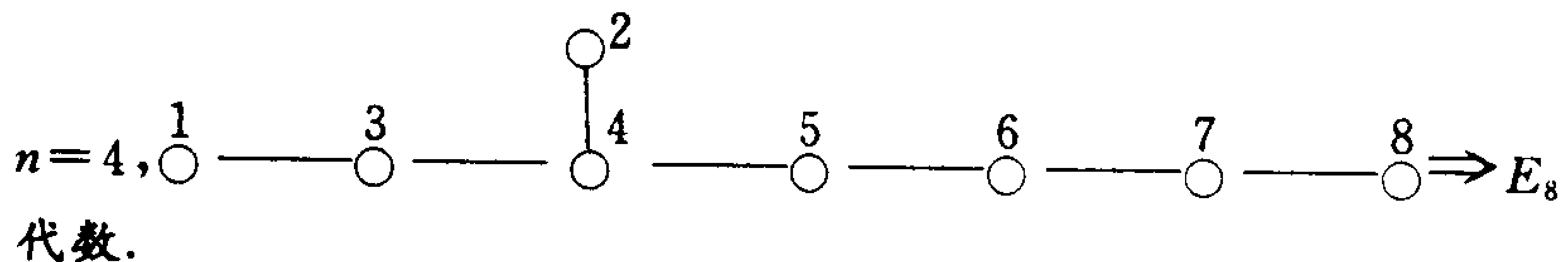
$p=1,m=2\longrightarrow n<5$，

$n=2$，

$\Rightarrow E_6$ 代数，

$n=3$，

$\Rightarrow E_7$ 代数，

$n=4$，

$\Rightarrow E_8$ 代数.

此外，A_l 就是单纯根构成的单线图.]

§7.4 卡当矩阵与李代数结构

本节的内容与前一节相反，即解读邓金图．我们将从邓金图出发，由单纯根系找到全部根系，从而给出李代数的结构．

由单纯根系确定全部根系，最好的武器是卡当矩阵．

1. 卡当矩阵

设 $\Pi=(\alpha_1,\cdots,\alpha_l)$ 为李代数的单纯根系，且 $\forall\ \alpha_i,\alpha_j\in\Pi$，则以

$$A_{ij}\equiv\frac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_i,\alpha_i)}(i,j=1,\cdots,l) \tag{7.38}$$

为矩阵元的矩阵，称为该李代数的卡当矩阵．

容易看出，卡当矩阵对角元 $A_{ii}=2(i=1,\cdots,l)$，非对角元则只取 0，－1，－2，－3．

例 1 A_2 代数（$su(3)$）．邓金图

$$\underset{\alpha_1}{\bigcirc}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\underset{\alpha_2}{\bigcirc}\Rightarrow\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle=120°,$$

$$(\alpha_1,\alpha_1)=(\alpha_2,\alpha_2)=1,\quad(\alpha_1,\alpha_2)=-\frac{1}{2},$$

$$A=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}.$$

例 2 A_3 代数（$su(3)$）．邓金图

$$\overset{\alpha_1}{\bigcirc}\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{\alpha_2}{\bigcirc}\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{\alpha_3}{\bigcirc}\Rightarrow\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle=\langle\alpha_2,\alpha_3\rangle=120°,$$

$$(\alpha_i,\alpha_i)=1\quad(i=1,2,3),\quad(\alpha_1,\alpha_2)=(\alpha_2,\alpha_3)=-\frac{1}{2},$$

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}.$$

例 3 G_2 代数．邓金图

$$\underset{\alpha_1}{\circ}\!\!-\!\!-\!\!-\underset{\alpha_2}{\bullet} \Rightarrow \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = 150°,$$

$$(\alpha_2, \alpha_2) = 1, \ (\alpha_1, \alpha_1) = 3, \ (\alpha_1, \alpha_2) = -\frac{3}{2},$$

$$A_{12} = \frac{2(\alpha_1, \alpha_2)}{(\alpha_1, \alpha_1)} = -1, \quad A_{21} = \frac{2(\alpha_2, \alpha_1)}{(\alpha_2, \alpha_2)} = -3,$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. 解读卡当矩阵法则

由单纯根定义，设$\forall\ \alpha \in \Sigma^+$，$\forall\ \alpha_i \in \Pi$，则可作展开

$$\alpha = \sum_{i=1}^{l} K_i \alpha_i, \tag{7.39}$$

其中 K_i 为非负整数. 若 $\sum_{i=1}^{l} K_i = m$，则根 α 称为第 m 层正根. 显然，单纯根是一层根.

所有正根可以从第一层开始，逐步向高层求得. 假设第 m 层根，及第 $1,2,\cdots,(m-1)$层正根均已求出，则第 $m+1$ 层正根 β 必有形式

$$\beta = \alpha + \alpha_j (\alpha_j \in \Pi), \tag{7.40}$$

其中 α 为第 m 层正根. 问题归结到是哪一个 α_j，可由(7.40)式给出 $\beta \in \Sigma^+$. 为此考虑根列

$$\alpha - r\alpha_j, \cdots, \alpha - \alpha_j, \alpha, \alpha + \alpha_j, \cdots, \alpha + q\alpha_j. \tag{7.41}$$

在根列中，由于第 m 层以下正根均已知，故 r 是知道的，只需求出 q 就可以了. 但由根列性质

$$r - q = \frac{2(\alpha, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)}, \tag{7.42}$$

将(7.40)式代入(7.42)式，并且考虑(7.38)、(7.39)式得

$$q = r - \frac{2(\sum_{i=1}^{l} K_i \alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} = r - \sum_{i=1}^{l} K_i A_{ji}. \qquad (7.43)$$

因此，根据(7.43)式可以确定 $q(q>0)$.

找到全部正根系，负根系由 $-\alpha$ 即可得到.

例 4 G_2 代数.

由例 3，已经得到其卡当矩阵. 从单纯根 α_1 和 α_2 开始. 单纯根的差 $\alpha_1-\alpha_2$ 和 α_2-1 不是根. 设 $\alpha=\alpha_1, \alpha_2$ 则 $r=0, q=1$，含 α_2 的 α_1 根列为

$$\alpha_2, \quad \alpha_2 + \alpha_1,$$

以及 $q=3$，含 α_1 的 α_2 根列为

$$\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1 + 3\alpha_2.$$

第二层：$2\alpha_1$ 与 $2\alpha_2$ 均不是根. 令 $\alpha=\alpha_1$，考虑 $\alpha+\alpha_2$，由于 $\alpha-\alpha_2$ 不是根，故 $r=0, K_1=1, K_2=0$.

$$q = r - \sum_{i=1}^{2} K_i A_{2i} = - A_{21} = 3,$$

即 $\alpha_1+\alpha_2$、$\alpha_1+2\alpha_2$(第二层)、$\alpha+2\alpha_3$(第三层)均为根. $\alpha_1+\alpha_2$ 是第二层唯一正根.

第三层：令 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$. 考虑 $\alpha+\alpha_1$，由于 $\alpha-\alpha_1=\alpha_2$ 是根，$r=1$，且 $K_1=K_2=1$.

$$q = r - \sum_{i=1}^{2} K_i A_{1i} = 1 - \alpha + 1 = 0,$$

亦即 $\alpha+\alpha_1=2\alpha_1+\alpha_2$ 不是根. $\alpha_1+2\alpha_2$ 是第三层唯一正根.

第四层：令 $\alpha=\alpha_1+2\alpha_2$. 考虑 $\alpha+\alpha_2$，由于 $\alpha-2\alpha_2=\alpha_1$ 是根，故 $r=\alpha$. $K_1=1, K_2=2$.

$$q = r - \sum_{i=1}^{2} K_i A_{2i} = 1,$$

亦即 $\alpha+\alpha_2=\alpha_1+3\alpha_2$ 是根. 至于 $\alpha+\alpha_1$，由于 $\alpha-\alpha_1=2\alpha_2$ 不是根，故 $r=0$. 此时

$$q = r - \sum_{i=1}^{2} K_i A_{1i} = 3 - 4 = -1,$$

亦即 $\alpha+\alpha_1=2\alpha_1+2\alpha_2$ 不是根.

第五层：令 $\alpha=\alpha_1+3\alpha_2$. 考虑 $\alpha+\alpha_2$，由于 $\alpha-3\alpha_2=\alpha_1$ 是根，故 $r=3, K_1=1, K_2=3$.

此时

$$q = r - \sum_{i=1}^{3} K_i A_{2i} = 3 + 3 - 6 = 0,$$

亦即 $\alpha_1+4\alpha_2$ 不是根. 考虑 $\alpha+\alpha_1$，由于 $\alpha-\alpha_1=3\alpha_2$ 不是根，$r=0$，$K_1=1, K_2=3$.

$$q = r - \sum_{i=1}^{3} K_i A_{1i} = 0 - 2 + 3 = 1,$$

亦即 $\alpha+\alpha_1=2\alpha_1+3\alpha_2$ 为仅有的第五层正根.

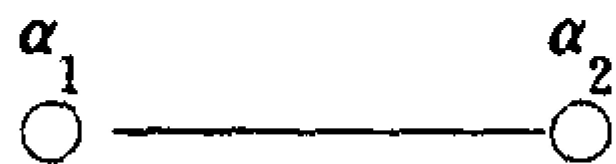
现已有 6 个正根，故知非零根 12 个：

$$\pm\alpha_1, \quad \pm\alpha_2, \quad \pm(\alpha_1+\alpha_2), \quad \pm(\alpha_1+2\alpha_2),$$
$$\pm(\alpha_1+3\alpha_2), \quad \pm(2\alpha_1+3\alpha_2),$$

连同 2 个零根，共 14 根. G_2 代数无第六层以上的根. 其根图见图 7.1.

求出李代数的根系以后，即可确定基矢的对易关系，从而完全得到李代数的结构关系.

例 5 李代数 $A_2(su(3))$，其邓金图为



两单纯根等长，$\|\alpha_1\|=\|\alpha_2\|$，夹角 $\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle=120°$. 即是

$$(\alpha_1,\alpha_1)=(\alpha_2,\alpha_2)=1, (\alpha_1,\alpha_2)=(\alpha_2,\alpha_1)=-1/2.$$

故其卡当矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

第二层根：$2\alpha_1$ 与 $2\alpha_2$ 均非根. 令 $\alpha=\alpha_1$，则 $K_1=1, K_2=0$. 考虑

$\alpha+\alpha_2$，由于 $r=0$（$\alpha-\alpha_2$ 不是根），

$$q = r - \sum_{i=1}^{2} K_i A_{2i} = 1,$$

亦即 $\alpha+\alpha_2=\alpha_1+\alpha_2$ 是第二层仅有的正根.

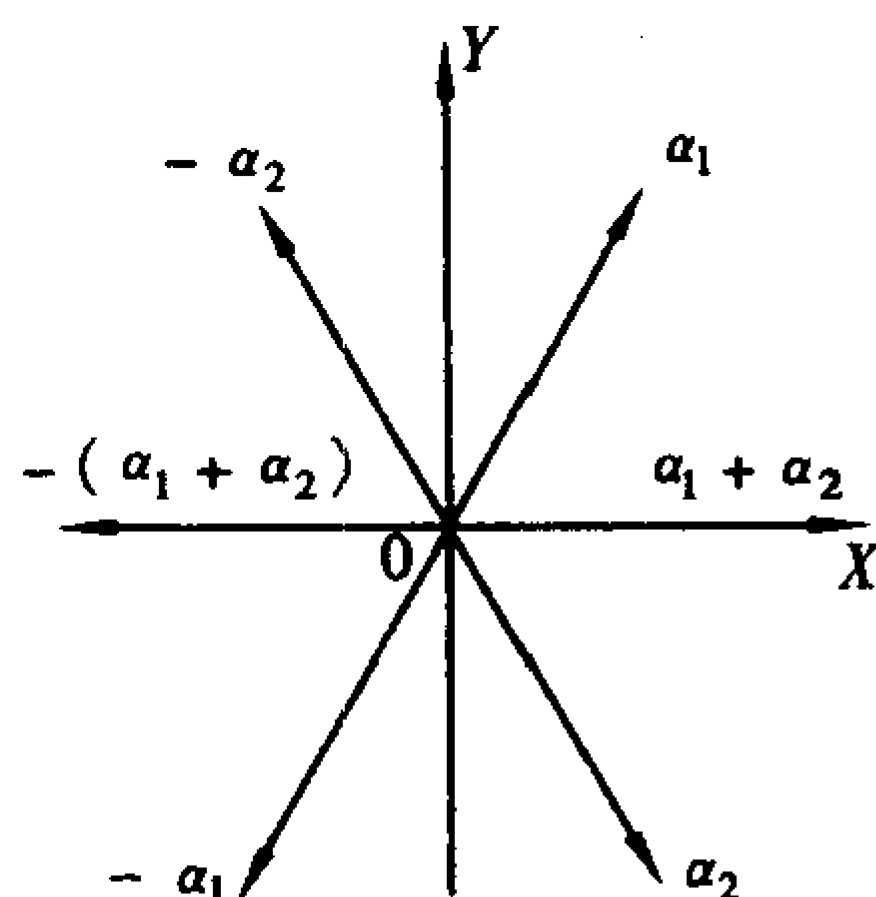


图 7.8 A_2 根图

易证无高于第二层以上的根. 即是 A_2 代数有 2 个零根以及 6 个非零根：$\pm\alpha_1$，$\pm\alpha_2$，$\pm(\alpha_1+\alpha_2)$.

根图可见图 7.8.

其中 $\alpha_1+\alpha_2=\dfrac{(1,0)}{\sqrt{3}}$，

$$-(\alpha_1+\alpha_2)=\frac{(-1,0)}{\sqrt{3}}.$$

采用归一化

$$\sum_{\alpha} \alpha_i \alpha_j = g_{ij} = \delta_{ij}.$$

由于 A_2 代数采用三维空间基矢，将根图投影到二维平面上，要乘以因子 $\sqrt{2}$. 一般 A_l 代数的基矢应采用归一化常数（见问题 4）

$$N(A_l) = \{\alpha(\alpha l + 1)\}^{-1/2}.$$

因此根的归一化常数采用 $1/\sqrt{3}$. 易见

$$\alpha_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(1, \sqrt{3}), \quad \alpha_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(1, -\sqrt{3}).$$

此时李代数对易关系可以写作

$$[H_i, H_j] = 0 \quad (i, j = 1,2);$$

$$[H_i, E_{\pm\alpha_1}] = \pm \alpha_{1i} E_{\alpha 1} \Rightarrow \begin{cases} [H_1, E_{\pm\alpha_1}] = \pm \dfrac{1}{2\sqrt{3}} E_{\pm\alpha_1}, \\ [H_2, E_{\pm\alpha_1}] = \pm \dfrac{1}{2} E_{\pm\alpha_1}; \end{cases}$$
$(i=1,2)$

$$[H_i, E_{\pm\alpha_2}] = \pm\, \alpha_{2i} E_{\alpha_2} \Rightarrow \begin{cases} [H_1, E_{\pm\alpha_2}] = \pm \dfrac{1}{2\sqrt{3}} E_{\pm\alpha_2}, \\ [H_2, E_{\pm\alpha_2}] = \mp \dfrac{1}{2} E_{\pm\alpha_2}; \end{cases}$$
$(i=1,2)$

$$[H_1, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}] = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)};$$

$$[H_2, E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}] = 0;$$

$$[E_{\alpha_1}, E_{-\alpha_1}] = \frac{1}{2\sqrt{3}} H_1 + \frac{1}{2} H_2;$$

$$[E_{\alpha_2}, E_{-\alpha_2}] = \frac{1}{2\sqrt{3}} H_1 - \frac{1}{2} H_2;$$

$$[E_{\alpha_1+\alpha_2}, E_{-(\alpha_1+\alpha_2)}] = \frac{1}{\sqrt{3}} H_1;$$

$$[E_{\alpha_1}, E_{\alpha_1+\alpha_2}] = [E_{\alpha_2}, E_{\alpha_1+\alpha_2}] = 0.$$

在得到以上对易关系后，我们采用归一化条件(具体推导见问题1)：

$$N_{\alpha\beta} = \sqrt{r(q+1)(\alpha,\alpha)/2}, \tag{7.44}$$

其中 $r=1, q=0$，(含 α_2 的 α_1 根列，只有 $\alpha_2+\alpha_1, \alpha_2$ 两个根)，$(\alpha_1,\alpha_1)=\frac{1}{3}$，故 $N_{\alpha_1\alpha_2}=1/\sqrt{6}$. 因此还有对易关系

$$[E_{\alpha_1}, E_{\alpha_2}] = \frac{1}{\sqrt{6}} E_{\alpha_1+\alpha_2},$$

$$[E_{\alpha_1}, E_{-(\alpha_1+\alpha_2)}] = -\frac{1}{\sqrt{6}} E_{-\alpha_2},$$

$$[E_{\alpha_2}, E_{-(\alpha_1+\alpha_2)}] = \frac{1}{\sqrt{6}} E_{-\alpha_1},$$

其中用到我们已证的关系式

$$N_{\alpha\beta} = -N_{\beta\alpha} = N_{\beta-(\alpha+\beta)} = N_{-\beta-\alpha}. \tag{7.45}$$

问　　题

1. 试证明 (7.44)与(7.45)式.

[提示：

由根列基本定理：对于 $\beta+q\alpha,\beta+(q-1)\alpha,\cdots,\beta-r\alpha$ 有

$$\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3=q-r.$$

实际上，令 $\sigma=\beta+q\alpha,+\alpha\overline{\in}\Sigma$，则

$$\begin{aligned}
&[E_{-\alpha},E_\sigma]=N_{-\alpha\sigma-\alpha}\equiv E'_{\sigma-\alpha},\\
&[E_{-\alpha},E'_{\sigma-\alpha}]=E'_{\sigma-2\alpha},\\
&[E_{-\alpha},E'_{\sigma-j\alpha}]=E'_{\sigma-(j+1)\alpha},\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}\tag{7.46}$$

类似地，用 E_α 代替 $E_{-\alpha}$作对易运算，有递推公式

$$[E_\alpha,E'_{\sigma-(j+1)\alpha}]=\mu_{j+1}E'_{\sigma-j\alpha},\tag{7.47}$$

其中令 $j+1=q$，代入 $\sigma=\beta+q\alpha$，则有

$$\begin{aligned}
\mu_qE'_{\alpha+\beta}&=[E_\alpha,[E_{-\alpha},E'_{\alpha+\beta}]]\\
&\xlongequal{(\text{去掉 } E'_{\alpha+\beta} \text{ 的撇号})}N_{-\alpha,\alpha+\beta}[E_\alpha,E_\beta]\\
&=N_{-\alpha,\alpha+\beta}\cdot N_{\alpha+\beta}E_{\alpha+\beta}.
\end{aligned}$$

即是 $N_{\alpha\beta}N_{-\alpha,\alpha+\beta}=\mu_q$.

注意在证明根列性质时得到表达式

$$\mu_j=\frac{1}{2}j(q+\gamma-j+1)(\alpha,\alpha),$$

令其中 $j=q$，有(7.44)式成立，

$$N_{\alpha\beta}N_{-\alpha,\alpha+\beta}=\frac{1}{2}q(\gamma+1)(\alpha,\alpha).$$

至于(7.45)式，在上节问题 2、3 中已证 $N_{\alpha\beta}=N_{-\alpha,\alpha+\beta}$.]

2. 由经典李代数的邓金图(见§7.3 问题 1)，给出相应的卡当矩阵.

(答案：

$$A_l=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$B_l=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$C_l=\widetilde{B}_l$(转置),

$$D_l=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

)

3. 由例外李代数的邓金图给出相应的卡当矩阵.

(答案:

$$E_8=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$E_7 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$E_6 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$F_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.)$$

*4. 李代数 A_n 可以视为 $gl(n+1,c)$的所有迹为零的矩阵构成的子代数. 其卡当子代数 h 则由 $\{H_{\lambda_1\cdots\lambda_{n+1}} \mid \sum_l^m \lambda_i = 0\}$ 构成. A_n 的根系 Σ 是

$$\lambda_i - \lambda_k (i \neq k, 1 \leqslant i, k \leqslant n+1, n(n+1) \text{ 个})$$

相应的根矢量为 E_{ik}. 即令$(E_{ik})_{mn}=\delta_{im}\delta_{jn}$,

$$\forall\ H_i, H_j \in h, [H_i, H_j] = 0,$$

$$\forall\ \alpha \in \Sigma, [H_{\lambda_1\cdots\lambda_{n+1}}, E_\alpha] = \alpha E_\alpha,$$

$$\forall\ \alpha \in \Sigma, [E_\alpha, E_{-\alpha}] = H_\alpha,$$

$$\forall\ \alpha,\beta\in\Sigma,[E_\alpha,E_\beta]=\begin{cases}0 & (\alpha+\beta\,\overline{\in}\,\Sigma),\\ \pm E_{\alpha+\beta} & (\alpha+\beta\in\Sigma).\end{cases}$$

还有 $H_{\lambda_i}-H_{\lambda_k}=E_{ii}-E_{kk}(i\neq k)$, $E_{\lambda_i-\lambda_k}=E_{ik}$,

$$H_{\lambda_1\cdots\lambda_{n+1}}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_n & \\ & & & & \lambda_{n+1}\end{pmatrix}=\sum_{\substack{k,i=1\\k\neq i}}^{n+1}(\lambda_i-\lambda_k)H_{ik}.$$

请计算 A_n 的基林型对卡当子代数 $\mathscr{H}$ 的限制.

[提示:选取 $\{E_{ik}\}$ 与 $\{H_{ik}\}$ 为 A_n 的基,则内积

$$\begin{aligned}(H_{\lambda_1\cdots\lambda_{n+1}},H_{\mu_1\cdots\mu_{n+1}})&=-\Big(\sum_{i,k}(\lambda_i-\lambda_k)H_{ik},\sum_{i',k'}(\mu_{i'}-\mu_{k'})H_{i'k'}\Big)\\
&=\sum_{i,k(i\neq k)}^{n+1}(\lambda_i-\lambda_k)(\mu_i-\mu_k)\\
&=\sum_{i,k}(\lambda_i\mu_i+\lambda_k\mu_k-\lambda_i\mu_k-\lambda_k\mu_i)\\
&=2n\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i\mu_i-2\sum_{\substack{i,k=1\\i\neq k}}^{n+1}\lambda_i\mu_k\\
&=2n\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i\mu_i-2\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i\sum_{k=1}^{m}\mu_k+2\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i\mu_i\\
&=2(n+1)\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i\mu_i.\end{aligned}$$

显然,

$$(H_{\lambda_1\cdots\lambda_{n+1}},H_{\lambda_1\cdots\lambda_{n+1}})=2m\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i^2. \tag{7.48}$$

现欲将根 $\lambda_i-\lambda_k$ 嵌入 $\mathscr{H}$ 中,即使$\forall\ H_{\lambda_1\cdots\lambda_{n+1}}\in\mathscr{H}$ 有

$$(H_{\lambda_1\cdots\lambda_{n+1}},H_{\mu_1\cdots\mu_m})=\lambda_i-\lambda_k. \tag{7.49}$$

由(7.48)与(7.49)式得

$$(2n+1)\sum_{j=1}^{n+1}\lambda_j\mu_j = \lambda_i - \lambda_k.$$

注意到 $\sum_{j=1}^{n+1}\lambda_j = 0$. 故有

$$\mu_j = \begin{cases} c + \dfrac{1}{2m} & (j = i), \\ c - \dfrac{1}{2m} & (j = k), \\ c & (j \neq i, k), \end{cases}$$

其中 c 为常数. 但 $\sum_{j=1}^{n+1}\mu_j = 0$, 故 $c=0$, 即

$$\lambda_i - \lambda_k = \frac{1}{2(n+1)}(E_{ii} - E_{kk}),$$

$$(\lambda_i - \lambda_k, \lambda_i - \lambda_k) = \frac{1}{(2n+2)^2}(E_{ii} - E_{kk}, E_{ii} - E_{kk})$$

$$= \left(\frac{1}{2n+2}\right)^2 (2n+2)\cdot 2 = \frac{1}{n+1}.$$

如以 $e_i \equiv \frac{1}{2m}E_{ii}(i=1,\cdots,n+1)$ 为 $n+1$ 维欧氏空间的一组正交基, 并令 $(e_i, e_i) = \frac{1}{2n+2}$, 则 $\mathscr{H}$ 由形如 $X = \sum_{i=1}^{n+1}\mu_i e_i (\sum_{j=1}^{n+1}\mu_j = 0)$ 的矢量构成. A_n 的根系 $\Sigma(A_n)$ 可以记为

$$\{e_i - e_j, i \neq k, i, k = 1, 2, \cdots, n+1\}. \quad \rbrack$$

5. 对于李代数 $B_l(l=2n+1)$, 其卡当子代数 $\mathscr{H}$ 可以显式表为

$$\mathscr{H} = \left\{ H_{\lambda_1\cdots\lambda_n} = \left(\begin{array}{c:c:c} & & \\ \hdashline & \begin{matrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_l\end{matrix} & \\ \hdashline & & \begin{matrix}-\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & -\lambda_l\end{matrix} \end{array}\right) \right\},$$

其相应根系 $\Sigma(B_n)$ 可以表为

$$\pm\lambda_i \pm \lambda_k (i < k) \text{ 和 } \pm\lambda_i (i = 1, \cdots, l).$$

求 B_l 的基林型对 $\mathscr{H}$ 的限制.

[提示：
$$(H_{\lambda_1\cdots\lambda_l}, H_{\mu_1\cdots\mu_l}) = \sum_{i<k}(\pm\lambda_i \pm \lambda_k)(\pm\mu_i \pm \mu_k)$$
$$+ \sum_{i=1}^{l}(\pm\lambda_i)(\pm\mu_i) = \sum_{i<k}\{(\lambda_i + \lambda_k)(\mu_i + \mu_k)$$
$$+ (\lambda_i - \lambda_k)(\mu_i - \mu_k) + (-\lambda_i + \lambda_k)(-\mu_i + \mu_k)$$
$$+ (-\lambda_i - \lambda_k)(-\mu_i - \mu_k)\} + \sum_{i=1}^{l}\{\lambda_i\mu_i + (-\lambda_i - \mu_i)\}$$
$$= 2\sum_{i<k}\{(\lambda_i + \lambda_k)(\mu_i + \mu_k)$$
$$+ (\lambda_i - \lambda_k)(\mu_i - \mu_k) + 2\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\mu_i$$
$$= 2\sum_{i<k}(\lambda_i\mu_i + \lambda_i\mu_k + \lambda_k\mu_i + \lambda_k\mu_k + \lambda_i\mu_i - \lambda_i\mu_k$$
$$- \lambda_k\mu_i + \lambda_k\lambda_k) + 2\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\mu_i$$
$$= 4\sum_{i<k}(\lambda_i\mu_i + \lambda_k\mu_k) + 2\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\mu_i$$
$$= 4(l-1)\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\mu_i + 2\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\mu_i$$
$$= 4(l-2)\sum\lambda_i\mu_i.$$

尤其是

$$(H_{\lambda_1\cdots\lambda_l}, H_{\lambda_1\cdots\lambda_l}) = (4l-2)\sum_{i=1}^{l}\lambda_i^2.$$

现将根 $\pm\lambda_i$、$\pm\lambda_k$ 及 λ_i 嵌入 $\mathscr{H}$. 首先令 $H_{\lambda_1\cdots\lambda_l} \in h$，有

$$(H_{\lambda_1\cdots\lambda_l}, H_{\mu_1\cdots\mu_l}) = \lambda_i + \lambda_k,$$

即对所有 $\lambda_1, \cdots, \lambda_l$，有

$$(4n-2)\sum_{j=1}^{l}\lambda_j\mu_j = \lambda_i + \lambda_k,$$

因此，
$$\mu_j=\begin{cases}\dfrac{1}{4l-2} & (j=i,k),\\ 0 & (j\neq i,k),\end{cases}$$

并记
$$H_i=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & E_{ii} & 0\\ 0 & 0 & -E_{ii}\end{pmatrix},$$

应有
$$\lambda_i+\lambda_k=\frac{1}{4l-2}(H_i+H_k).$$

同理有
$$\pm\lambda_i\pm\lambda_k=\frac{1}{4l-2}(\pm H_i\pm H_k),$$
$$\pm\lambda_i=\frac{1}{4l-2}(\pm H_i).$$

根的长度平方，得
$$\begin{aligned}(\pm\lambda_i\pm\lambda_k,\pm\lambda_i\pm\lambda_k)&=\left(\frac{1}{4l-2}\right)^2(\pm H_i\pm H_k,\pm H_i\pm H_k)\\&=\left(\frac{1}{4l-2}\right)^2\cdot(4l-2)\cdot 2=\frac{1}{2l-1},\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}(\pm\lambda_i,\pm\lambda_i)&=\left(\frac{1}{4l-2}\right)^2(\pm H_i,\pm H_i)\\&=\frac{1}{(4l-2)^2}(4l-2)\\&=\frac{1}{4l-2}.\end{aligned}$$

如以 $e_i=\dfrac{1}{4l-2}H_i(i=1,2,\cdots,e)$ 作为 l 维欧氏空间正交基，即
$$(e_i,e_j)=1/(4l-2),$$
则 H 由所有形如 $X=\sum_{j=1}^{l}\mu_je_j$ 的矢量张成. B_l 的根系可记作
$$\{\pm e_i\pm e_j,\pm e_i,i<k,i,k=1,2,\cdots,l\}.$$

对于 $D_l(l\geqslant 2)$，其卡当子代数可以表为

$$\mathscr{H}=\left\{H_{\lambda_1\cdots\lambda_l}=\left(\begin{array}{ccc|ccc}\lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & O & \\ & & \lambda_n & & & \\ \hline & & & -\lambda_1 & & \\ & O & & & \ddots & \\ & & & & & -\lambda_n\end{array}\right)\right\}$$

相应根系$\pm\lambda_i\pm\lambda_k(i<k,i,k=1,\cdots,l)$亦有类似结论

$$H_i=\begin{pmatrix}E_{ii} & 0\\ 0 & -E_{ii}\end{pmatrix},\quad \pm\lambda_i\pm\lambda_k=\pm H_i\pm H_k.$$

正交基 $e_i=\dfrac{1}{4n-4}H_i(i=1,\cdots,l)$,

$$(e_i,e_j)=\frac{\delta_{ij}}{(4l-4)}.$$

对于C_l,其卡当子代数同D_l. $\sum C_l$是$\pm\lambda_i\pm\lambda_k$, $\pm 2\lambda_i(i<k,i,k=1,\cdots,l)$, 亦可表为

$$\pm\lambda_i\pm\lambda_k=\frac{1}{4l+4}(\pm H_i\pm H_k),$$

$$\pm\alpha\lambda_i=\frac{1}{4l+4}(\pm H_i).$$

正交基

$$e_i=\frac{1}{4l+4}H_i\qquad(i=1,\cdots,l),$$

$$(e_i,e_j)=\frac{1}{4l+4}\delta_{ij}\qquad(i,j=1,\cdots,l).$$

讨论方法同于第4、5题.]

6. 试求构成B_2、C_2和G_2的基矢的对易关系.

第八章　李群与李代数的表示论

李群作为一类特殊群，与有限群一样，有关群表示的基本概念，例如表示的定义、可约性、等价性，甚至于正则表示（伴随表示）、U（酉）表示等概念完全一致，无庸赘言. 对于连续单纯紧致李群来说，更是与有限群一样，既约酉表示都是完全可约的、离散的，具有有限维.

但是李群的表示论更为复杂. 表示还可能是无限维的，或者连续的，或者非完全可约的，或者非酉的. 对于连续单纯紧致李群，也有无限维的和非酉表示，而且也可以是非完全可约的、连续的. 一般而论，对于可解李群，每一个有限的既约表示都是一维的. 例如 E_2 群，可以分解为半直和，

$$E_2 = T_2 \oplus_S R_2, \tag{8.1}$$

其中 T_2 为可解李代数、二维平移群，R_2 即 $so(2)$，平面转动群，为单纯李代数. T_2 有两个一维表示. 对于连通单纯非紧致李群的既约酉表示，只有平庸一维表示，其它都是无限维的. 其有限维表示，均为非酉表示，并非完全可约. 总而言之，李群表示论比较有限群的表示论要复杂得多. 我们讨论的重点是单纯紧致李群的表示问题. 一般不涉及无限维表示问题.

李群与李代数有确定对应关系. 李群的生成元的矩阵表示，就是李代数表示，经指数映射后，即生成相应单连通李群的表示. 但指数化的李群生成元的明显表达式，一般难于得到. 我们往往从李代数的表示出发，直接探求李群表示的标记、维度及直积分解，使用的方法主要是“权”(weight)与“权空间”.

当然李群与李代数的对应关系，只有单连通的通用覆盖李群与李代数才存在一一对应的关系. 对于多连通李群，相应李代数的

表示具有多值性.为了消除这样的模糊性,实际上往往需要对李群的拓扑性质作整体研究,用表明相应拓扑结构的分立脚标(例如所谓同伦群分类脚标)对表示细致标示.

综上所述,李群的表示论的核心问题是李代数的表示论.本章的主要篇幅也是讨论李代数的表示论.

§8.1 权与权空间

权与权空间的概念,无论在紧致的还是非紧致的半单李群表示论中均具有极为重要的作用.对于一个李群来说,它有无穷多个表示."权"就是描述和区分这些表示的重要工具.

1. 李代数的表示

设半单李代数 A 与半单李群 G 对应,其卡当-魏尔基为 $\{H_i, E_\alpha\}$,则 $\forall\, X\in A$,总可表示为

$$X = \sum_{i=1}^{l} a_i H_i + \sum_{\alpha} b_\alpha E_\alpha, \tag{8.2}$$

其中 a_i 与 b_α 为展开组合系数.

设李代数 $\mathscr{B}$ 是 A 的一个矩阵表示,即有映射 Z 使得,$\forall\, X\in A$,

$$\begin{cases} X \xrightarrow{Z} Z(X) \in \mathscr{B}, \\ Z(X) = \sum_{i} a_i Z(H_i) + \sum_{\alpha} b_\alpha Z(E_\alpha). \end{cases} \tag{8.3}$$

显然,$Z(H_i)$、$Z(E_\alpha)$ 与 H_i、E_α 遵循同样的对易关系,并且 $\mathscr{B}$ 作指数映射生成 $\{e^{Z(X)}\}\equiv\widetilde{G}$,正是李群 G 的通用覆盖群.

设 $\mathscr{B}$ 的相应表示空间 $L_{\mathscr{B}}$ 的维数为 N,则 $\{Z(H_i), Z(E_\alpha)\}$ 均为 $N\times N$ 矩阵构成的集合.以后为简便计,直接用符号 E_α、H_i 分别表示 $Z(E_\alpha)$、$Z(H_i)$.

2. 权矢量(权)

设李代数 A 的秩为 l,则在表示空间中存在 $H_i(i=1,\cdots,l)$ 的共同本征矢 $|u_\Lambda\rangle$,

$$H_i|u_\Lambda\rangle = \Lambda_i|u_\Lambda\rangle \quad (i=1,2,\cdots,l). \tag{8.4}$$

式中本征值 Λ_i 的集合 $(\Lambda_1,\cdots,\Lambda_l)$ 可以视为 l 维空间的矢量,

$$\Lambda = (\Lambda_1,\Lambda_2,\cdots,\Lambda_l), \tag{8.5}$$

以后称它为本征矢量 $|u_\Lambda\rangle$ 的权矢量,简称"权".相应 l 维空间称为权空间.若有 n 个线性无关的矢量 $\{|u_\Lambda\rangle\}$ 对应同一权 Λ,则称 Λ 为 n 重简并权,n 称为该权的多重数.当 $n=1$ 时,则 Λ 称为单权.在 l 维空间,由原点出发画出权矢,称为权矢图.若定义

$$H = (H_1,H_2,\cdots,H_l),$$

则(8.4)式可以改写为矢量形式

$$H|u_\Lambda\rangle = \Lambda|u_\Lambda\rangle. \tag{8.6}$$

权与根矢关系密切.如果 $|u_\Lambda\rangle$ 为权为 Λ 的矢量,则 $E_\alpha|u_\Lambda\rangle$ 为权为 $\Lambda+\alpha$ 的矢量.事实上

$$\begin{aligned} H_iE_\alpha|u_\Lambda\rangle &= E_\alpha H_i|u_\Lambda\rangle + [H_i,E_\alpha]|u_\Lambda\rangle \\ &= (\Lambda_i+\alpha_i)E_\alpha|u_\Lambda\rangle \quad (i=1,2,\cdots,l), \end{aligned} \tag{8.7}$$

此式写成矢量形式为

$$HE_\alpha|u_\Lambda\rangle = (\Lambda+\alpha)E_\alpha|u_\Lambda\rangle. \tag{8.8}$$

此式表示,只要已知 H_i 的一个本征矢 $|u_\Lambda\rangle$,通过 E_α 就可以构造另一本征矢 $E_\alpha|u_\Lambda\rangle$,只是权分量由 Λ_i 变为 $\Lambda_i+\alpha_i$ 而已.由此 $E\pm\alpha$ 分别称升权或降权算符.

由于 $\{H_i\}$ 之间的对易性,显然 $H|u_\Lambda\rangle$ 也是权为 Λ 的本征矢.试看,

$$H_jH_i|u_\Lambda\rangle = H_iH_j|u_\Lambda\rangle = H_i\Lambda_j|u_\Lambda\rangle = \Lambda_jH_i|u_\Lambda\rangle,$$

或写成矢量形式,果然 $H|u_\Lambda\rangle$ 为权为 Λ 的本征矢

$$H_jH|u_\Lambda\rangle = \Lambda H|u_\Lambda\rangle. \tag{8.9}$$

但权与根有本质区别.根与表示无关,正如我们已经看到的,

根的数目由李群的秩(l)确定，其大小、方位取决于李群的结构常数. 而权则直接依赖于李群的表示，其数目取决于表示空间的维数，并且不同的表示有不同的权系统. 表示空间 L_B 中，相应表示 $\mathscr{B}$ 的所有权矢量的集合 $\Delta_{\mathscr{B}}$ 称为权系统. 事实上，有下列重要权性质定理刻画权系统与表示的紧密关系.

权性质定理一 半单李代数任一表示至少有一个权.

证明 矩阵 H_1 至少有一个本征值 Λ_1，记属于本征值 Λ_1 的本征矢 $|u_1\rangle$ 所张成的表示空间 $L_{\mathscr{B}}$ 的子空间为 L_1. 由于 $\forall\ |u_1\rangle \in L_1$，有

$$H_1 H_2 |u_1\rangle = H_2 H_1 |u_1\rangle = \Lambda_1 H_2 |u_1\rangle.$$

由此可见

$$H_2 L_1 \subset L_1,$$

即 L_1 是 H_2 的不变子空间. 由于每个矩阵在一个不变子空间中至少有一个本征矢，所以 H_2 在空间 L_1 中至少有一个本征矢 $|u_2\rangle$，其本征值为 Λ_2. $|u_2\rangle$ 张成的子空间，记为 L_2. $\forall\ |u_2\rangle \in L_2$，均为 H_1 与 H_2 的共同本征矢，分别有本征值 Λ_1、Λ_2. 且此进行下去，最后得到子空间 L_l，系属于本征值 Λ_l 的本征矢所张成的空间，其中 $\forall\ |u_l\rangle \in L_l$ 是 $H_1, H_2, \cdots, H_l$ 共同的本征矢，相应的权矢量为 $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \cdots, \Lambda_l)$.

权性质定理二 设矢量 $|\Lambda\rangle$ 的权为 Λ，矢量 $|\Lambda^{(k)}\rangle$ 的权为 $\Lambda^{(k)}$ ($k=1,2,\cdots$). 当 $|\Lambda\rangle$ 可表为 $|\Lambda^{(k)}\rangle$ 的线性组合，且 $\forall\ \Lambda^{(k)}$ 均不等于 Λ 时，则 $|\Lambda\rangle$ 为零矢量.

证明 设 $|\Lambda\rangle$ 展开式为

$$|\Lambda\rangle = \sum_k c_k |\Lambda^{(k)}\rangle,$$

其中 c_k 为展开系数. 标记 $H_i|\Lambda\rangle = \Lambda_i|\Lambda\rangle$，和 $H_i|\Lambda^{(k)}\rangle = \Lambda_i^{(k)}|\Lambda^{(k)}\rangle$. 构造算符 $\prod_k (H_i - \Lambda_i^{(k)})$，作用于上式两边，得到

$$\text{左边} = \prod_k (H_i - \Lambda_i^{(k)})|\Lambda\rangle = \prod_k (\Lambda_i - \Lambda_i^{(k)})|\Lambda\rangle,$$

$$\text{右边} = \prod_k (H_i - \Lambda_i^{(k)}) \cdot \sum_{k'} c_{k'} |\Lambda^{(k')}\rangle$$

$$= \sum_{k'} c_{k'} \cdot \prod_k (H_i - \Lambda_i^{(k)}) |\Lambda^{(k')}\rangle$$

$$= \sum_{k'} c_{k'} \left[\prod_k{}' [(H_i - \Lambda_i^{(k)})] (\Lambda_i^{(k')} - \Lambda_i^{(k')}) |\Lambda^{(k')}\rangle = 0, \right.$$

即(其中 $\prod_k{}'$ 表示连乘因子除掉$(H_i - \Lambda_i^{(k')})$项)

$$\prod_k (\Lambda_i - \Lambda_i^{(k)}) |\Lambda\rangle = 0.$$

由于$\forall\ \Lambda^{(k)}$均不等于 Λ,故上式表明$|\Lambda\rangle = 0$.

本定理表明,不同权的本征矢是线性独立的.由于紧致李群的不可约酉表示是有限维,即可取 H_i 为厄米矩阵,其本本征矢是线性独立的,可作为空间表示的基矢.由(8.6)式一般可得到 l 个不同的权矢量.如存在简并,即一个权对应 m 个本征矢,此时可将这 m 个线性独立的本征矢用线性代数标准的正交化方法,如施密特方法,正交归一化.这样权所对应的本征矢就可以构成表示空间 L_B 的一组归一化正交基矢.

为了以后给权矢量排序,给出规范基底,必须先在权空间选定坐标系.如果权矢量的第一个非零分量是正的,则称该权为正权.若两权之差 $\Lambda^{(1)} - \Lambda^{(2)}$是正的(即第一个非零分量为正),则称权 $\Lambda^{(1)}$高于权 $\Lambda^{(2)}$,简记 $\Lambda^{(1)} \geqslant \Lambda^{(2)}$;比所有权都高的权称为最高权.同样可以定义负权与零权.设$\{|\Lambda^{(k)}\rangle\}$是线性独立的,归一化的$\{H_i\}$的本征矢集合,

$$H_i |\Lambda^{(k)}\rangle = \Lambda_i^{(k)} |\Lambda^{(k)}\rangle \quad (i = 1, \cdots, l; k = 1, 2, \cdots, l),$$

适当调节次序,使权满足递降关系

$$\Lambda^{(1)} \geqslant \Lambda^{(2)} \geqslant \cdots \geqslant \Lambda^{(l)}, \tag{8.10}$$

则称相应基矢集合$\{|\Lambda^{(k)}\rangle\}$为正则基.

例 1 $su(2)$李代数.设用 H_1 标记对角化的算子 J_3,态矢量 $\psi_m^{(j)}$ 为 H_1 的本征矢,则

$$H_1 \psi_m^{(j)} = m \psi_m^{(j)},$$

其中本征值称为权. 尤其是考虑 $su(2)$ 的基础表示.

$$H_1 = \frac{1}{2}\sigma_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$E_1 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{-1} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{8.11}$$

其中 σ_1、σ_2、σ_3 为泡利矩阵. 此时本征态($j=1/2$)

$$\psi_{1/2}^{(1/2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv u_1; \quad \psi_{-1/2}^{(1/2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv u_2.$$

即是

$$H_1 u_1 = \frac{1}{2}u_1, \quad H_1 u_2 = -\frac{1}{2}u_2. \tag{8.12}$$

亦即对于 $su(2)$ 代数,其基础表示有 2 个一维权

$$m(1) = \frac{1}{2}, \quad m(2) = -\frac{1}{2},$$

其中 $m(i)$ 表示属第 $i(i=1,2)$ 个本征矢的权.

例 2 $su(3)$ 代数. 求基础表示的权. $l=2$.

$$H_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$E_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{-2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{-3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{8.13}$$

其中显然有 $E_\alpha^+=E_{-\alpha}(\alpha=1,2,3)$. 令

$$u_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad u_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad u_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\tag{8.14}$$

$H=(H_1,H_2)$为权空间的对角化矢量算符. 由于

$$H_1u_1=\frac{1}{\sqrt{6}}u_1,\quad H_2u_1=\frac{1}{3\sqrt{2}}u$$

$$\Rightarrow Hu_1=(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{3\sqrt{2}})u,$$

或记作

$$Hu_1=m(1)u_1,\tag{8.15}$$

其中权矢量 $m(1)=(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{3\sqrt{2}})$. 同样可得

$$Hu_2=m(2)u_2,\quad Hu_3=m(3)u_3,\tag{8.16}$$

其中 $m(2)=(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{3\sqrt{2}})$, $m(3)=(0,-\frac{\sqrt{2}}{3})$. 实际上三个权矢量表征基础表示. 以后我们知道第二个基础表示(前面表示的共轭表示)的权就是 $-m(1)$、$-m(2)$ 和 $-m(3)$.

总而言之,对于 $su(3)$代数(群)的任何不可约幺正表示,如 ψ_m 为 H 的本征矢,有

$$H\psi=m\psi_m,\tag{8.17}$$

其中权矢量 $m=(m_1,m_2)$可以表征该表示. 在粒子物理中,常取

$$I_3=\frac{1}{2}\sqrt{6}m_1,\quad Y=\sqrt{2}m_2,\tag{8.18}$$

其中 I_3 是同位旋第三分量,Y 即超荷(supercharge).

权性质定理三 设 $\mathscr{B}$ 是半单李代数 A 的不可约表示,则表示空间可作直和分解,

$$L_{\mathscr{B}}=\sum_{\oplus\forall\Lambda\in\Delta_{\mathscr{B}}}L_{\mathscr{B}}^{\Lambda},\tag{8.19}$$

其中 $L_{\mathscr{B}}^{\Lambda}$ 是权为 Λ 的矢量所张成的子空间.

证明 由权性质定理一，表示空间 $L_{\mathscr{B}}$ 中至少有一个权，设为 Λ'. 记属于 Λ' 的矢量张成的子空间为 $L_{\mathscr{B}}^{\Lambda'}$. $\forall\ |u'\rangle \in L_{\mathscr{B}}^{\Lambda'}$，根据(8.8)式，有

$$E_\alpha |u'\rangle \begin{cases} \in L_{\mathscr{B}}^{\Lambda'+\alpha} & (\Lambda' + \alpha \in \Delta_{\mathscr{B}}), \\ = \varnothing & (\Lambda' + \alpha \overline{\in} \Delta_{\mathscr{B}}). \end{cases}$$

同样可记，$\Lambda = \Lambda' + \alpha + \beta + \cdots + \gamma$，则有

$$E_\alpha E_\beta \cdots E_\gamma |u'\rangle \begin{cases} \in L_{\mathscr{B}}^{\Lambda} & (\Lambda \in \Delta_{\mathscr{B}}), \\ = 0 & (\Lambda \overline{\in} \Delta_{\mathscr{B}}). \end{cases} \tag{8.19a}$$

由此可见，由不同的权 Λ 对应的子空间 $L_{\mathscr{B}}^{\Lambda}$ 所构成的直和空间 $\sum\limits_{\oplus} L_{\mathscr{B}}^{\Lambda}$ 是表示 $\mathscr{B}$ 的不变子空间. 此外，$\mathscr{B}$ 是不可约表示，即不存在比 $L_{\mathscr{B}}$ 更小的不变子空间，故(8.19)成立.

权性质的定理四 设 $\mathscr{B}$ 是半单李代数 A 的一个表示，Λ 是表示中的一个权，α 是 A 的一个非零根，则

(1) $\dfrac{2(\Lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$ 是整数，$\Lambda - \dfrac{2(\Lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$ 也是权，并且与 Λ 有相同的多重简并度.

(2) 如果 Λ 是单权，则存在一个含 Λ 的 α 权链，

$$\Lambda + q\alpha,\ \Lambda + (q-1)\alpha,\ \cdots,\ \Lambda - r\alpha,$$

其中 q 与 r 为非负整数. 并且 $\Lambda + (q+1)\alpha, \Lambda - (r+1)\alpha \overline{\in} \Delta_B$，

$$\frac{2(\Lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} = q - r. \tag{8.20}$$

本定理证明要用到(8.8)式，方法与证明根列性质完全相同.

本定理的结论有极其鲜明的几何解释. 在 l 维权空间中，权 Λ 是相对于 $l-1$ 维超平面(垂直于根 α)的反射(所谓魏尔反射)

$$S_\alpha:\ \Lambda \longrightarrow \Lambda' = \Lambda - \frac{2\alpha(\Lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}. \tag{8.21}$$

在图 8.1 中，超平面 Y 垂直于根 α，权 Λ 相对于 Y 平面，反射到 Λ'. 如果 α 遍及根系所有根，则集合 $\{S_\alpha | \alpha \in \Sigma\}$ 构成一个操作群，称为魏尔反射群. 由魏尔群联系起来的所有权 Λ，均有相同多重度，

称为等价权. 因为根系 Σ 可由单纯根系 Π 生成，因此魏尔反射群亦可由 l 个 $S_{\alpha_i}(\forall\ \alpha_i \in \Pi)$ 反射加上单位元素来生成.

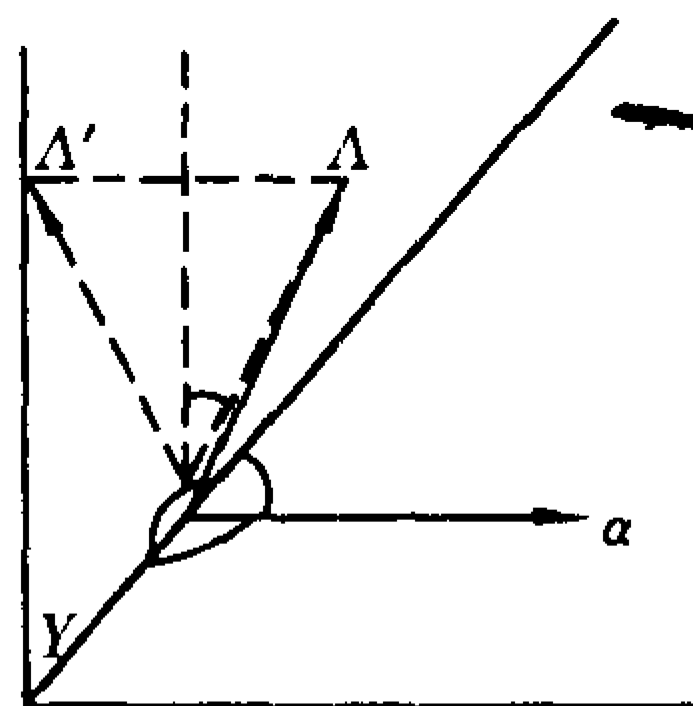


图 8.1 魏尔反射示意图

问　　题

1. 验证 A_2 代数的魏尔群的元素是 I、S_α、S_β、$S_\alpha S_\beta$、$S_\beta S_\alpha$、$S_\alpha S_\beta S_\alpha$.

[提示：$S_\beta S_\alpha S_\beta = S_\alpha S_\beta S_\alpha$]

2. 试证对于 A_l 代数，魏尔群相当于一置换群.

[提示：根系 $\sum(A_l) = \lambda_i - \lambda_k, i \neq k, i, k = 1, \cdots, l+1$，且 $(\lambda_i, \lambda_j) = \dfrac{1}{2(l+1)}\delta_{ij}$. 故

$$\eta(A_n) = \left\{x = \sum_{i=1}^{l+1} x_i\lambda_i \,|\, \forall\ x_i \in \Omega(\mathbf{R}),\quad \sum_{i=1}^{l+1} x_i = 0\right\}.$$

由此根 $\lambda_i - \lambda_j$ 定义的魏尔反射是

$$\begin{aligned} x \longrightarrow x' &= x - \frac{2(x, \lambda_i - \lambda_k)}{(\lambda_i - \lambda_k, \lambda_i - \lambda_k)}(\lambda_i - \lambda_k) \\ &= x - \frac{2(x_i - x_k)}{2m} \Big/ \frac{1}{m} \\ &= x - (x_i - x_k)(\lambda_i - \lambda_k) \\ &= x_1\lambda_1 + \cdots + x_k\lambda_i + \cdots + x_i\lambda_k + \cdots + x_{l+1}\lambda_{l+1}, \end{aligned}$$

即相当于 x 中基矢 λ_i 与 λ_k 前的系数互换.]

3. 试证对于 B_l 的魏尔群可以视为将 l 个下标(文字)作任意置换，并同时改变其中任何文字符号的变换构成的群.

[提示：

$$\sum(B_l) = \{\pm\lambda_i \pm \lambda_k, i < k;\ \pm\lambda_i, i, k = 1, \cdots, l\},$$

$$(\lambda_i, \lambda_j) = \frac{1}{4l-1}\delta_{ij}\quad (i, j = 1, \cdots, l),$$

$$x = \sum_{i=1}^{l} x_i \lambda_i, \quad \forall\, x_i \in \Omega(\mathbf{R}), x \in \eta,$$

$$\frac{(x, \pm \lambda_i \pm \lambda_k)}{(\pm x_i \pm \lambda_k, \pm \lambda_i \pm \lambda_k)} = \frac{\dfrac{\pm x_i \pm x_k}{4l-2}}{\dfrac{2}{4l-2}} = \frac{\pm x_i \pm x_k}{2},$$

$$\frac{(x, \pm \lambda_i)}{(\pm x_i, \pm \lambda_i)} = \frac{\dfrac{\pm x_i}{4l-2}}{\dfrac{1}{4l-2}} = \pm x_i,$$

$$x \xrightarrow{\pm \lambda_i \pm \lambda_k} \begin{cases} x_1\lambda_1 + \cdots + x_k\lambda_i + \cdots + x_i\lambda_k + \cdots + x_l\lambda_l, \\ x_1\lambda_1 + \cdots - x_k\lambda_i + \cdots - x_i\lambda_k + \cdots + x_l\lambda_l, \end{cases}$$

$$x \xrightarrow{\pm \lambda_i} x' = x_1\lambda_1 + \cdots - x_i\lambda_i + \cdots + x_l\lambda_l.$$

对于 C_l 代数，有相同结果.]

4. 试证 D_l 的魏尔群可以视为是一切将 l 个文字作任意置换，并同时改变其中偶数文字的符号的变换所构成的群.

[提示：

$$\sum(D_l) = \{\pm \lambda_i \pm \lambda_k, i < k, i, k = 1, 2, \cdots, l\},$$

$$(\lambda_i, \lambda_j) = \frac{1}{4l-4}(i, j = 1, \cdots, l),$$

$$x = \sum_{i=1} x_i \lambda_i, \forall\, x_i \in \Omega(\mathbf{R}), \forall\, x \in \eta,$$

$$\frac{(x, \pm \lambda_i \pm \lambda_k)}{(\pm \lambda_i \pm \lambda_k, \pm \lambda_i \pm \lambda_k)} = \pm x_i \pm x_k/2,$$

$$x \xrightarrow{\pm \lambda_i \pm \lambda_k} x' = \begin{cases} x_1\lambda_1 + \cdots + x_k\lambda_i + \cdots + x_i\lambda_k + \cdots + x_l\lambda_l, \\ x_1\lambda_1 + \cdots - x_k\lambda_i + \cdots - x_i\lambda_k + \cdots + x_l\lambda_l. \end{cases}$$

5. 试画出 $su(3)$ 两个基础表示的权图.

(答案：见图 8.2.)

6. 一维平移群的二维表示

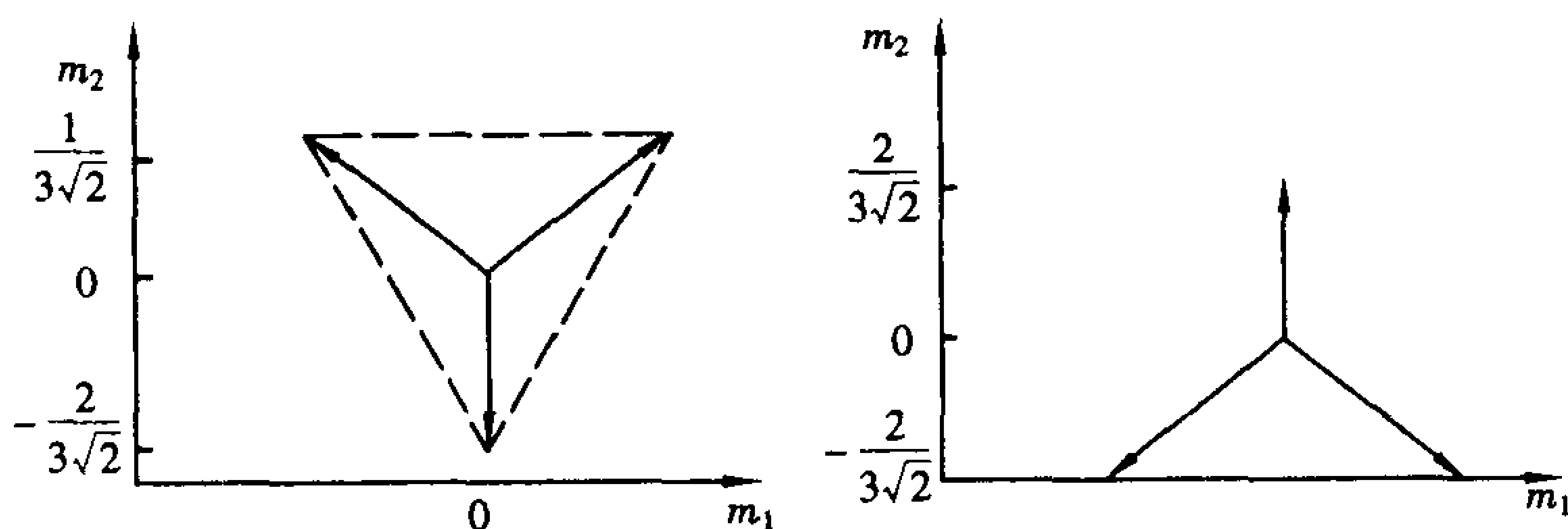


图 8.2 $su(3)$的两个基础表示的权图

$$U(a)=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

试证它不是完全可约的，也不是幺正的.

[提示：它确是表示

$$U(a)\begin{pmatrix}x\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+a\\ 1\end{pmatrix};\quad U(a)U(b)=\begin{pmatrix}1 & a+b\\ 0 & 1\end{pmatrix}=U(a+b).$$

设完全可约，则

$$V(a)\equiv S^{-1}U(a)S=\begin{pmatrix}\lambda_1(a) & 0\\ 0 & \lambda_2(a)\end{pmatrix},$$

$$\det V(a)=\lambda_1(a)\lambda_2(a)=1;\quad \mathrm{Tr}V(a)=\lambda_1(a)+\lambda_2(a)=2,$$

由此得 $\lambda_1(a)=\lambda_2(a)=1$. 易逆求得 $U(0)=E$.

实际上，$U^+(a)U(a)\neq E$，原因是 T_1 非紧致.]

7. 试证紧致李群任何有限维表示，都是完全可约的.

[提示：紧致性条件

$$\Omega=\int_G \mathrm{d}u(g)<\infty.$$

令

$$U(x)=\begin{pmatrix}U_1(x) & K(x)\\ O & U_2(x)\end{pmatrix},\quad \forall\, x\in G$$

为紧致李群 G 的一个表示．$U(xy)=U(x)U(y)$，$U_1(xy)=U_1(x)\cdot U_1(y)$；$U_2(xy)=U_2(x)U_2(y)$．令

$$U_D(x)=\begin{pmatrix} U_1(x) & O \\ O & U_2(x) \end{pmatrix}\begin{matrix} \updownarrow N_1 \\ \updownarrow N_2 \end{matrix}$$

$$\quad |\leftarrow N_1 \rightarrow|\leftarrow N_2 \rightarrow|$$

计算 $S=\int \mathrm{d}\mu(g)U(x)U_D(x^{-1})$．注意

$$U(x)U_D(x^{-1})=\begin{pmatrix} U_1(x)U_1(x^{-1}) & K(x)U_2(x^{-1}) \\ O & U_2(x)U_2(x^{-1}) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} E & K(x)U_2(x^{-1}) \\ O & E' \end{pmatrix},$$

$$S=\int_G \mathrm{d}\mu(x)\begin{pmatrix} E & K(x)U_2(x^{-1}) \\ O & E' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \Omega E & K \\ O & \Omega E' \end{pmatrix},$$

其中 ΩE、$\Omega E'$ 由于紧致性条件，均有意义．

由于 $\det S=\Omega^{N_1+N_2}\neq 0$，故有 S^{-1} 存在．又

$$U(y)S=\int_G \mathrm{d}\mu(x)U(y)U(x)U_D(x^{-1})$$

$$=\int_G \mathrm{d}\mu(x)U(yx)U_D(x^{-1})$$

$$=\int_G \mathrm{d}\mu(x)U(yx)U_D(yx)^{-1}U_D(y)$$

$$\xlongequal{x\longrightarrow y^{-1}x}\int_G \mathrm{d}\mu(y^{-1}x)U(x)U_D(x^{-1})U_D(y)$$

$$\xlongequal{(\mathrm{d}\mu(gx)=\mathrm{d}\mu(x))}\int_G \mathrm{d}\mu(x)U(x)U_D(x^{-1})U_D(y)$$

$$\Rightarrow U(y)S=SU(y)\Rightarrow U(y)=SU_D(y)S^{-1}$$

$$\Rightarrow U_D(y)=S^{-1}U(y)S.\ ]$$

8．试证紧致李群 G 的任何有限维表示都是幺正表示．

[提示：设 $U(x)$ 为 G 的非幺正表示，．令 $T=\int_G \mathrm{d}\mu(x)U(x)$

$\cdot U^{+}(x)$. 计算

$$U(y)TU^{+}(y)=\int_G \mathrm{d}\mu(x)U(y)U(x)U^{+}(x)U^{+}(y)$$

$$=\int_G \mathrm{d}\mu(x)U(yx)U^{+}(yx)$$

$$=\int_G \mathrm{d}\mu(y^{-1}x)U(x)U^{+}(x)$$

$$=T \qquad (\forall\ y\in G).$$

显然 $T^{+}=T$,现证明其正定性. 设$\forall\ \xi\in L_B$,则

$$(\xi,T\xi)=\int_G \mathrm{d}\mu(x)(\xi,U(x)U^{+}(x)\xi)$$

$$=\int_G \mathrm{d}\mu(x)(U^{+}(x)\xi,U^{+}(x)\xi)\geqslant 0.$$

厄米正定矩阵可以通幺正变换对角化,即 $A^{+}TA=\Lambda$,且 $A^{+}A=E$,这里

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},\quad \lambda_i>0 \quad (i=1,\cdots,n).$$

矩阵

$$W=\sqrt{\Lambda}=\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}$$

也是厄米的,$\det W=(\lambda_1\cdots\lambda_n)^{\frac{1}{2}}\neq 0$. 令 $S=AW$,则 $S^{+}=W^{+}A^{+}=W^{-1}A^{-1}$,但是

$$T=A\cdot\Lambda A^{-1}=AW\cdot WA^{+}=(AW)(AW)^{+}=S\cdot S^{+},$$

于是 $U(y)TU^{+}(y)=T$,可改写为

$$U(y)S \cdot S^+ U^+(y) = SS^+.$$

令 $V(x)=S^+U(x)S$，则

$$\begin{aligned} V(y) \cdot V^+(y) &= S^+ U(x)SS^+ U^+(x)S = S^+ SS^+ S \\ &= S^+ AWW^{-1}A^{-1}S = S^+ S = (SS^+)^+ \\ &= E. \end{aligned}$$

就是说，$V(y)$是幺正表示.]

§8.2　最高权、不可约表示的分类与维数

半单李代数表示的可约性与等价性取决于最高权的性质.所谓最高权，或称首权，就是在有限维表示中高于所有其它权矢的权，记为 $\Lambda^{(1)}$. 由于正根 α 对应于生成元 E_α，有升权作用，

$$\begin{aligned} H_iE_\alpha|u^\Lambda\rangle &= [H_i, E_\alpha]|u^\Lambda\rangle + E_\alpha H_i|u^\Lambda\rangle \\ &= (\alpha_i E_\alpha)|u^\Lambda\rangle + \Lambda_i E_\alpha|u^\Lambda\rangle \\ &= (\Lambda_i + \alpha_i)E_\alpha|u^\Lambda\rangle, \end{aligned}$$

显然对于最高权 $\Lambda^{(1)}$，

$$E_\alpha|\Lambda^{(1)}\rangle = 0. \tag{8.22}$$

以下定理刻画最高权的最重要性质，同时也给出半单纯李代数有限维表示可约性与等价性的判据.

定理一　单纯李代数的不可约表示的最高权是单权；两不可约表示等价的充分必要条件是其最高权相等.

证明　设本征矢 $|\Lambda^{(1)}\rangle$ 对应于最高权 $\Lambda^{(1)}$. 令

$$|\Lambda\rangle = (E_{-\alpha_1})^{n_1}(E_{-\alpha_2})^{n_2}\cdots(E_{-\alpha_l})^{n_l}|\Lambda^{(1)}\rangle, \tag{8.23}$$

则当 $\Lambda = \Lambda^{(1)} - \sum_{i=1}^{l} n_i\alpha_i \in \Delta_{\mathscr{B}} (\forall\ \alpha_i \in \Pi)$ 时，$|\Lambda\rangle$ 是权为 Λ 的本征矢，属于权子空间 $L_{\mathscr{B}}^{\Lambda}$. 当 $\Lambda \bar{\in} \Delta_{\mathscr{B}}$ 时，$|\Lambda\rangle = 0$. 令 $L'_{\mathscr{B}} = \sum_{\oplus\Lambda} L_{\mathscr{B}}^{\Lambda}$. 现证明，如表示 $\mathscr{B}$ 为不可约的，则 $L'_{\mathscr{B}} = L_{\mathscr{B}}$. 为此只需证明(8.23)式在 $\{H_i, E_\alpha\}$ 作用下保持不变.

在 H_i 作用下,(8.23)式的不变性是显然的.下面讨论对应非零根的 E_α 的作用.

令 $\alpha=\alpha_j\in\Pi^{(+)}$. 只要 $E_{-\alpha}|\Lambda\rangle\neq 0$,则有权 $\Lambda-\alpha j$,故 $E_{-\alpha}|\Lambda\rangle\in L'_{\mathscr{B}}$. 令 $\alpha,\alpha'\in\Pi$,且 $\alpha\neq\alpha'$,则由单纯根性质 $(\alpha-\alpha')\overline{\in}\Sigma$,因此

$$[E_\alpha,E_{-\alpha'}]=\delta_{\alpha\alpha'}[E_\alpha,E_{-\alpha}]=\delta_{\alpha\alpha'}\sum_{i=1}^{l}\alpha_i^iH_i$$

$$\Rightarrow E_\alpha E_{-\alpha'}=\delta_{\alpha\alpha'}\sum_i\alpha_i^iH_i+E_{-\alpha'}E_\alpha. \tag{8.24}$$

计算 $E_\alpha|\Lambda\rangle=E_\alpha[(E_{-\alpha_1})^{n_1}\cdots(E_{-\alpha_l})^{n_l}]|\Lambda^{(1)}\rangle$ 时,可以应用(8.24)式,将算子 E_α 逐步右移,所得到的含 H_i 项,即使非零,也属于 L'_B 空间. 最后 E_α 到达最右边,由于 $\Lambda^{(1)}$ 是最高权,$E_\alpha|\Lambda^{(1)}\rangle=0$. 于是证明了

$$\{H_i,E_\alpha\}L'_B=L'_B.$$

如 $\alpha\in\Sigma^{(+)}$,则按单纯根性质,可作展开

$$\alpha=\sum_{i=1}^{l}K_i\alpha_i\qquad(\forall\ \alpha_i\in\Pi).$$

负根当然亦可作类似展开,唯系数 K_i 差一个符号. 由于 $\forall\ \alpha\in\Pi$, $E_\alpha L'_{\mathscr{B}}=L'_{\mathscr{B}}$,则

$$\sum_{ki}K_iE_\alpha\cdot L'_{\mathscr{B}}=\sum_{ki}K_iL'_{\mathscr{B}}=L'_{\mathscr{B}}.$$

这就证明了 $L'_{\mathscr{B}}=L_{\mathscr{B}}$. 亦即形如(8.23)式的矢量 $|\Lambda\rangle$ 的集合张成全部表示空间 $L_{\mathscr{B}}$. 换言之,如果权 Λ' 不在形如

$$\Lambda=\Lambda^{(i)}-\sum_i n_i\alpha_i \tag{8.25}$$

的集合中,则 $|\Lambda'\rangle=0$. 就是说,不可约表示的权均可表示为(8.24)形式,其中 n_i 为非负整数.

设 $H_i|\Lambda^{(1)}\rangle=\Lambda^{(1)}|\Lambda^{(1)}\rangle$,$H|\Lambda^{(1)}\rangle=\Lambda^{(1)}|\Lambda^{(1)}\rangle$. 令 $|\Lambda'\rangle$ 也对应最高权,$H|\Lambda'\rangle=\Lambda^{(1)}|\Lambda^{(1)}\rangle$. $|\Lambda'\rangle$ 亦可表为(8.23)式形式,或表为

$$|\Lambda'\rangle=E_\lambda\cdots E_\beta E_\alpha|\Lambda^{(1)}\rangle \tag{8.26}$$

其中 $\alpha,\beta,\cdots,\gamma$ 有正、有负，故 $E_\alpha,E_\beta,\cdots,E_\gamma$ 中既有升权算符、也有降权算符. 但此时应无升权算符，否则不会对应最高权. 故 E_α 必为降权算符，否则 $E_\alpha|\Lambda^{(1)}\rangle=0$.

设 $E_\lambda\cdots E_\rho E_\beta E_\alpha$ 中，E_ρ 为升权算符，则

$$E_\rho E_\beta = E_\beta E_\rho + [E_\rho, E_\beta],$$

E_ρ 向右移. 第二项，当 $\rho+\beta\overline{\in}\Sigma$，等于零；当 $\rho+\beta\in\Sigma$，等于 $N_{\alpha+\beta}E_{\alpha+\beta}$；当 $\alpha+\beta=0$，则等于 H_i 的线性组合，此时作用在矢量上得一常数. 无论如何，第二项包含的生成元在减少.

升权算符最后移到右边，作用于 $|\Lambda^{(1)}\rangle$ 上得零. 余下的项中，亦不能包含降权算符，因为它使权下降. 唯一的可能是剩下常系数乘 $|\Lambda^{(1)}\rangle$ 的项，即 $|\Lambda\rangle$ 是单权.

两表示 $\mathscr{B}$ 与 $\mathscr{B}'$ 等价，则可选择适当的基使两表示相等，即各本征矢对应的权包括最高权都对应相等. 对应表示分别为

$$|j\rangle \equiv E_\lambda\cdots E_\beta E_\alpha|\Lambda\rangle, |j'\rangle' \equiv E_\lambda\cdots E_\beta E_\alpha|\Lambda\rangle'. \quad (8.27)$$

现证明这种关系一一对应. 设在表示 $\mathscr{B}$ 中有线性关系

$$\sum_j C_j|j\rangle = 0. \quad (8.28)$$

现考虑在表示 $\mathscr{B}'$ 中，令

$$\sum_j C_j|j\rangle' \equiv |W\rangle \neq 0. \quad (8.29)$$

用任一非零根算符作用于(8.28)式两边，仍为零. 但作用(8.29)式两边，如 $E_\lambda\cdots E_\beta E_\alpha|W\rangle$ 及其线性组合张成表示空间 $L_{\mathscr{B}}'^{W}$ 的一个子空间. 因为表示 $\mathscr{B}'$ 是不可约的，且 $|W\rangle\overline{\in}L_{\mathscr{B}}'^{W}$，此子空间是零空间. 故两组基可以一一对应选取.

在任一表示空间，取一组基矢 $\{|\mu\rangle\}$，它可表示为(8.27)式及其线性组合. 在另一表示空间也一一对应选取基矢组 $\{|\mu\rangle'\}$. 设

$$E_\alpha|\mu\rangle = \sum_\nu \Gamma_{\nu\mu}(E_\alpha)|\nu\rangle \quad (\Gamma(E_\alpha)\text{ 为表示矩阵}),$$

即有线性关系

$$E_\alpha|\mu\rangle - \sum_\nu \Gamma_{\nu\mu}(E_\alpha)|\nu\rangle = 0,$$

对应地选取

$$E_\alpha|\mu\rangle' - \sum_\nu \Gamma_{\nu\mu}(E_\alpha)|\nu\rangle' = 0,$$

则可看出,两表示$\{\Gamma(E_\alpha)\}$完全相同.

本定理表明,不可约表示由其最高权确定.等价表示不但最高权相等,而且有完全相同的权系统,如(8.23)、(8.25)式.本定理提供标示李代数不可约表示的方法,同时也指明利用权系统对直积表示的约化方法.

定理二 半单李代数 A 的不可约表示 $\mathscr{B}$ 是最高权 $\Lambda^{(1)}$的充分必要条件是

$$\Lambda_i = \frac{2(\Lambda^{(1)},\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)} \quad (\forall\ \alpha_i \in \Pi, i = 1,\cdots,l), \qquad (8.30)$$

其中 λ_i 为非负整数.若在表示空间 L_B 中,

$$H|\Lambda^{(1)}\rangle = \Lambda^{(1)}|\Lambda^{(1)}\rangle,$$

则有

$$(E_{-\alpha_i})^{n_i}|\Lambda^{(1)}\rangle \begin{cases} = 0 & (n_i > \lambda_i), \\ \neq 0 & (n_i \leqslant \lambda_i). \end{cases} \qquad (8.31)$$

证明 第一部分的必要性.因 $\Lambda^{(1)}$为最高权,$\forall\ \alpha_i \in \Pi$,则由权的性质(定理四):

$$\Lambda^{(1)} - \frac{2(\Lambda,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)}\alpha_i$$

亦为权.α_i 为正根,若 $\Lambda_i<0$,则 $\Lambda^{(1)}$必非最高权.

充分性我们不作证明.本定理又称邓金定理.

由于最高权为单权,故在含 $\Lambda^{(1)}$的 α_i 权链

$$\Lambda^{(1)} + q\alpha_i,\ \Lambda^{(1)} + (q-1)\alpha_i,\ \cdots,$$
$$\Lambda^{(1)},\cdots,\ \Lambda^{(1)} - (r-1)\alpha_i,\ \Lambda^{(1)} - r\alpha_i$$

中,$q=0$,$r=\Lambda_i$,故(8.31)式成立.

实际上表明,最高权可按单纯根展开.由此我们得到标记李代

数的不可约表示的方法如下：

在邓金图上，将非负整数 Λ_i 标示在相应的单纯根上. 若 $\Lambda_i=0$，将略而不写. 因为有 l 个单纯根，故 Λ 的分量 $\Lambda_i(i=1,2,\cdots l)$ 有 l 个最高权为 0 的邓金图对应于一维空间的圆点(零维). 这样，标记 l 个 Λ_i 的非负整数的邓金图，就与李代数的不可约表示建立一一对应关系了.

例 1 A_2:$SU(3)$的两个具有代表性的表示的邓金图见图 8.3(a)与(b)，求相应最高权.



图 8.3 $SU(3)$的邓金图

先考虑图 8.3(a). 由(8.30)式，

$$\Lambda_1=\frac{2(\Lambda,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}=0,\quad \Lambda_2=\frac{2(\Lambda,\alpha_2)}{(\alpha_2,\alpha_2)}=1.$$

设最高权为 $\Lambda^{(1)}$. 且 $\Lambda^{(1)}=n_1\alpha_1+n_2\alpha_2$. 注意到

$$\Lambda_1=\frac{2(n_1\alpha_1+n_2\alpha_2,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}=2n_1-\frac{1}{2}n_2=0,$$

$$\Lambda_2=\frac{2(n_1\alpha_1+n_2\alpha_2,\alpha_2)}{(\alpha_2,\alpha_2)}=-\frac{1}{2}n_1+2n_2=1,$$

可得 $n_1=1/3, n_2=2/3$. 其中用到 $(\alpha_1,\alpha_1)=(\alpha_2,\alpha_2)=1$，$(\alpha_1,\alpha_2)=(\alpha_2,\alpha_1)=-1/2$. 即是说

$$\Lambda^{(1)}=\frac{\alpha_1+2\alpha_2}{3}.$$

易得图(b)，$\Lambda^{(1)}=\frac{2\alpha_1+\alpha_2}{3}$.

例 2 已知卡当矩阵$\{\Lambda_{ij}\}$，即由(8.30)式定义的非负整数集合$\{\Lambda_i\}(i=1,2,\cdots,l)$，求最高权 $\Lambda^{(1)}$.

令

$$\Lambda^{(1)} = \sum_{i=1}^{l} n_i \alpha_i \quad (\forall\ \alpha_i \in \Pi),$$

则

$$\Lambda_j = \frac{2(\Lambda^{(l)}, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} = \sum_{i=1}^{l} \frac{2n_i(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} = \sum_{i=1}^{l} A_{ji} n_i, \tag{8.32}$$

式中 A_{ji} 即为卡当矩阵的矩阵元. (8.32)亦可改写为矩阵形式 $\Lambda = A_n$,即

$$\begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \\ \vdots \\ \Lambda_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1l} \\ A_{21} & \cdots & A_{2l} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{l1} & \cdots & A_{ll} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_l \end{pmatrix}. \tag{8.33}$$

换言之,方程(8.32) 的解 $\{n_1, n_2, \cdots, n_l\}$ 即为不可约表示的最高权 $\Lambda^{(1)} = \sum\limits_i n_i \alpha_i$.

不可约表示的维数与最高权密切相关. 我们不加证明地(可参阅万哲先《李代数》p276)给出如下定理:

定理三 设 $\mathscr{B}$ 为李代数 L 的一个不可约表示,其最高权为 $\Lambda^{(1)}$,则不可约表示 $\mathscr{B}$ 的维数可表示为

$$\dim\mathscr{B} = \prod_{\alpha \in \Sigma^+} \frac{(\Lambda^{(1)} + g, \alpha)}{(g, \alpha)}, \tag{8.34}$$

其中 Σ^+ 为正根集合,而

$$g = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Sigma^+} \alpha \quad (\text{正根和之和}).$$

例 3 A_1 代数 $\sim su(2)$,同构 $B_1, l=1$,只有 1 个单根. $\Sigma^+ = \alpha$, $g = \frac{\alpha}{2}$. 令不可约表示的最高权 $\Lambda^{(1)} = j\alpha$. 由(8.34)式

$$\dim\mathscr{B} = \prod_{\alpha \in \Sigma^+} \frac{(\Lambda + g, \alpha)}{(g, \alpha)} = \frac{(j + \frac{1}{2})(\alpha, \alpha)}{\frac{1}{2}(\alpha, \alpha)}$$

$$= 2j + 1.$$

但由定理二，

$$\Lambda_2 = 2\frac{(\Lambda^{(1)},\alpha)}{(\alpha,\alpha)} = 2j = \text{非负整数},$$

由此可知，

(1) j 一定为整数或半整数，它可表示 $SU(2)$ 群的不可约表示；

(2) 表示 j 的维数是 $(2j+1)$ 维.

例 4 D_2 代数，对数 $SO(4)$ 群. 因为 $D_2 = A_1 \oplus A_1$，故 D_2 为半单李代数，有两个单根 $(l=2)$，两个正交的单纯根 α_1、α_2，$(\alpha_1,\alpha_2)=0$. 显然，

$$\Sigma = \{\alpha_1,\alpha_2,-\alpha_1,-\alpha_2\}, \Sigma^+ = \{\alpha_1,\alpha_2\}, g = \frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2).$$

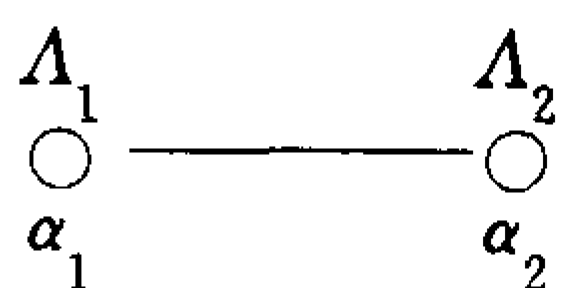


图 8.4

不可约表示如图 8.4 所示.

令不可约表示的最高权

$$\Lambda^{(1)} = n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2,$$

则由(8.33)式得

$$\begin{pmatrix}\Lambda_1\\ \Lambda_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n_1\\ n_2\end{pmatrix},$$

即

$$\begin{pmatrix}n_1\\ n_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\Lambda_1\\ \Lambda_2\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Lambda_1\\ \Lambda_2\end{pmatrix},$$

或 $$n_1 = \frac{1}{3}(2\Lambda_1 + \Lambda_2), \quad n_2 = \frac{1}{3}(\Lambda_1 + 2\Lambda_2).$$

于是，最高权

$$\Lambda^{(1)} = \frac{1}{3}(2\Lambda_1 + \Lambda_2)\alpha_1 + \frac{1}{3}(\Lambda_1 + 2\Lambda_2)\alpha_2.$$

但 $\Sigma^+ = \{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2\}$，$g=(\alpha_1+\alpha_2)$. 并且由

$$\Lambda_{\alpha 1} = 2\frac{(\Lambda^{(1)},\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)} = 2n_1 = \text{非负整数},$$

$$\Lambda_{\alpha 2} = 2\,\frac{(\Lambda^{(1)},\alpha_2)}{(\alpha_2,\alpha_2)} = 2n_2 = \text{非负整数},$$

亦即 n_1 与 n_2 为整数与半整数.

再由维度公式(8.34)式,得表示 $\mathscr{B}$ 的维数

$$\begin{aligned}\dim\mathscr{B} &= \prod_{\alpha\in\Sigma^+}\frac{(\Lambda+g,\alpha)}{(g,\alpha)}\\ &= \frac{(\Lambda^{(1)}+g,\alpha_1)}{(g,\alpha_1)}\cdot\frac{(\Lambda^{(1)}+g,\alpha_2)}{(\alpha_2,\alpha_2)}\\ &\quad\cdot\frac{(\Lambda^{(1)}+g,\alpha_1+\alpha_2)}{(g,\alpha_1+\alpha_2)}\\ &= \frac{1}{3}(3\Lambda_1+3)\cdot\frac{1}{3}(3\Lambda_2+3)\\ &\quad\cdot\frac{1}{2}(\Lambda_1+\Lambda_2+2)\\ &= \frac{1}{2}(\Lambda_1+1)(\Lambda_2+1)(\Lambda_1+\Lambda_2+2).\end{aligned}$$

其中用到

$$(\alpha_1,\alpha_1) = (\alpha_2,\alpha_2) = -2(\alpha_1,\alpha_2) = -2(\alpha_2,\alpha_1),$$

$$(g,\alpha_1) = (1-\frac{1}{2})(\alpha_1,\alpha_1) = \frac{1}{2}(\alpha_1,\alpha_1),$$

$$(g,\alpha_2) = \frac{1}{2}(\alpha_2,\alpha_2),(g,\alpha_1+\alpha_2) = (\alpha_1,\alpha_1).$$

问　　题

1. 证明 $SU(3)$的不可约表示(A_2) $\overset{5}{\underset{\alpha_1}{\bigcirc}}$——$\overset{3}{\underset{\alpha_2}{\bigcirc}}$ 的最高权是

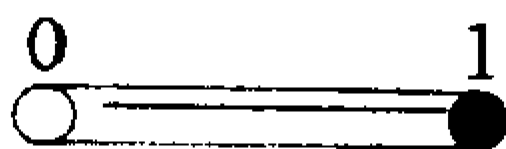
$$\Lambda^{(1)} = \frac{13}{3}\alpha_1 + \frac{11}{3}\alpha_2.$$

[提示:

$$\Lambda_1 = \frac{2(\Lambda^{(1)},\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)} = \frac{26}{3} + \frac{11}{3}\frac{2(\alpha_2,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)} = \frac{26}{3} - \frac{11}{3} = 5,$$

$$\Lambda_2 = \frac{2(\Lambda^{(1)},\alpha_2)}{(\alpha_2,\alpha_2)} = \frac{22}{3} - \frac{13}{3} = \frac{9}{3} = 3. \quad]$$

2. 设 G_2 代数的不可约表示为



试验证其最高权为 $\Lambda^{(1)}=\alpha_1+2\alpha_2$.

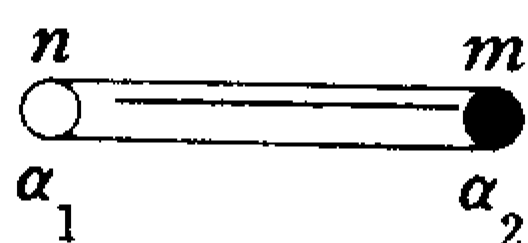
[提示:$(\alpha_2,\alpha_2)=1,(\alpha_1,\alpha_1)=3$,

$$\frac{(\alpha_1,\alpha_2)}{(\alpha_2,\alpha_2)} = -\frac{3}{2}, \frac{(\alpha_1,\alpha_2)}{(\alpha_1,\alpha_1)} = -\frac{1}{2},$$

$$\frac{2(\Lambda^{(1)},\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)} = \frac{2(\alpha_1,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)} + \frac{4(\alpha_2,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)} = 2 - 2 = 0 = \Lambda_1,$$

$$\frac{2(\Lambda^{(1)},\alpha_2)}{(\alpha_2,\alpha_2)} = \frac{4(\alpha_2,\alpha_2)}{(\alpha_2,\alpha_2)} + \frac{2(\alpha_1,\alpha_2)}{(\alpha_2,\alpha_2)} = 4 - 2 \times \frac{3}{2} = 1 = \Lambda_2. \,]$$

3. 设 G_2 代数的不可约表示为



求相应的最高权.

[提示:设 $\Lambda^{(1)}=a\alpha_1+b\alpha_2$,则

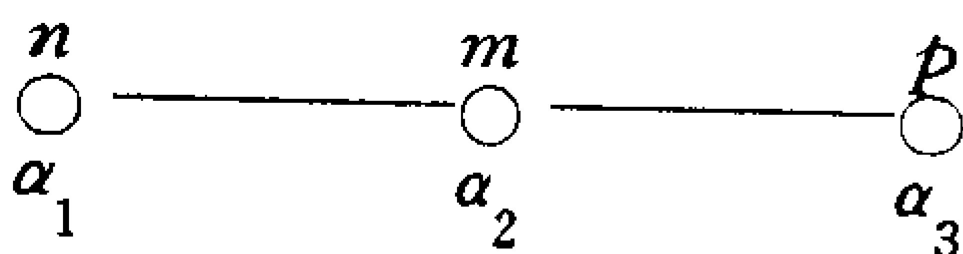
$$\Lambda_1 = 2\frac{(\Lambda^{(1)},\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)} = n, \quad \Lambda_2 = \frac{2(\Lambda^{(1)},\alpha_2)}{(\alpha_2,\alpha_2)} = m,$$

或

$$\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow a = 2n + m, b = 3n + 2m,$$

$$\Lambda^{(1)} = (2n + m)\alpha_1 + (3n + 2m)\alpha_2.$$

4. 求 A_3 代数,即 $su(4)$代数的不可约表示



的维数.

[提示：A_3 代数的正根集合 Σ^+：

$\alpha_1=(1,-1,0,0)$，　$\alpha_2=(1,0,-1,0)$，　$\alpha_3=(1,0,0,-1)$，

$\alpha_4=(0,1,-1,0)$，　$\alpha_5=(0,1,0,-1)$，　$\alpha_6=(0,0,1,-1)$；

单纯根集合 $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_4,\alpha_6\}$，且

$$\alpha_2=\alpha_1+\alpha_4, \alpha_3=\alpha_1+\alpha_4+\alpha_6, \alpha_5=\alpha_4+\alpha_6,$$

$$g=\frac{1}{2}\sum_{\alpha_i\in\Sigma^+}\alpha_i=\frac{1}{2}(3\alpha_1+4\alpha_4+3\alpha_6).$$

令 $\Lambda^{(1)}=a\alpha_1+b\alpha_2+c\alpha_3$，则

$$\begin{pmatrix}n\\m\\p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{4}(3n+2m+p),\\ b=\dfrac{1}{4}(4m+2n+2p),\\ c=\dfrac{1}{4}(3p+n+2m).\end{cases}$$

此外，　$$\Lambda^{(1)}+g=(a+\frac{3}{2})\alpha_1+(b+2)\alpha_4+(c+\frac{3}{2})\alpha_6,$$

$$c=(\alpha_1,\alpha_2)=(\alpha_2,\alpha_2)=\cdots=(\alpha_6,\alpha_6),$$

$$\prod_{\alpha\in\Sigma^+}(g,\alpha)=2^{-6}(g,\alpha_1)(g,\alpha_2)\cdots(g,\alpha_6)$$

$$=\frac{c^6}{2^6}\cdot1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2\cdot1\cdot c^6=\frac{3}{16}c^6,$$

$$\prod_{\alpha\in\Sigma^+}(g+\Lambda^{(1)},\alpha)=[(a+\frac{3}{2})-\frac{1}{2}(b+2)]$$

$$\cdot[(b+2)-\frac{1}{2}(a+c+3)][(c+\frac{3}{2})-\frac{1}{2}(b+2)]$$

$$\cdot[(a+\frac{3}{2})-\frac{1}{2}(c+2)+(c+2)-\frac{1}{2}(a+c+3)]$$

$$\cdot\left[\left(a+\frac{3}{2}\right)+(b+2)+\left(c+\frac{3}{2}\right)\right.$$

$$-\frac{1}{2}(b+2+b+2+a+c+3)\Big]\Big[(b+2)$$

$$+\left(c+\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{2}(b+2+a+b+3\Big]c^{6},$$

$$\dim(n,m,p)=\prod_{\alpha\in\Sigma^{+}}(\Lambda+g,\alpha)/\prod_{\alpha\in\Sigma^{+}}(g,\alpha)$$

$$=\frac{1}{12}(n+1)(m+1)(p+1)(n+m+2)(n+m+p+3).\Big]$$

5. 求 B_2 代数不可约表示(即 $so(5)$代数)

$$\overset{0}{\underset{\alpha_1}{\circ}}\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{1}{\underset{\alpha_2}{\bullet}};\qquad \overset{1}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{0}{\bullet}$$

的最高权及其相应的维数.

[提示:$(\alpha_1,\alpha_1)=2,(\alpha_2,\alpha_2)=1,(\alpha_1,\alpha_2)=(\alpha_2,\alpha_1)=-1$. 令 $\Lambda^{(1)}=a\alpha_1+b\alpha_2$,则有(对于表示(0,1)),

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a=1/2\\b=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\Lambda^{(1)}=\frac{1}{2}\alpha_1+\alpha_2.$$

同理对于表示(1,0)有 $\Lambda^{(1)}=\alpha_1+\alpha_2$.

$$\Sigma^{+}=\{\alpha'_1=(1,0),\alpha'_2=(0,1),\alpha'_3=(1,1),\alpha'_4=(1,-1)\},$$

$$\Pi=\{\alpha_1=(1,-1),\alpha_2=(0,1)\}$$

故 $\alpha_1=\alpha'_4,\alpha_2=\alpha'_2,\alpha'_1=\alpha_1+\alpha_2,\alpha'_3=\alpha_1+2\alpha_2$. 由此易得维数.]

7. 试证正则表示的权就是李代数的非零根.

[提示:李代数的正则表示 $ad(X_\alpha)=[B_6,X_\alpha](B\in A),=\alpha E_\alpha$(若 $X_\alpha=H$,则 $\alpha=0$),此处选取卡当-魏系基 $[B,X_\alpha]=\rho X_\alpha,=\alpha E_\alpha\Rightarrow[H_i,E_\alpha]=\alpha^i E_\alpha$,由此可以看出权与根之间的密切关系.]

8.3 权的完全集合的计算

我们知道，李代数给定表示 $\mathscr{B}$ 的最高权 $\Lambda^{(1)}$ 的单纯根表示式，实际上就可以计算出该表示的权的完全集合，即所谓权系统 $\Delta_{\mathscr{B}}$. 了解权系统对于李代数的直积表示的分解问题以及讨论基本表示和初等表示，都是十分重要的.

1. 权的层次

将不可约表示 $\mathscr{B}$ 的权表示为

$$\Lambda = \Lambda^{(1)} - \sum_i n_i \alpha_i (\forall\ \alpha_i \in \Pi), \tag{8.35}$$

其中 n_i 为非负整数. 如果

$$\sum_i n_i = s, \tag{8.36}$$

则(8.35)式表示的权 Λ 称为第 s 层的权. 显然，$s=0$，对应于唯一的最高权. 权的层次，每增高一个层次，则多减去一个单纯根. 由此由第 0 层逐渐向高层次递进，$s=0,1,2,\cdots$，逐渐得到表示 $\mathscr{B}$ 的权系统. 只要我们能够找到一个方法，在已知所有第 $0,1,2,\cdots,s$ 层所有权后，可以确定第 $s+1$ 层的所有权，这实际上就能完成对表示的权完全集的计算. 关键处在于，设 Λ 是属于第 s 层的一个权，对于给定的 $\alpha_j \in \Pi$，判断 $\Lambda - \alpha_j$ 是否属于权系统 $\Delta_{\mathscr{B}}$.

考虑含 Λ 的 α_j 权链

$$\Lambda + q\alpha_j, \cdots, \Lambda, \cdots, \Lambda - r\alpha_j, \tag{8.37}$$

根据权性质定理，

$$\frac{\alpha(\Lambda^{(1)}, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} = r - q. \tag{8.38}$$

由于比 Λ 低层次的权，q 应已知，于是由(8.38)式可以确定 r. 若 $r<1$，则 $\Lambda - \alpha_j$ 不是权；若 $r \geqslant 1$，则 $\Lambda - \alpha_j$ 是权. 然后在集合 Π 中除去所有其它单纯根，对于第 s 层的每一个权，重复上述步骤，就可

以确定第 $s+1$ 层的所有权.

设第 s 层的权的集合为 $\Delta^s_{\mathscr{B}}$，显然表示 $\mathscr{B}$ 的权系统 $\Delta_{\mathscr{B}}$ 可以表示为

$$\Delta_{\mathscr{B}} = \Delta^0_{\mathscr{B}} \cup \Delta^1_{\mathscr{B}} \cup \cdots \cup \Delta^T_{\mathscr{B}},$$

其中 $\Delta^T_{\mathscr{B}}$ 为最高层次(第 T 层)的权的集合，整数 $T \geqslant 0$，称为表示 $\mathscr{B}$ 的高度，则总层次数是 $T+1$.

2. 权系统高度定理

设$\{\Lambda_\alpha\}$标记单纯李代数 A 的不可约表示 $\mathscr{B}$，则表示的高度为

$$T(\mathscr{B}) = \sum_{\alpha\in\Pi} r_\alpha \Lambda_\alpha. \tag{8.39}$$

这个定理的证明可参见 E. B. Dynkin，《Semisimple Subalgebras of Semisimple Lie Algebras》，Mat. Sub. (N. S)，30，349(1952)，Translated In Am. Math. Soc. Transl. (2)，6，(1965).

其中系数 r_α 已由邓金算出，请见表 8.1.

以 $W_s(\mathscr{B})$表示第 s 层所有权的数目，或简并度之和，显然不可约表示 $\mathscr{B}$ 的维数应为

$$N(\mathscr{B}) = W_0(\mathscr{B}) + W_1(\mathscr{B}) + \cdots + W_r(\mathscr{B}), \tag{8.40}$$

其中 $W_s(\mathscr{B})$的极大值

$$\max\{W_s(\mathscr{B})\} = W, \tag{8.41}$$

称为表示 $\mathscr{B}$ 的宽度. 在(8.40)式中，m 重的权应出现 m 次.

3. 权系统宽度定理

单纯李代数的不可约表示 $\mathscr{B}$ 的权系统 $\Delta_{\mathscr{B}}$ 呈仿钟形，即有关系

$$\begin{cases} W_s(\mathscr{B}) = W_{T-s} \quad (s = 0,1,2,\cdots,T), \\ W_r(\mathscr{B}) \geqslant W_{r-1}(\mathscr{B}) \geqslant \cdots \geqslant W_2(\mathscr{B}) \geqslant W_1(\mathscr{B}). \end{cases} \tag{8.42}$$

当 T 为偶数时，$r=T/2$，相应 $W_r=W$；当 T 为奇数时，$r=(T+1)/2$，相应 $W_r=W_{r-1}=W$.

表 8.1　(8.36)式中所有单纯李代数的 r 值

A_n

- n
- $(n-1)2$
- $(n-2)3$
- ⋮
- $(n-k+1)k$
- ⋮
- $(n-1)2$
- n

B_n

- $n(n+1)/2$
- $(n-1)(n+2)$
- $(n-2)(n+3)$
- ⋮
- $(n-k+1)(n+k)$
- ⋮
- $2(2n-1)$
- $2n$

C_n

- n^2
- $(n-1)(n+1)$
- $(n-2)(n+2)$
- ⋮
- $(n-k+1)(n+k-1)$
- ⋮
- $(2n-2)2$
- $2n-1$

D_n

- $n(n-1)/2$, $n(n-1)/2$
- $(n-2)(n+1)$
- $(n-3)(n+2)$
- ⋮
- $(n-k+1)(n+k-2)$
- ⋮
- $(2n-3)2$
- $(2n-2)1$

G_2: 10　8

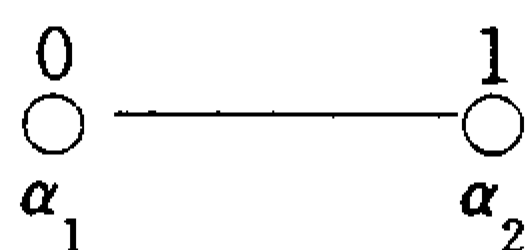
F_4: 22　42　30　16

E_6: 16　30　42　30　16；22

E_7: 34　66　96　75　52　27；49

E_8: 92　182　270　220　168　114　58；136

例 1　计算 $su(3)$ 表示



的权的完全集合.

最高权 $\Lambda^{(1)}=\alpha_1+2\alpha_2/3$，属于最高层 $\Delta_{\mathscr{B}}^0$，$\Lambda_1=0$，$\Lambda_2=1$. 由表 8.1 可知，$r_1=r_2=2$，

$$T(\mathscr{B}) = 2\Lambda_1 + 2\Lambda_2 = 2,$$

因此共有 $T+1=3$ 个层次，最大宽度 $W=W_1(\mathscr{B})$. 第 0 层和第 2 层只有一个权.

考虑第一层. 因为 $\Lambda_1=0$，故 $\Lambda^{(1)}-\alpha_1$ 不是权. 因为 $\Lambda_2=1$，则 $\Lambda^{(1)}-\alpha_2=(\alpha_1-\alpha_2)/3$ 是权，并且有

$$W_1(\mathscr{B}) = 1.$$

考虑第二层. $\Lambda^{(1)}-2\alpha_2$ 不是权，因此 $\Lambda^{(1)}-\alpha_1-\alpha_2=-(2\alpha_1+\alpha_2)/3$ 必然是权.

故表示(0,1)的权系统为

- ● $(\alpha_1+2\alpha_2)/3$，　$W_0(\mathscr{B})=1$，　$\Delta_{\mathscr{B}}^0$，
- ● $\alpha_1-\alpha_2/3$，　$W_1(\mathscr{B})=1$，　$\Delta_{\mathscr{B}}^1$，
- ● $-(2\alpha_1+\alpha_2)/3$，　$W_2(\mathscr{B})=1$，　$\Delta_{\mathscr{B}}^2$.

其维数为 3，因为

$$N(\mathscr{B}) = W_0(\mathscr{B}) + W_1(\mathscr{B}) + W_2(\mathscr{B}) = 3.$$

已知 $\Delta_{\mathscr{B}}^0,\Delta_{\mathscr{B}}^1,\cdots,\Delta_{\mathscr{B}}^r$ 中的权，求 $\Delta_{\mathscr{B}}^{r+1}$ 的法则如下：寻找对 $\Delta_{\mathscr{B}}^r$ 中每个权有 $\Lambda-\alpha\in\Delta_{\mathscr{B}}$ 的所有单纯根 α，为此需求

$$\Lambda_\alpha \equiv \frac{2(\Lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)},\text{及 } \Lambda_\alpha + q \quad (q\text{ 见(8.38)式}).$$

当 $\Lambda_\alpha+q>0$ 时，则 $\Lambda-\alpha\in\Delta_{\mathscr{B}}$；当 $\Lambda_\alpha+q\leqslant 0$ 时，则 $\Lambda-\alpha\overline{\in}\Delta_{\mathscr{B}}$.

例 2　求 $su(3)$即 A_2 代数的不可约表示

$$\overset{2}{\underset{\alpha_1}{\bigcirc}}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{0}{\underset{\alpha_2}{\bigcirc}}$$

的权系统与表示(2,0)的维数.

最高权 $\Lambda^{(1)}=(4\alpha_1+2\alpha_2)/3$，$W(\mathscr{B})=1$，$\Delta_{\mathscr{B}}^0$ 表示(2,0)的高度($\Lambda_1=2$，$\Lambda_2=0$，$r_1=r_2=2$)

$$T(\mathscr{B}) = \sum_i r_i\Lambda_i = 4,$$

故权系统 $\Delta_{\mathscr{B}}$ 共有 5 层.

第一层. $\Lambda_{\alpha_1}^{(1)}=2$, $\Lambda^{(1)}\in\Delta_{\mathscr{B}}$, 但 $\Lambda^{(1)}+\alpha\overline{\in}\Delta_{\mathscr{B}}$, 故 $q=0$. $\Lambda_{\alpha_1}^{(1)}+q=2>0$, 所以 $\Lambda^{(1)}-\alpha_1=\alpha_1+2\alpha_2/3$ 是权. $\Lambda_{\alpha_2}^{(1)}=0$. 由于 $\Lambda^{(1)}\in\Delta_{\mathscr{B}}$, 而 $\Lambda^{(1)}+\beta\overline{\in}\Delta_{\mathscr{B}}$, 故 $q=0$. 由法则 $\Lambda_{\alpha_2}^{(1)}+q=0$, 所以 $\Lambda^{(1)}-\alpha_2$ 不是权. 此外, $W_1(\mathscr{B})=1$.

第二层. 令 $M_1=\Lambda^{(1)}-\alpha_1=\frac{\alpha_1+2\alpha_2}{3}\in\Delta_{\mathscr{B}}^1$. 由于 $M_1\in\Delta_{\mathscr{B}}$, 且 $M_1+\alpha_1=\Lambda^{(1)}\in\Delta_{\mathscr{B}}$, 故 $q=1$. 又

$$(M_1)_{\alpha_1}=\frac{2(M_1,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}=\frac{2}{3}\,\frac{(\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}$$
$$=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=0.$$

因此, $(M_1)_{\alpha_1}+q=1>0$, 故 $M_1-\alpha_1\equiv M_2\in\Delta_{\mathscr{B}}$, 即 $\frac{-(2\alpha_1-2\alpha_2)}{3}\in\Delta_{\mathscr{B}}^2$.

由于 $M_1\in\Delta_{\mathscr{B}}^1$, 但 $M_1+\alpha_2=\frac{\alpha_1+5\alpha_2}{3}\overline{\in}\Delta_{\mathscr{B}}$, 故 $q=0$. 此时,

$$(M_1)_{\alpha_2}=\frac{2(\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2)}{3(\alpha_2,\alpha_2)}=\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{4}{3}=1,$$
$$(M_1)_{\alpha_2}+q=1>0,$$

故 $M_1-\alpha_2=\frac{\alpha_1-\alpha_2}{3}$ 也是权. 令 $M-\alpha_2=\frac{\alpha_1-\alpha_2}{3}=M'_2\in\Delta_{\mathscr{B}}^2$. 显然, $W_3(\mathscr{B})=2$.

第四层. $M_2\in\Delta_{\mathscr{B}}$, $M_2+\alpha_1=M_1\in\Delta_{\mathscr{B}}$, 且 $M_2+2\alpha_1=\Lambda^{(1)}\in\Delta_{\mathscr{B}}$, 故 $q=2$.

$$(M_2)_{\alpha_1}=\frac{-2(2\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}=-4\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=-6,$$
$$(M_2)_{\alpha_1}+q=-6+2=-4,$$

故 $M_2-\alpha_1\overline{\in}\Delta_{\mathscr{B}}$.

再看 $M_2+\alpha_2=\frac{-2\alpha_1+5\alpha_2}{3}\overline{\in}\Delta_{\mathscr{B}}$, 故 $q=0$. 又

$$(M_2)_{\alpha_2}=\frac{2(-2\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2)}{3(\alpha_2,\alpha_2)}=\frac{4}{3}-\frac{4}{3}\times(-\frac{1}{2})=2.$$

$$(M_2)_{\alpha_2}+q=2>0,$$

故
$$M_3\equiv M_2-\alpha_2=\frac{-(2\alpha_1+\alpha_2)}{3}\in\Delta^{4}_{\mathscr{B}}.$$

$M'_2\in\Delta_{\mathscr{B}}$, $M'_2+\alpha_1=\overline{\in}\Delta_{\mathscr{B}}$,故 $q=0$. 又

$$(M'_2)_{\alpha_1}=\frac{2(\alpha_1-\alpha_2,\alpha_1)}{3(\alpha_1,\alpha_1)}=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}(-\frac{1}{2})=1,$$

$$(M'_2)_{\alpha_1}+q=1>0,\quad M'_2-\alpha_1\in\Delta_{\mathscr{B}}.$$

但是

$$M'_2-\alpha_1=\frac{\alpha_1-\alpha_2}{3}=\frac{-(2\alpha_1+\alpha_2)}{3}=M_2-\alpha_2,$$

$$M'_2\in\Delta_{\mathscr{B}},\quad M'_2+\alpha_2\in\Delta_{\mathscr{B}},\quad q=1,$$

但是,

$$(M'_2)_{\alpha_2}=\frac{2(\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2)}{3(\alpha_2,\alpha_2)}=-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=-1.$$

即是,

$$(M'_2)_{\alpha_2}+q=-1+1=0,故\ M'_2-\alpha_2\ \overline{\in}\ \Delta_{\mathscr{B}}.$$

概括第四层,$W_3(\mathscr{B})=1$.

最低(第五)层. $M_3=\dfrac{-(2\alpha_1+\alpha_2)}{3}\in\Delta_{\mathscr{B}}$, $M_3+\alpha_1\overline{\in}\Delta_{\mathscr{B}}$, $q=0$.

$$(M_3)_{\alpha_1}=\frac{-2(2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1)}{3(\alpha_1,\alpha_1)}=-\left[\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\times(-\frac{1}{2})\right]=-1,$$

$(M_3)_{\alpha_1}+q=-1<0$,故 $M_3-\alpha_1\ \overline{\in}\ \Delta_{\mathscr{B}}$.

此外,$M_3+2\alpha_2=M'_2+\alpha_2=M_1\in\Delta_{\mathscr{B}}$,故 $q=2$. 又

$$(M_3)_{\alpha_2}=\frac{-2(2\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2)}{3(\alpha_2,\alpha_2)}=-\left[\frac{2}{3}+(\frac{4}{3})\cdot(-\frac{1}{2})\right]=0,$$

$$(M_3)_{\alpha_2}+q=2>0,$$

即是
$$M_3-\alpha_2\equiv M_4=-\frac{(2\alpha_1+4\alpha_2)}{3}\in\Delta_{\mathscr{B}}.$$

归纳以上结果：$T=4$，其 $T+1=5$ 层.

第 0 层(最高层) ● $\Lambda^{(1)}=\dfrac{4\alpha_1+2\alpha_2}{3}$，

$W_0(\mathscr{B})=1.$

第一层 ● $M_1=\dfrac{\alpha_1+2\alpha_2}{3}=\Lambda^{(1)}-\alpha_1$，

$W_1(\mathscr{B})=1.$

第二层 $M_2=-\dfrac{2(\alpha_1-\alpha_2)}{3}$ ● ● $M'_2=\dfrac{(\alpha_1-\alpha_2)}{3}$

$=M_1-\alpha_2$，

$=M_1-\alpha_1$ $W=W_2(\mathscr{B})=2.$

● $M_3=-\dfrac{(\alpha_2+2\alpha_1)}{3}$

$=M'_2-\alpha_2$

$=M_1-\alpha_1$，

$W_3(\mathscr{B})=1.$

● $M_4=M_3-\alpha_2=\dfrac{-(2\alpha_1+4\alpha_2)}{3}$，

$W_4(\mathscr{B})=1.$

问　　题

1. 求 $su(3)$代数(A_2)的表示

$$\overset{0}{\underset{\alpha_1}{\bigcirc}}\text{——}\overset{2}{\underset{\alpha_2}{\bigcirc}}$$

的权系统.

[提示：计及$(\alpha_1,\alpha_1)=(\alpha_2,\alpha_2)=1$，$(\alpha_1,\alpha_2)=(\alpha_2,\alpha_1)=-\dfrac{1}{2}$，表示(0，2)与(2，0)在 $\alpha_1\rightleftarrows\alpha_2$ 变换下具有对称性. 注意到例 2，应有权系统

● $(2\alpha_1+4\alpha_2)/3=\Lambda^{(1)}$，

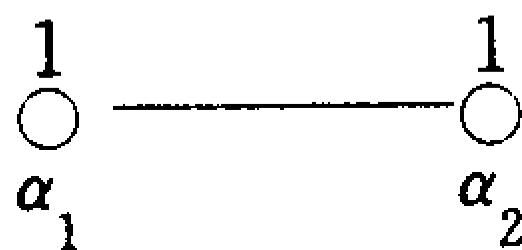
● $(2\alpha_1+\alpha_2)/3=M_1$，

● $M_2=2(\alpha_1-\alpha_2)3$， ● $M'_2=\dfrac{-\alpha_1+2\alpha_2}{3}$，

● $M_3 = -\frac{(\alpha_1 + 2\alpha_2)}{3}$,

● $M_4 = -\frac{(4\alpha_1 + 2\alpha_2)}{3}$.]

2. 计算代数 $su(3)$ 不可约表示

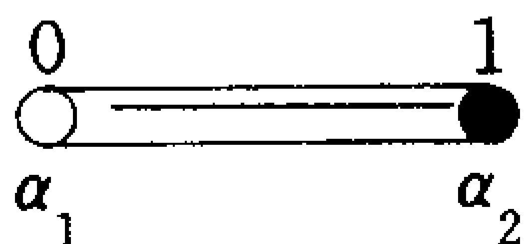


的权系统.

(答案:

第 0 层	●	$(2\alpha_1 + 4\alpha_2)/3$.
第一层	●	$(2\alpha_1 + \alpha_2)/3$.
第二层 $2(\alpha_1 - \alpha_2)/3$	● ●	$(-\alpha_1 + \alpha_2)/3$.
第三层	●	$-(\alpha_1 + 2\alpha_2)/3$.
第四层	●	$-(4\alpha_1 + 2\alpha_2)/3$.)

3. 计算 G_2 代数的不可约表示



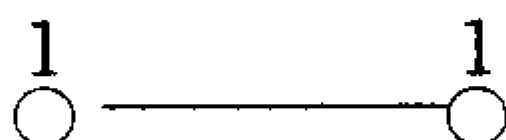
的权系统 $\Delta_{\mathscr{B}}$ 及表示维数.

[提 示: $(\alpha_1, \alpha_1) = 3$, $(\alpha_2, \alpha_2) = 3$, $(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_2, \alpha_1) = \sqrt{(\alpha_1,\alpha_1)(\alpha_2,\alpha_2)}\cos 150° = \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2}$.

最高权	$\Lambda^{(1)} = \alpha_1 + 2\alpha_1$	●
$(\Lambda^{(1)} - \alpha_2)$	$M_1 = \alpha_1 + \alpha_2$	●
$(M_1 - \alpha_1)$	$M_2 = \alpha_2$	●
$(M_2 - \alpha_2)$	$M_3 = 0$(零权)	●
$(M_3 - \alpha_2)$	$M_4 = -\alpha_2$	●
$(M_4 - \alpha_1)$	$M_5 = -\alpha_1 - \alpha_2$	●
$(M_5 - \alpha_2)$	$M_6 = -\alpha_1 - 2\alpha_2$	●

共 7 层权,全部为单数,故 $N(\mathscr{B}) = 7$.]

4. 计算 $su(3)$ 的表示



的权系统及表示的维数.

[提示:权图为

最高权	●		$\Lambda^{(1)}=\alpha_1+\alpha_2$.
$M_1=\Lambda^{(1)}-\alpha_1=\alpha_2$	●	●	$M'_1=\Lambda^{(1)}-\alpha_2=\alpha_1$.
$M_3=M_2-\alpha_2=0$	●	●	$M'_3=M'_2-\alpha_1=0$.
$M_4=M_3-\alpha_2=-\alpha_2$	●	●	$M'_4=M'_3-\alpha_1=-\alpha_1$.
$M_5=M_4-\alpha_1$	●		$M'_4-\alpha_2=-\alpha_1-\alpha_2=M_5$.

其中有两个零权(0,0),分别来自权 β 与权 α 的魏尔反射. $N(\mathscr{B})=8$.]

5. 设 $\mathscr{B}$ 为半单李代数不可约表示,最高权为 $\Lambda^{(1)}$, 正根和集之半 $g=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Sigma^+}\alpha$. 假设权为 M 的简并度为 m_M,且规定,若 $M\overline{\in}\Delta_{\mathscr{B}}$,则 $m_M=0$,可以证明存在下述关系式

$$m_M\{(\Lambda^{(1)}+g,\Lambda^{(1)}+g)-(M+g,M+g)\}$$
$$=2\sum_{\alpha\in\Sigma^+}\sum_{j=1}^{\infty}m_{M+j\alpha}(M+j\alpha,\alpha),\tag{8.43}$$

试求上题中 G_2 的(0,1)表示中各个权的 m_M.

[提示:由具体表达可知,$m_0=m_1=m_2=m_3=m_5=m_6$,只有 m_2 不知道.现在 $\Lambda^{(1)}=\alpha_1+2\alpha_2, g=3\alpha_1+5\alpha_2$. 最高权 $m_{\Lambda^{(1)}}=1$.

$$m_{M_1}=\frac{2(\Lambda^{(1)},\alpha_2)}{(\Lambda^{(1)}+g,\Lambda^{(1)}+g)-(M_1+g,M_1+g)}=1,$$

$$m_{M_2}=\frac{\{2m_{\Lambda^{(1)}}(\Lambda,\alpha_1+\alpha_2)\}}{(\Lambda+g,\Lambda+g)-(M_2+g,M_2+g)}=1,\cdots]$$

6. 求 B_2 代数不可约表示(0,1)与(1,0)的最高权、权系统 $\Delta_{\mathscr{B}}$ 以及表示的维数.

7. 求 B_2 代数不可约表示(n,m)维数的一般公式.

[提示：C_2 的维数亦同.]

§8.4 直积表示、基本表示与初等表示

李代数与李群的直积表示的定义是一致的，故以后只需讨论不可约表示的直积就可以了. 直积表示在李群和李代数的表示理论以及实际应用中都具有十分重要的作用.

1. 直积表示

设 $\mathscr{B}_1$ 与 $\mathscr{B}_2$ 是半单李代数 A 的两个不可约表示，则可以证明

$$\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \otimes \mathscr{B}_2 \tag{8.44}$$

也是 A 的表示，称为 $\mathscr{B}_1$ 与 $\mathscr{B}_2$ 的直积表示. 一般说来，直积表示 $\mathscr{B}$ 是可以约化的，并且用代数 A 的不可约表示 $\{\mathscr{B}_k\}$ 的直和表示

$$\mathscr{B} = \sum_{\oplus k} m_k \mathscr{B}_k, \tag{8.45}$$

其中 m_k 是不可约表示 $\mathscr{B}_k$ 在和式中重复的次数. 和式(8.45)又称克莱布希-戈顿(Clebsch-Gordan)级数. 将 $\mathscr{B}$ 进行直和分解，就是所谓"直积表示的约化".

权系统 $\Delta_{\mathscr{B}}$ 是约化的锐器. 设已知(8.45)式中李代数 A 的所有不可约表示 $\{\mathscr{B}_k\}$，及相应的权系统 Δ_k. 记不可约表示 $\mathscr{B}_1$ 与 $\mathscr{B}_2$ 的表示空间为 L_1 与 L_2，根据权性质，作权子空间直和分解，

$$L_1 = \sum_{\Lambda_1 \in \Delta_1} {}_{\oplus}\, L_1^{(\Lambda_1)}, \quad L_2 = \sum_{\Lambda_2 \in \Delta_2} {}_{\oplus}\, L_1^{(\Lambda_2)}. \tag{8.46}$$

同样对直积表示 $\mathscr{B}$ 的表示空间 $L_1 \otimes L_2 \equiv L$ 作直和分解

$$L = \sum_{\Lambda_1 \in \Delta_1} \sum_{\Lambda_2 \in \Delta_2} L_1^{(\Lambda_1)} \otimes L_2^{(\Lambda_2)}, \tag{8.47}$$

这里权子空间 $L_1^{(\Lambda_1)} \otimes L_2^{(\Lambda_2)}$ 对应于表示 $\mathscr{B}_1 \otimes \mathscr{B}_2 = \mathscr{B}$，而权为 $\Lambda_1 + \Lambda_2 = \Lambda$. 换言之，表示 $\mathscr{B}_1$ 中的任一权 Λ_1 与表示 $\mathscr{B}_2$ 中任一权 Λ_2 的算术和均给出表示 $\mathscr{B}$ 的一个权 Λ. 亦即

$$\Delta_{\mathscr{B}} = \Delta_{\mathscr{B}_1} + \Delta_{\mathscr{B}_2} \equiv \Delta_1 + \Delta_2, \tag{8.48}$$

或者$\forall\ \Lambda_1\in\Delta_1,\forall\ \Lambda_2\in\Delta_2$,应有

$$\Lambda_1+\Lambda_2\equiv\Lambda\in\Delta_{\mathscr{B}}. \tag{8.49}$$

并且最高权$\Lambda_1^{(1)}\in\Delta_1,\Lambda_2^{(1)}\in\Delta_1$,其算术和

$$\Lambda^{(1)}=\Lambda_1^{(1)}+\Lambda_2^{(1)} \tag{8.50}$$

给出表示$\mathscr{B}$的最高权.$\Lambda^{(1)}$显然也与$\Lambda_1^{(1)}$与$\Lambda_2^{(1)}$一样,也是单权.

对于直积表示$\mathscr{B}$的权系统$\Delta_{\mathscr{B}}$的宽度$W(\mathscr{B})$与高度$T(\mathscr{B})$显然有关系式

$$W_k(\mathscr{B})=\sum_i W_i(\mathscr{B}_1)W_{k-i}(\mathscr{B}_2), \tag{8.51}$$

$$W(\mathscr{B})\geqslant W(\mathscr{B}_2)+T(\mathscr{B}_1) \tag{8.52}$$

$$(T(\mathscr{B}_2)\geqslant T(\mathscr{B}_1)).$$

例 1 $su(3)(A_2)$代数直积表示

$$\overset{0}{\bigcirc}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\overset{1}{\bigcirc}\otimes\overset{0}{\bigcirc}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\overset{1}{\bigcirc}$$

的约化.

$$\Delta_1=\Delta_2=\left\{\frac{\alpha_1+2\alpha_2}{3},\frac{\alpha_1-\alpha_2}{3},-\frac{2\alpha_1+\alpha_2}{3}\right\}$$

由(8.50)式,有

$$\begin{aligned}\Delta&=\Delta_1\otimes\Delta_2\\&=\left\{\frac{2\alpha_1+4\alpha_2}{3},\frac{2\alpha_1+\alpha_2}{3},\frac{2\alpha_1+\alpha_2}{3},\right.\\&\quad-\frac{\alpha_1-\alpha_2}{3},\frac{2\alpha_1-2\alpha_2}{3},-\frac{\alpha_1-\alpha_3}{3},\\&\quad\left.-\frac{\alpha_1+2\alpha_2}{3},-\frac{\alpha_1+2\alpha_2}{3},-\frac{4\alpha_1+2\alpha_2}{3}\right\}.\end{aligned}$$

其中最高权$\Lambda^{(1)}=\Lambda_1^{(1)}+\Lambda_2^{(1)}=\dfrac{2\alpha_1+4\alpha_2}{3}$,它是表示$\bigcirc\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\overset{2}{\bigcirc}$的最高权,表示(0,2)的权系统

$$\begin{aligned}\Delta_{(0,2)}=&\left\{\frac{2\alpha_1+4\alpha_2}{3},\frac{2\alpha_1+\alpha_2}{3},-\frac{\alpha_1-\alpha_2}{3},\right.\\&\left.\frac{2\alpha_1-\alpha_2}{3},-\frac{\alpha_1+2\alpha_2}{3},-\frac{(4\alpha_1+2\alpha_2)}{3}\right\}\end{aligned}$$

剩下的 3 个权

$$\left\{\frac{2\alpha_1+\alpha_2}{3},\ -\frac{\alpha_1-\alpha_2}{3},\ -\frac{\alpha_1+\alpha_2}{3}\right\},$$

正好是表示$\overset{1}{\circ}$——$\circ$的权系统. 因此

$$\circ\!\!-\!\!-\!\!\overset{1}{\circ}\otimes\circ\!\!-\!\!-\!\!\overset{1}{\circ}=\circ\!\!-\!\!-\!\!\overset{2}{\circ}\oplus\overset{1}{\circ}\!\!-\!\!-\!\!\circ$$

应用上述方法约化直积表示十分复杂,需要构造许多表示的权系统. 对于高维情况,往往需要若干辅助定理. 对于 $SU(n)$ 与 $SO(n)$等群已发展出特殊简便方法,有的表格化了,也有专门计算机程序. 利用杨图约化表示,在置换群一节,我们已有介绍.

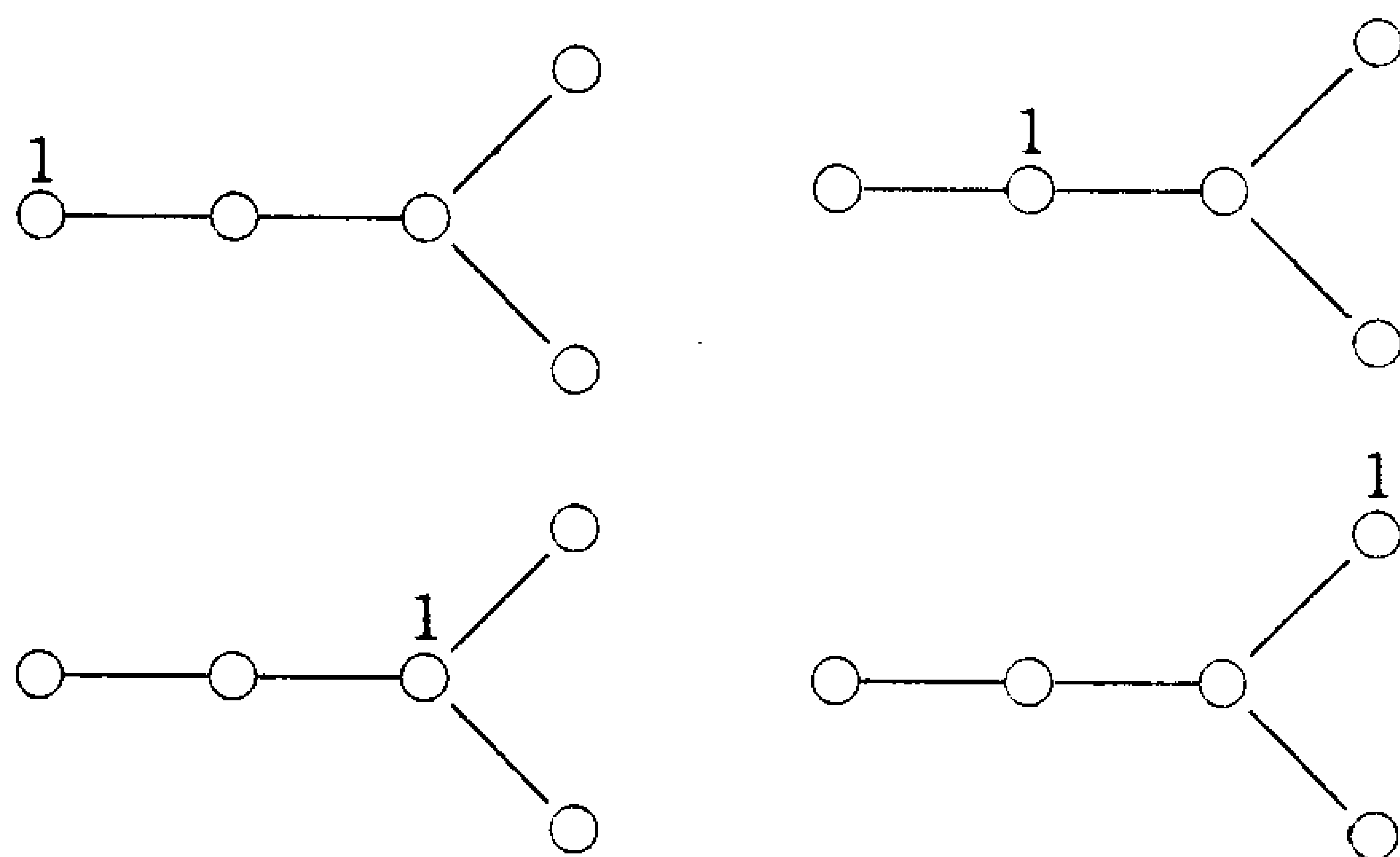
2. 基本表示

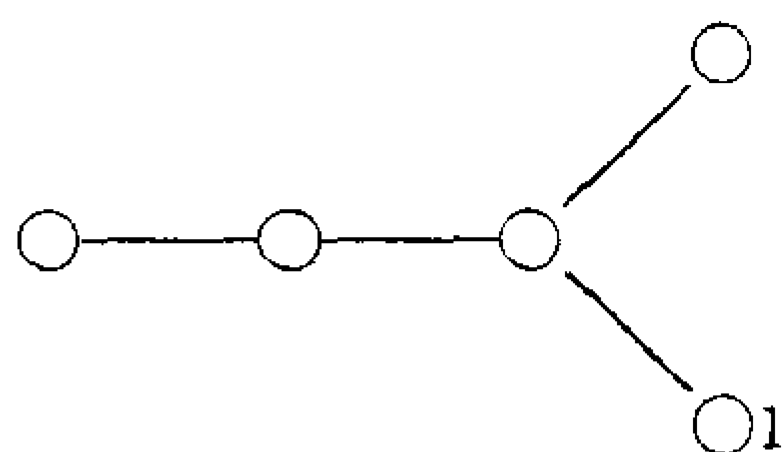
基本表示是指不能用"两最高权 $\Lambda^{(1)}$ 与 $\Lambda^{(1)'}$ 的不可约表示构成最高权为 $\Lambda^{(1)}+\Lambda^{(1)'}$ 的不可约表示"的方法得到的那些不可约表示. 其主要特征是,其最高权不能分解为两个权之和. 如果一个不可约表示$\{\Lambda_i\}(i=1,2,\cdots,l)$的非负整数集中只有一个数值为 1,其余均为 0,则该表示就是基本表示.

例 2 C_3 代数的基本表示是

$\overset{1}{\circ}$——$\circ$══$\bullet$　　$\circ$——$\overset{1}{\circ}$══$\bullet$　　或　　$\circ$——$\circ$══$\overset{1}{\bullet}$

例 3 D_5 代数的基本表示是





定理 设 $\Lambda^{(1)}$ 为 l 秩李代数以 $\{\Lambda_i\}$ 标记的不可约表示的最高权，$\Lambda_j^{(1)}(j=1,\cdots,l)$ 为相应的第 j 个基本表示的最高权，则有如下展开式：

$$\Lambda^{(1)} = \sum_{j=1}^{l} \Lambda_j \Lambda_j^{(1)}. \qquad (8.53)$$

即任何不可约表示的最高权，总可以表为相应的所有基本表示的最高权的线性组合.

证明 将 $\Lambda^{(1)}$ 与 $\Lambda_j^{(1)}$ 按李代数单纯根展开

$$\Lambda^{(1)} = \sum_k n_k \alpha_k, \qquad \Lambda_j^{(1)} = \sum_k n_k^{(j)} \alpha_k. \qquad (8.54)$$

在第 j 个基本表示 $\{\Lambda_i^j\}$ 中，$\Lambda_i^j=\delta_{ij}$. 将 l 个基本表示 $\{\Lambda_i^j\}(j=1,\cdots,l,i=1,\cdots,l)$ 写成列矢量

$$\Lambda^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\cdots, \quad \Lambda^j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\cdots, \quad \Lambda^l = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

它们显然构成 l 维空间的正交归一基. 因此，任意表示 $\{\Lambda_i\}$，数集也表为 l 维列矢量，则有

$$\Lambda = \Lambda_1\Lambda^1 + \cdots + \Lambda_j\Lambda^j + \cdots + \Lambda_l\Lambda^l = \sum_{j=1}^{l} \Lambda_j \Lambda^j. \quad (8.55)$$

但是由(8.30)式有，$n_k=A^{-1}\Lambda^k$，$n=A^{-1}\Lambda$. 将(8.54)式代入，得

$$n = A^{-1}\Lambda = A^{-1}\sum_j \Lambda_j \Lambda^j = \sum_{j=1}^{l} \Lambda_j n_j. \qquad (8.56)$$

将此式代入(8.54)式，得

$$\Lambda^{(1)} = \sum_k n_k \alpha_k = \sum_k \left(\sum_j \Lambda_j n_k^{(j)} \right) \alpha_k = \sum_j \Lambda_j \Lambda_j^{(1)}.$$

此式表明，最大权 $\Lambda^{(1)}$ 所对应的不可约表示是 Λ_1 个第一基本表示，Λ_2 个第二基本表示，…，Λ_l 个第 l 个基本表示构成的直积表示.

直积表示不会是基本表示，但在直积表示的约化分解中，却可以包含基本表示，尤其是其中对称与反对称部分，是获得基本表示的重要途径. 在阅读本节时，请读者参阅置换群 S_n 部分.

例 4 A_2 代数的基本表示(1,0)⊗(1,0)

$$\overset{1}{\bigcirc}\!\!-\!\!-\!\!\bigcirc \otimes \overset{1}{\bigcirc}\!\!-\!\!-\!\!\bigcirc = \overset{2}{\bigcirc}\!\!-\!\!-\!\!\bigcirc \oplus \bigcirc\!\!-\!\!-\!\!\overset{1}{\bigcirc}$$

基本表示(0,1)的最高权 $\Lambda^{(1)} = \dfrac{\alpha_1 + 2\alpha_2}{3}$，相应权系统

$$\left\{ \Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)} = -\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{3}, \quad \Lambda^{(3)} = -\frac{\alpha_1 + 2\alpha_2}{3} \right\}.$$

相应的基矢量记为 $|\Lambda^{(1)}\rangle$、$|\Lambda^{(2)}\rangle$ 和 $|\Lambda^{(3)}\rangle$. 用并矢形式进行直积运算

$$|\Lambda^{(i)}\rangle |\Lambda^{(j)}\rangle \equiv |\Lambda^{(i)} \Lambda^{(j)}\rangle \quad (i,j = 1,2,3),$$

构成 9 维空间的基矢. 它们可以重新组合，即用基矢变换得到新坐标系，其 9 个新基矢可以分为两大组.

第一组有 6 个基矢，相对于并矢指标是对称的：

$$\begin{aligned} \phi_p^{(s)} = \{ & |\Lambda^{(i)}\rangle |\Lambda^{(i)}\rangle (i = 1,2,3), 3 \text{ 个}; \\ & |\Lambda^{(i)}\rangle |\Lambda^{(j)}\rangle + |\Lambda^{(j)}\rangle |\Lambda^{(i)}\rangle, 3 \text{ 个}; \\ & i,j = 1,2,3, i \neq j \}. \end{aligned} \tag{8.57}$$

另一组基矢有 3 个，相对于并矢指标交换是反对称的：

$$\phi_p^{(A)} = \{ |\Lambda^{(i)}\rangle |\Lambda^{(j)}\rangle - |\Lambda^{(j)}\rangle |\Lambda^{(i)}\rangle, i \neq j, i,j = 1,2,3 \} \tag{8.58}$$

(8.57)式中基矢对应的权是

$$\frac{4\alpha_1 + 2\alpha_2}{3}, \quad -\frac{2\alpha_1 - 2\alpha_2}{3}, \quad -\frac{2\alpha_1 + 4\alpha_2}{3},$$

$$\frac{\alpha_1+2\alpha_2}{3},\quad \frac{\alpha_1-\alpha_2}{3},\quad -\frac{2\alpha_1+\alpha_3}{3},$$

正好是不可约表示$\overset{2}{\bigcirc}$——○的权系统，或者说对应置换群 S_2 的对称表示[α]. 或者图示为

$$\overset{2}{\bigcirc}\text{——}\bigcirc=(\overset{1}{\bigcirc}\text{——}\bigcirc\otimes\overset{1}{\bigcirc}\text{——}\bigcirc)_{[2]}.$$

(8.58)式中基矢对应的权是

$$\frac{\alpha_1+2\alpha_2}{3},\quad \frac{\alpha_1-\alpha_2}{3},\quad -\frac{2\alpha_1+\alpha_2}{3},$$

正好是不可约表示○——$\overset{1}{\bigcirc}$ 的权系统，或者说对应置换群 S_2 的反对称表示[1 1]=[1^2]. 或者图示为

$$\bigcirc\text{——}\overset{1}{\bigcirc}=(\overset{1}{\bigcirc}\text{——}\bigcirc\otimes\overset{1}{\bigcirc}\text{——}\bigcirc)_{[11]}$$

3. 法则

在李代数的基本表示 ϕ 的 n 次直积表示中，设其约化分解后得到的全对称表示为 $\mathscr{B}^{[n]}$，全反对称表示为 $\mathscr{B}^{[1^n]}$. 设表示 $\mathscr{B}$ 的基矢组为

$$(|1\rangle,|2\rangle,\cdots,|K\rangle),$$

基矢 $|i\rangle$ 的权是 $\Lambda_i(i=1,\cdots,K)$，则有

(1) 反对称表示 $\mathscr{B}^{[1^n]}$的权系统为

$$\Lambda_A=\Lambda_{i_1}+\Lambda_{i_2}+\cdots+\Lambda_{i_n}(i_K>\cdots>i_2>i_1),\quad (8.59)$$

其最高权

$$\Lambda_A^{(1)}=\Lambda_1^{(1)}+\Lambda_2^{(1)}+\cdots+\Lambda_n^{(1)}.$$

(2) 表示 $\mathscr{B}^{[1^n]}$的维数

$$\dim\mathscr{B}^{[1^n]}=C_K^n.\quad (8.60)$$

(3) 全对称表示 $\mathscr{B}^{[n]}$的权系统为

$$\Lambda_S=\Lambda_{i_1}+\Lambda_{i_2}+\cdots+\Lambda_{i_n}(i_n\geqslant\cdots\geqslant i_2\geqslant i_1),\quad (8.61)$$

共最高权

$$\Lambda_S^{(1)} = n\Lambda^{(1)}(\Lambda^{(1)}\text{是基本表示最高权}). \tag{8.62}$$

(4) 表示 $\mathscr{B}^{[n]}$的维数

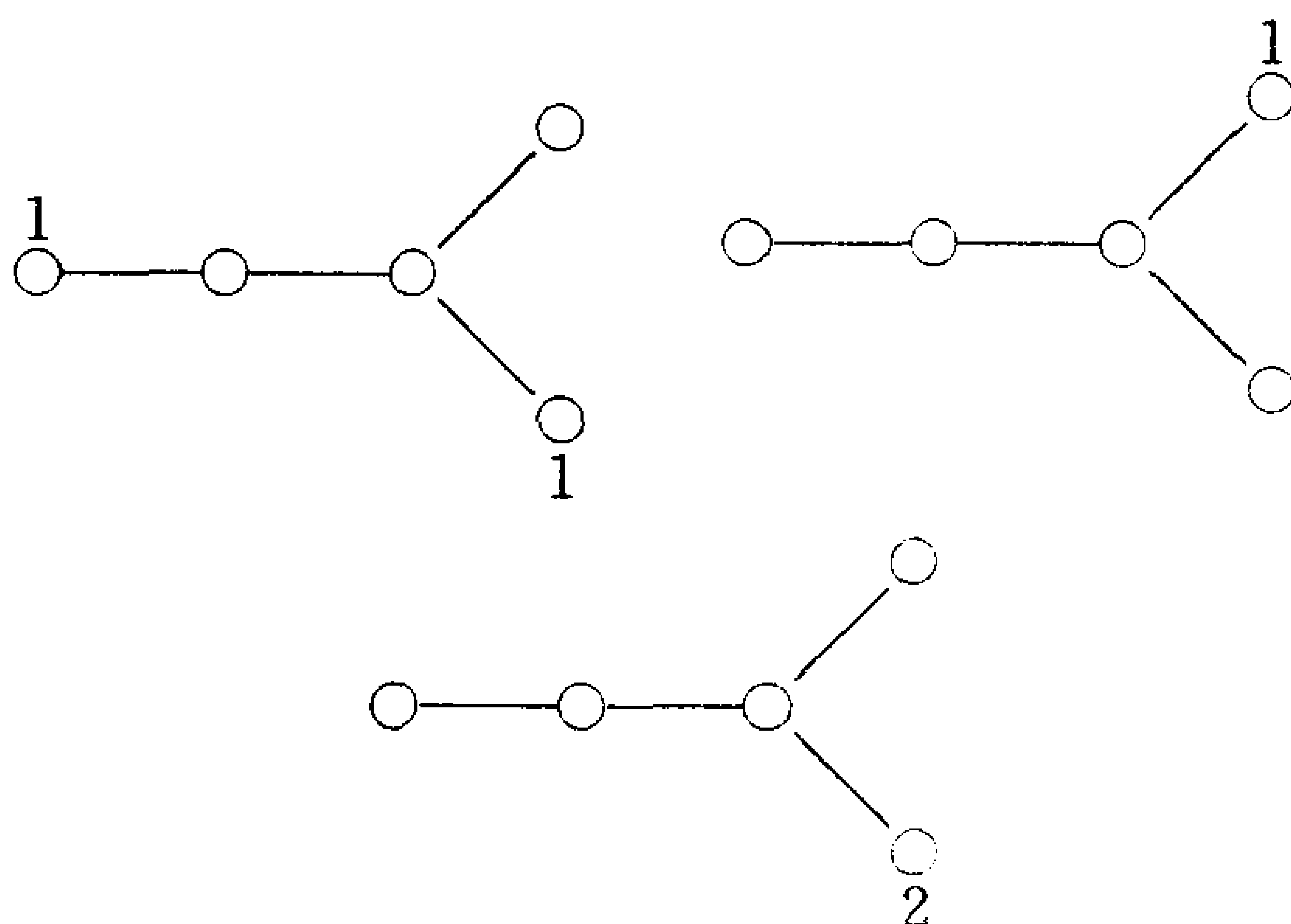
$$\dim\mathscr{B}^{(n)} = C_{n+K-1}^{n} \tag{8.63}$$

以上法则的证明是平庸的，兹不赘述.

4. 初等表示

在李群的邓金图中，端点为 1 的基本表示，称为初等表示. 任何基本表示都可以通过初等表示的反对称化得到，因此初等表示有特殊的重要性.

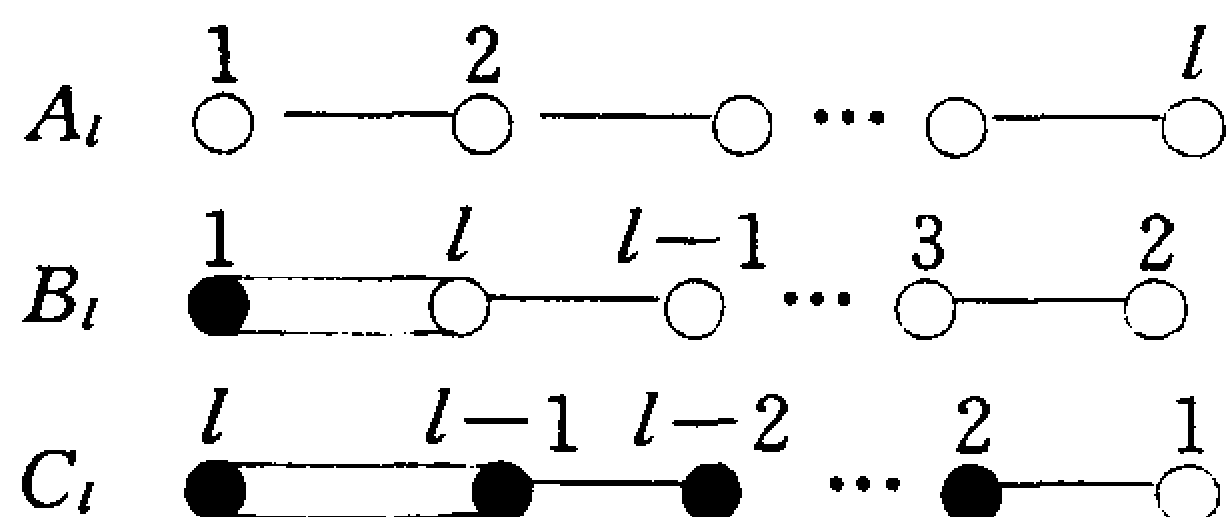
例 5 在 D_5 代数的 5 个基本表示中，相应初等表示有 3 个，

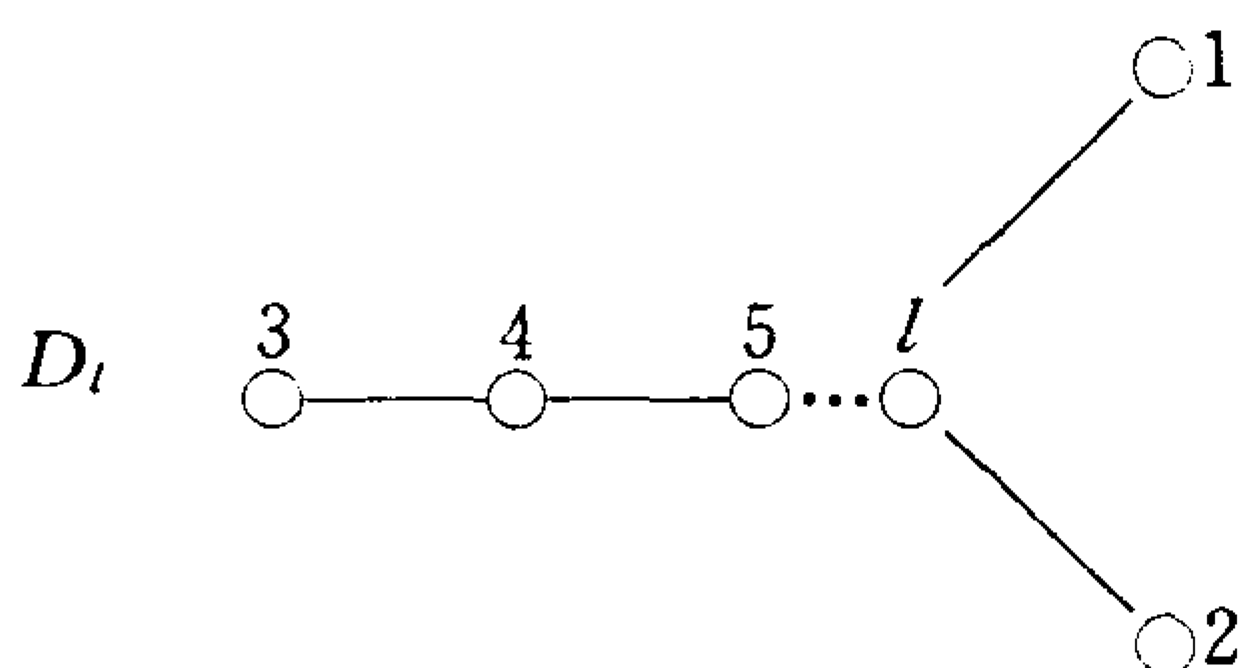


C_3 代数的初等表示为 2 个



利用初等表示的正权，可以表示所有经典李代数和例外李代数的正根系. 将下列李代数的初等表示





的权系统记为$\{\mu_i\}$，则相应代数的根系如表 8.2 所示.

表 8.2　李代数根系表

代数符号		根系 Σ	正根系 Σ^+
经典代数	A_l	$\{\mu_p-\mu_q\}$ $(p,q=1,\cdots,l+1)$	$\{\mu_p-\mu_q\}$ $(p<q,p,q=1,\cdots,l+1)$
	B_l	$\{\pm\mu_p,\pm\mu_p\pm\mu_q\}$ $(p,q=1,\cdots,l)$	$\{\mu_p,\mu_p\pm\mu_q\}$ $(p,q=1,\cdots,l,p<q)$
	C_l	$\{\pm2\mu_p,\pm\mu_p\pm\mu_q\}$ $(p,q=1,\cdots,l)$	$\{2\mu_p,\mu_p\pm\mu_q\}$ $(p,q=1,\cdots,l,p<q)$
	D_l	$\{\pm\mu_p\pm\mu_q\}$ $(p\neq q,p,q=1,\cdots,l)$	$\{\mu_p\pm\mu_q\}$ $(p<q,p,q=1,\cdots,l)$
例外代数	G_2	$\{\pm\mu_p,\mu_p-\mu_q\}$ $(p,q=1,2,3)$	$\{\mu_p,\mu_p-\mu_q\}$ $(p,q=1,2,3,p<q)$
	F_6	$\{\pm\mu_p,\pm\mu_p\pm\mu_q,\frac{1}{2}(+\mu_1\pm\mu_2\pm\mu_3\pm\mu_4)\}$ $(p,q=1,\cdots,4,p\neq q)$	$\{\mu_p,\mu_p\pm\mu_q,\frac{1}{2}(\mu_1\pm\mu_2\pm\mu_3\pm\mu_4)\}$ $(p,q=1,\cdots,4,)$
	E_7	$\{\mu_p-\mu_q,\mu_p+\mu_q+\mu_r+\mu_s\}$ $(p,q,r,s=1,\cdots,8;p\neq q)$	$\{\mu_p-\mu_q,\mu_p+\mu_q+\mu_r+\mu_s\}$ $(p,q,r,s=1,\cdots,8;p<q)$
	E_8	$\{\mu_p-\mu_q,\pm(\mu_p+\mu_q+\mu_r)\}$ $(p\neq q,p,q,r=1,\cdots,8,9)$	$\{\mu_p-\mu_q,\mu_p+\mu_q+\mu_r\}$ $(p,q,r=1,\cdots,9;p<q)$

例外代数的根分别用 A_2、B_4、A_7 和 A_8 的根表示. 对于 E_6 的特殊情况，其根用 A_1+A_5 的权表示

$$\Sigma=\{\mu_p-\mu_q,\ \pm\ \mu,\mu_p+\mu_q+\mu_r\pm\mu\}$$

其中 $p,q,r=1,\cdots,6,p\neq q,\mu_p(p=1,\cdots,6)$是 A_5 的初等表示的权，而$\pm\mu$ 则是 A_1 的初等表示的权. 正根集合 $\Sigma^+=\{\mu_p-\mu_q,2\mu,\mu_p+\mu_q+\mu_r+\lambda\},p<q,\quad p,q,r=1,\cdots,6.$

可以证明，所有李代数都有两个到三个基本表示，而任意不可约基本表示都可以利用初等表示的反对称化得到.

对于 B_l 代数，有一个初等表示 τ_1：$\overset{1}{\bigcirc}$——○…○══● 它包含 $l-1$ 个单纯根. 由它反对称化 $\tau_1^{[1^K]}\equiv\tau_K$，可以得到 $l-1$ 个不可约基本表示，因为 $K=1,\cdots,n-1$. 其权系为 $0,\pm\mu_1,\pm\mu_2,\cdots,\pm\mu_l$. 另一个初等表示是○——○…○══$\overset{1}{●}$，记为 σ，不能用 τ_1 反对称化得到. 其权系统是 $\frac{1}{2}(\pm\mu_1\pm\mu_2\pm\cdots\pm\mu_l)$，称为旋量表示.

对于 D_l 代数，有一个含 $l-2$ 个根的初等表示 τ_1，其反对称化可以构成 $\tau_K=\tau_1^{[1^K]}$，基本表示 $l-2$ 个. 此外有两个自同构旋量表示. $l=4$ 时三表示等价.

问　　题

1. 试利用基本表示$\overset{1}{\bigcirc}$——○的直积反对称化方法分解 $\overset{1}{\bigcirc}$——○⊗$\overset{1}{\bigcirc}$——○.

[提示：$\overset{1}{\bigcirc}$——○的三个权是 $(2\alpha+\beta)/3$，$-(\alpha-\beta)/3$，$-(\alpha+2\beta)/3$. 设相应的基矢是 ξ_1、ξ'_1，ξ_2、ξ'_2 与 ξ_3、ξ'_3. 直积表示的基矢为 $\{\xi_i\}\otimes\{\xi'_j\}(i,j=1,2,3)$. 对称化的基矢组及其相应的权为

$$\xi_1\cdot\xi'_1\longleftrightarrow(4\alpha+2\beta)/3,\qquad \xi_2\cdot\xi'_2\longleftrightarrow-(2\alpha-2\beta)/3,$$

$$\xi_3\cdot\xi'_3\longleftrightarrow-(2\alpha+4\beta)/3,$$

$$\xi_1\xi'_3+\xi'_3\xi_1\longleftrightarrow\frac{(2\alpha+\beta)}{3}+\left[\frac{-(\alpha+2\beta)}{3}\right]=\frac{\alpha-\beta}{3},$$

$$\xi_1\xi'_2+\xi'_2\xi_1\longleftrightarrow\frac{(2\alpha+\beta)}{3}+\left[\frac{-(\alpha-\beta)}{3}\right]=\frac{\alpha+2\beta}{3},$$

$$\xi_2\xi'_3+\xi_3\xi'_2\longleftrightarrow-(2\alpha+\beta)/3.$$

它们相应基本表示$\overset{2}{\bigcirc}$——○. 另一组基矢是反对称化的，

$$\xi_1\xi'_2 - \xi_2\xi'_1 \longleftrightarrow \alpha + 2\beta/3,$$
$$\xi_1\xi'_3 - \xi_3\xi'_1 \longleftrightarrow \alpha - \beta/3,$$
$$\xi_2\xi'_3 - \xi_3\xi'_2 \longleftrightarrow -2\alpha + \beta/3.$$

相应于基本表示○——$\overset{1}{○}$.]

2. 试证李群的两表示的直积表示的权系统为两表示的权系统之和.

[提示：两表示设为 $\mathscr{B}_1 \sim e^{\Sigma \alpha_{1i} X_{1i}}$，$\mathscr{B}_2 \sim e^{\Sigma \alpha_{2j} X_{2j}}$，则

$$\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \otimes \mathscr{B}_2 = e^{\Sigma \alpha_{1i} X_{1i}} \otimes e^{\Sigma \alpha_{2j} X_{2j}}$$

$$\Rightarrow \{X_k\} = \{\frac{\partial}{\partial \alpha_k}(e^{\Sigma \alpha_{1i} X_{1i}} \otimes e^{\Sigma \alpha_{2j} X_{2j}})\}_{\alpha=0}$$

$$= \{\sum_i X_{1i} E^{(1)} \otimes E^{(2)} + E^{(1)} \otimes E^{(2)} \sum X_{2j}\}$$

$$= \{\sum_i X_{1i} \otimes E^{(2)} + E^{(1)} \otimes \sum X_{2j}\},$$

表示 $\mathscr{B}$ 的本征矢

$$H_i = H_i^{(1)} \otimes E^{(2)} + E^{(1)} \otimes H_i^{(2)}.$$

令 $$H_i^{(1)} \xi_k^{(1)} = \Lambda_{1i}^{(k)} \xi_k^{(1)}, \quad H_i^{(2)} \xi_k^{(2)} = \Lambda_{2i}^{(k)} \xi_k^{(2)},$$

故有

$$\begin{aligned} H_i(\xi_k^{(1)} \otimes \xi_l^{(2)}) &= (H_i^{(1)} \otimes E^{(2)} + E^{(1)} \otimes H_i^{(2)})(\xi_k^{(1)} \otimes \xi_l^{(2)}) \\ &= H_i^{(1)} \xi_k^{(1)} \otimes E^{(2)} \xi_l^{(2)} + E^{(1)} \xi_k^{(1)} \otimes H_i^{(2)} \xi_l^{(2)} \\ &= \Lambda_{1i}^{(k)} \xi_k^{(1)} \otimes \xi_l^{(2)} + \Lambda_{2i}^{(l)} \xi_k^{(1)} \otimes \xi_l^{(2)} \\ &= (\Lambda_{1i}^{(k)} + \Lambda_{2i}^{(l)}) \xi_k^{(1)} \otimes \xi_l^{(2)} \equiv \Lambda_i^{(kl)} \xi_k^{(1)} \otimes \xi_l^{(2)}. \end{aligned}$$

即直积表示的权系统为两表示的权系统之和.]

3. 验证 A_l 代数的根系可用其权表示为

$$\sum = \{\mu_p - \mu_q\} \quad (p \neq q, p, q = 1, \cdots, l+1).$$

[提示： $\overset{\alpha_1}{○}$——$\overset{\alpha_2}{○}$——$\overset{\alpha_3}{○}$… $\overset{\alpha_{l-2}}{○}$——$\overset{\alpha_{l-1}}{○}$——$\overset{\alpha_l}{○}$

$$\frac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_i,\alpha_i)}=\frac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)}=\begin{cases}-1 & (i=j+1),\\ 0, & \\ 2, & \end{cases}$$

$$=2\delta_{ij}-\delta_{i,j+1}.$$

设初等表示的最高权为 μ_1，则

$\Delta_{\mathscr{B}}^{(0)}$：$\mu_1$，

$\Delta_{\mathscr{B}}^{(1)}$：$\mu_2=\mu_1-\alpha_1, \Lambda_{1\alpha_1}=0$，

$\Delta_{\mathscr{B}}^{(2)}$：$\mu_3=\mu_2-\alpha_2, \Lambda_{2\alpha_2}=-1, \Lambda_{2\alpha_2}=1$，

$\Delta_{\mathscr{B}}^{(3)}$：$\mu_4=\mu_3-\alpha_3, \Lambda_{3\alpha_1}=0, \Lambda_{3\alpha_2}=-1, \Lambda_{3\alpha_3}=1$，

……

设 $\Delta_{\mathscr{B}}^{(i-1)}$：$\mu_i=\mu_{i-1}-\alpha_{i-1}$，则对于 $\Delta_{\mathscr{B}}^{(i)}$ 先计算得

$$\Lambda_{i-1,\alpha_{i-1}}=1, \Lambda_{i-1,\alpha_{i-2}}=-1, \Lambda_{i-1,j}=0 \quad (i\neq i-1, i-2),$$

由此推得

$$\Lambda_{i,\alpha_{i-1}}=-1, \Lambda_{i\,\alpha_i}=1, \Lambda_{i\,\alpha_j}=0 \quad (j=i, i-1,),$$

就得 $\mu_{i+1}=\mu_1-\alpha_i$.]

4. 验证 C_3 代数的初等表示的权是

$$\mu_1=\alpha_1+\alpha_2+\frac{\alpha_3}{2}, \mu_2=\alpha_2+\frac{\alpha_3}{2}, \mu_3=\frac{\alpha_3}{2}.$$

[提示：$C_3\Rightarrow$ ●(1)——●═══○. 利用计算权系统标准方法.]

5. 验证如下不可约表示的直积分解

○(1)——○ ⊗ ○——○(2) ～ ○(1)——○(2) ⊕ ○——○(1)

～○═══●(2) ⊕ ○(1)═══●

○═══● ⊗ ○═══●

⊕○═══●(1) ⊕ ○═══●

6. 用标准基底表示二次卡塞米尔算子

$$C=g^{\rho\sigma}X_\rho X_\sigma=\sum_\alpha E_\alpha, E_{-\alpha}+g^{ik}H_iH_k,$$

试证

$$C|u_{\Lambda^{(1)}}\rangle=(\Lambda^{(1)},\Lambda^{(1)}+2g)|\mu_{\Lambda^{(1)}}\rangle,$$

其中 $\Lambda^{(1)}$ 为某不可约表示的最高权，$|u_{\Lambda^{(1)}}\rangle$ 为相应的本征矢，

$$g=\frac{1}{2}\sum_{\alpha^{+}\in\Sigma^{+}}\alpha^{+}.$$

[提示：由于 $\Lambda^{(1)}$ 为最高权，$E_\alpha|u_{\Lambda^{(1)}}\rangle=0$，$[E_\alpha,E_{-\alpha}]|u_{\Lambda^{(1)}}\rangle=E_{-\alpha}|u_{\Lambda^{(1)}}\rangle=0$，故

$$\begin{aligned}C|u_{\Lambda^{(1)}}\rangle&=g^{ik}\Lambda_i^{(1)}\Lambda_k^{(1)}+\sum_{\alpha\in\Sigma^{+}}[E_\alpha,E_{-\alpha}]|u_{\Lambda^{(1)}}\rangle\\&=\{(\Lambda^{(1)},\Lambda^{(1)})+\sum_{\alpha\in\Sigma^{+}}\alpha^iH_i\}|u_{\Lambda^{(1)}}\rangle\\&=\{(\Lambda^{(1)},\Lambda^{(1)})+\sum_{\alpha\in\Sigma^{+}}\alpha^i\Lambda_i^{(1)}\}|u_{\Lambda^{(1)}}\rangle\\&=\{(\Lambda^{(1)},\Lambda^{(1)})+(\Lambda^{(1)},2g)\}|\mu_{\Lambda^{(1)}}\rangle.\end{aligned}$$]

7. 验证对于 A_3 代数，基本表示的直积的反对称部分(1^2)为

$$\overset{1}{\bigcirc}\!-\!\!-\!\bigcirc\!-\!\!-\!\bigcirc\otimes\overset{1}{\bigcirc}\!-\!\!-\!\bigcirc\!-\!\!-\!\bigcirc\ \overset{[1^2]}{\sim}\ \bigcirc\!-\!\!-\!\overset{1}{\bigcirc}\!-\!\!-\!\bigcirc$$

而对称部分为

$$\overset{1}{\bigcirc}\!-\!\!-\!\bigcirc\!-\!\!-\!\bigcirc\otimes\overset{1}{\bigcirc}\!-\!\!-\!\bigcirc\!-\!\!-\!\bigcirc\ \overset{[2]}{\sim}\ \bigcirc\!-\!\!-\!\bigcirc\!-\!\!-\!\overset{1}{\bigcirc}.$$

并证明不可约表示$\overset{1}{\bigcirc}\!-\!\!-\!\bigcirc\!-\!\!-\!\bigcirc$的基矢量 ξ_1、ξ_2、ξ_3、ξ_4 可构成反对称与对称表示的基矢.

[提示：计算权系统，参阅问题 1.]

8. 试构造 A_1 代数，即 $su(2)$代数的不可约表示.

[提示：$l=1$，一个单纯根 α，$\Sigma^{+}=\alpha$，其不可约表示权图为

$$\underset{\alpha}{\overset{\Lambda_\alpha}{\bigcirc}}$$

其中 $\Lambda_\alpha=2(\Lambda^{(1)}\alpha)/(\alpha,\alpha)=2j$（$j$ 为半正整数，或非负整数），$g=\frac{1}{2}\Sigma^{+}=\alpha$，相应不可约表示的维数为

$$\dim\mathscr{B} = \prod_{\alpha\in\Sigma^+} \frac{(\Lambda^{(1)} + g, \alpha)}{(g, \alpha)} = \frac{(j + \frac{1}{2})(\alpha, \alpha)}{\frac{1}{2}(\alpha, \alpha)} = 2j + 1,$$

其中已令最高权为 $\Lambda^{(1)} = j\alpha$. 显见 $\Lambda^{(1)}$ 对应的 Λ_α 为非负整数. 令 α 与 $-\alpha$ 对应的本征矢为 $E\pm\alpha$. 包含 $\Lambda^{(1)}$ 的 α 权链为

$$\Lambda^{(1)} - \alpha, \Lambda^{(1)} - 2\alpha, \cdots, \Lambda^{(1)} - \Lambda_\alpha \cdot \alpha = \Lambda^{(1)} - 2j\alpha,$$

连同最高权 $\Lambda^{(1)} = j\alpha$, 得到 $\alpha j+1$ 权构成的权系统

$$\Delta_{\mathscr{B}} = \{j\alpha, (j-1)\alpha, \cdots, -(j-1)\alpha, -j\alpha\}.$$

由于所有权均为非简并的, 取基矢 $\{|j,m\rangle\}$, 其中 $m = j, j-1, \cdots, 0, \cdots, -(j-1), -j$, 且有

$$|\Lambda^{(1)}\rangle \equiv |j,j\rangle \rightarrow H_1|\Lambda^{(1)}\rangle = \Lambda^{(1)}|\Lambda^{(1)}\rangle,$$

$$H_1|j,m\rangle = \Lambda^{(m)}|j,m\rangle, \text{其中 } \Lambda^{(m)} = m,$$

$$E_{-\alpha}|j,m\rangle = |j,m-1\rangle, m \geqslant j.$$

后一式是考虑到

$$\begin{aligned} H_1 E_{-\alpha}|j,m\rangle &= \{[H_1, E_{-\alpha}] + E_{-\alpha}H_1\}|j,m\rangle \\ &= [-E_{-\alpha} + E_{-\alpha}(m\alpha)]|j,m\rangle \\ &= (m-1)E_{-\alpha}|j,m\rangle \\ &= \Lambda^{(m-1)}E_{-\alpha}|j,m\rangle, \end{aligned}$$

即 $E_{-\alpha}|j,m\rangle$ 为 H_1 的权为 $(m-1)\alpha$ 的本征矢, 即是 $|j,m-1\rangle$.

令 $H_1 = J_z, E_{\pm\alpha} = J_\pm = J_x \pm iJ_y$, 则有

$$[H_1, E_\alpha] = E_\alpha, [H_1, E_{-\alpha}] = -E_{-\alpha}, [E_\alpha, E_{-\alpha}] = \alpha H_1.$$

因此,

$$\begin{aligned} E_\alpha|j,m\rangle &= E_\alpha E_{-\alpha}|j,m+1\rangle \\ &= \{[E_\alpha, E_{-\alpha}] + E_{-\alpha}E_\alpha\}|j,m+1\rangle \\ &= [2H_1 + C^j_{m+1}]|j,m+1\rangle, \end{aligned}$$

其中已用到假设 $C^j_m|j,m+1\rangle = E_\alpha|j,m\rangle (m \leqslant j-1)$. 亦即

$$\begin{aligned} C^j_m|j,m+1\rangle &= [2H_1 + C^j_{m+1}]|j,m+1\rangle \\ &= [2(m+1) + C^j_{m+1}]|j,m+1\rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow C_m^j = C_{m+1}^j + 2(m+1) \quad (C_j^j = 0)$$

$$\Rightarrow C_{j-1}^j = 2j, C_{j-2}^j = 2j - 2(j-1), \cdots$$

$$C_m^j = j(j+1) - m(m+1) \quad (m = -j, \cdots, 0, \cdots, j),$$

$$E_\alpha |j,m\rangle = [j(j+1) - m(m+1)] |j, m+1\rangle.]$$

§8.5 不可约表示的标记方法与权的内积计算

不可约表示的表示方法除上节讲述的在邓金图上每个点都标记

$$\Lambda_{\alpha_i} = \frac{\alpha(\Lambda^{(1)}, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \qquad (i = 1, \cdots, l)$$

外，常常还利用初等表示的权来标记.

1. 初等表示权的标记法

设李群的 l 个基本表示为 Λ_{α_i}，则任一不可约表示可表示为

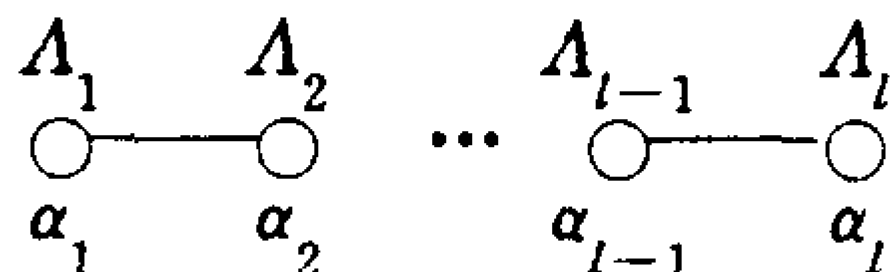
$$\Lambda^{(1)} = \sum_{i=1}^{l} n_i \Lambda_i^{(1)} \tag{8.64}$$

此式即(8.53)式，符号稍不同. 若用$\{\mu_i\}$表示初等表示的权，则上式可以等价写作

$$\Lambda^{(1)} = \sum_i l_i \mu_i. \tag{8.65}$$

显然利用数字集合$\{l_i\}$亦可表示不可约表示. 这种标记方法与卡当-魏尔方法一致.

例 1 A_l 代数不可约表示的标记为



将此图对应的最高权 $\Lambda^{(1)}$ 用单纯根 α 展开，则有 $\Lambda^{(1)} = \sum_i n_i \alpha_i$. 记 $\Lambda_{\alpha_i} = \Lambda_i = \alpha_i$，代到

$$
\begin{cases}
a_1 = \dfrac{\alpha(\Lambda^{(1)}, \alpha_1)}{(\alpha_1, \alpha_1)} = \dfrac{\alpha(\sum\limits_i n_i\alpha_i, \alpha_1)}{(\alpha_1, \alpha_1)} \\
\quad = \dfrac{2n_1(\alpha_1, \alpha_1)}{(\alpha_1, \alpha_1)} + \dfrac{2n_2(\alpha_2, \alpha_1)}{(\alpha_1, \alpha_1)} = 2n_1 - n_2, \\
a_2 = -n_1 + 2n_2 - n_3, \\
a_3 = -n_2 + 2n_3 - n_3, \\
\cdots\cdots \\
a_{l-1} = -n_{l-2} + 2n_{l-1} - n_l, \\
a_l = -n_{l-1} + 2n_l.
\end{cases}
\tag{8.66}
$$

反解之，得

$$
\begin{cases}
n_2 = 2n_1 - a_1, \\
n_3 = 3n_1 - \alpha a_1 - a_2, \\
\cdots\cdots \\
n_{l-1} = (l-1)n_1 - (l-2)a_1 - (l-3)a_2 \\
\qquad - \cdots - 2a_{l-3} - a_{l-2}, \\
n_l = ln_1 - (l-1)a_1 - (l-2)a_2 - \cdots - 2a_{l-2} - a_{l-1}.
\end{cases}
\tag{8.67}
$$

(8.67)式的最后两式代入到(8.66)式的最后一式，得

$$
(l+1)n_1 - la_1 - (l-1)a_2 - \cdots - 2a_{l-1} = a_l
$$

$$
\Rightarrow
\begin{cases}
n_1 = \dfrac{1}{l+1}[la_1 + (l-1)a_2 + \cdots + 2a_{l-1} + a_l], \\
n_2 = \dfrac{1}{l+1}[(l-1)a_1 + (l-2)a_2 + \cdots + 2a_l], \\
n_3 = \dfrac{1}{l+1}[(l-2)a_1 + (l-3)a_2 + \cdots + 3a_l], \\
\cdots\cdots \\
n_l = \dfrac{1}{l+1}[a_1 + 2a_2 + \cdots + la_l].
\end{cases}
\tag{8.68}
$$

对于 A_l 代数，根 α_i 可用权 $\{\mu_i\}$ 表示，即

$$\alpha_i = \mu_i - \mu_{i+1}.$$

$$\begin{aligned}\Lambda^{(1)} = \sum_{i=1}^{l} n_i\alpha_i &= n_1\mu_1 + (n_2 - n_1)\mu_2 + \cdots \\ &+ (n_l - n_{l-1})\mu_l - n_l\mu_{l+1} \\ &= l_1\mu_1 + l_2\mu_2 + \cdots + l_l\mu_l + l_{l+1}\mu_{l+1}.\end{aligned}$$

对比可得，

$$\begin{cases} l_1 = n_1 = \dfrac{1}{l+1}[la_1 + (l-1)a_2 + \cdots + la_l], \\ l_2 = l_2 - l_1 = \dfrac{1}{l+1}[-a_1 + (l-1)a_2 + \cdots + a_l], \\ \cdots\cdots \\ l_l = n_l - n_{l-1} = \dfrac{1}{l+1}[-a_1 - 2a_2 - \cdots - (l-1)a_{l-1} + a_l], \\ l_{l+1} = -n_l = \dfrac{1}{l+1}[a_1 + 2a_2 + \cdots + la_l]. \end{cases} \tag{8.69}$$

上式可以简单表示为

$$l_k = l_{l+1} + \sum_{i=k}^{n} a_i \quad (k = 1,2,\cdots,l),$$

$$l_{l+1} = \frac{-1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} ia_i.$$

我们注意，这里 $\{l_i\}$ 的取法，满足条件

$$\sum_{i=1}^{l+1} l_i = 0.$$

$\{l_i\}$ 当然可以表记不可约表示. 但 $\{l_i\}$ 中用到分数，为方便计，往往改而用 l 个整个 $l'_1,\cdots,l'_l$，其中

$$l'_i = \sum_{j=i}^{l} a_j.$$

显然，这样定义的 $\{l'_i\}$ 满足条件

$$l'_1 \geqslant l'_2 \geqslant \cdots \geqslant l'_n \geqslant 0.$$

令

$$N = \sum_{i=1}^{l} i a_i = \sum_{i=1}^{l} l'_i. \tag{8.70}$$

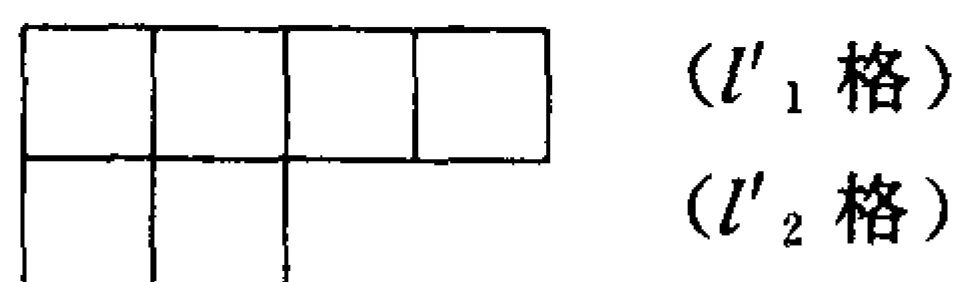
则正整数集合$\{l'_i\}$对应于整数 N 的一种配分，以后用$[l'_1, \cdots, l'_l]$标记，即给出一个 l 行的杨图. 这样的杨图与 A_l 代数，或 $SU(l+1)$群，或 $U(l+1)$群的不可约表示 一一对应. 对于 C_l、B_l 和 D_l 代数也可以进行类似记号变换，以标记相应的不可约表示. 在置换群一章，已有较详细叙述.

例 2 A_2 代数($SU(3)$群).

初等表示(0,1)：$\underset{\alpha_1}{\bigcirc}$ —— $\underset{\alpha_2}{\overset{1}{\bigcirc}}$，最高权 $\Lambda^{(1)} = \frac{1}{3}\alpha_1 + \frac{2}{3}\alpha_2$. 此时，$l'_2 = a_2 \equiv \Lambda_{\alpha_2} = 1, l'_1 = \Lambda_{\alpha_1} + \Lambda_{\alpha_2} \equiv a_1 + a_2 = 1$，即[1,1]不可约表示，相应杨图为.

初等表示(1,0)：$\underset{\alpha_1}{\overset{1}{\bigcirc}}$ —— $\underset{\alpha_2}{\bigcirc}$，最高权 $\Lambda^{(1)} = \frac{2}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2, \Lambda_{\alpha_1} = a_1 = 1, \Lambda_{\alpha_2} = a_2 = 0$. 此时 $l'_1 = a_1 + a_2 = 1, l'_2 = a_2 = 0$，即为[1,0]不可约表示，杨图是.

表示(a_1, a_2)：$\underset{\alpha_1}{\overset{a_1}{\bigcirc}}$ —— $\underset{\alpha_2}{\overset{a_2}{\bigcirc}}$，最高权 $\Lambda^{(1)} = \frac{1}{3}(2a_1 + a_2)\alpha_1 + \frac{1}{3}(a_1 + 2a_2)\alpha_2, l'_1 = a_1 + a_2, l'_2 = a_2$，此时 $N = l'_1 + l'_2 = a_1 + 2a_2$，即$[l'_1, l'_2]$不可约表示的杨图



$$\Sigma^+ = [\alpha_1, \alpha_2, (\alpha_1 + \alpha_2)], g = \frac{1}{\alpha} \sum_{\alpha \in \Sigma^+} \alpha = \alpha_1 + \alpha_2,$$

代入维数公式

$$\dim(\mathscr{B}) = \prod_{\alpha\in\Sigma^+} \frac{(\Lambda^{(1)} + g,\alpha)}{(g,\alpha)}$$

$$= \frac{1}{\alpha}(a_1 + 1)(a_2 + 1)(a_1 + a_2 + 2),$$

其中 $$\Lambda^{(1)} + g = \frac{1}{3}(2a_1 + a_2 + 3)\alpha_1 + \frac{1}{3}(a_1 + 2a_2 + 3)\alpha_3,$$

$$(\alpha_1,\alpha_1) = (\alpha_2,\alpha_2) = 1, (\alpha_1,\alpha_2) = (\alpha_2,\alpha_1) = -\frac{1}{2}.$$

标记不可约表示还有一种方法，就是利用卡塞米尔(Casimir)算子的性质. 卡氏算子在任一表示 $\mathscr{B}$ 中对应的矩阵与所有代数的元素$\{H_i,E_\alpha\}$对应的矩阵均对易. 按舒尔引理，卡氏算子应为常数矩阵. 相应常数即为卡氏算子在该表示中的本征值. l 秩李代数有 l 个独立的卡氏算子. 换言之，在任一不可约表示中，所有卡氏算子给出 l 个本征值，可以任一地刻画该不可约表示.

必须强调指出，此类标记法与表示的最高权关系甚为密切，请参阅上节问题第 6 题，即二次卡氏算子作用在最高权 $\Lambda^{(1)}$的本征矢上，有

$$C|u_\Lambda\rangle = (\Lambda^{(1)},\Lambda^{(1)} + 2g)|u_\Lambda\rangle, \tag{8.71}$$

其中 $g = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Sigma^+}\alpha$. 但是由(8.62)和本节问题 1，可见

$$\Lambda^{(1)} = \sum_i l_i\mu_i, \qquad g = \sum_i g_i\mu_i, \tag{8.72}$$

其中$\{\mu_i\}$为初等表示的权，应有

$$C|u_\Lambda\rangle = \sum_{i,j} l_i(l_j + 2g_j)(\mu_i,\mu_j)|u_\Lambda\rangle. \tag{8.73}$$

可见要得到卡氏算子的本征值，需要计算权的内积. 至于$\{l_i\}$与$\{g_i\}$，我们将计算的结果，放在下面，以备读者选用.

A_l: $g_i = \frac{l}{2} - i + 1 \ (i = 1,\cdots,l+1)$.

B_l: $l_k = \frac{a_l}{2} + \sum_{i=k}^{l-1} a_i (k = 1,\cdots,l-1), l_l = \frac{a_l}{2}$;

$$g_i=l-i+\frac{1}{2}.$$

$$C_l:\ l_k=\sum_{i=k}^{l}a_i,\quad (k=1,2,\cdots,l-1);$$
$$g_i=l-i+1.$$

$$D_l:\ l_k=\frac{a_{l-1}+a_l}{2}+\sum_{i=k}^{l-2}a_i\quad (k=1,\cdots,l-1),$$
$$l_l=a_l-a_{l-1}/2;\ g_i=l-i.$$

例外代数或群，

$$G_2:\ l_1=a_1-\frac{a_2}{3},\ l_2=\frac{a_2}{3},\ l_3=-a_1-\frac{2a_2}{3};$$
$$g_1=\frac{4}{3},\ g_2=\frac{1}{3},\ g_3=-\frac{5}{3}.$$

$$F_4:\ l_1=a_1+2a_2+\frac{3}{\alpha}a_3+a_4,\ l_2=a_1+a_2+\frac{a_3}{2},$$
$$l_3=a_2+\frac{a_3}{2},\ l_4=\frac{a_3}{2};$$
$$g_1=\frac{11}{5},\ g_2=\frac{5}{2},\ g_3=\frac{3}{2},\ g_4=\frac{1}{2}.$$

$$E_6:\ l_k=l_6+\sum_{i=k}^{5}a_i\quad (k=1,2,3,4,5),$$
$$l_6=-\sum_{i=1}^{5}\frac{ia_i}{6};$$

（注：对应 $\Lambda^{(1)}=\sum_{i=1}^{6}l_i\mu_i+l\mu,\ l=a_1+2a_2+3a_3+2a_4+a_5+2a_6$）

$$g_i=21-\frac{6i}{6}\ (i=1,\cdots,5),\ g_6=-\frac{5}{6},\ g=20.$$

$$E_7:\ l_k=l_7+\sum_{i=k}^{6}a_i\quad (k=1,\cdots,6),$$
$$l_7=a_7-a_4-2a_5-\frac{3a_6}{4},$$
$$l_8=-(a_1+2a_2+3a_3)-\frac{9a_4+6a_5+3a_6+7a_7}{4};$$

$$g_i=\frac{23-4i}{4}(i=1,\cdots,7),\ g=-\frac{49}{4}.$$

$$E_8: l_k = l_8 + \sum_{i=k}^{7} a_i \quad (k = 1,\cdots,7),$$

$$l_8=\frac{a_8-2a_7-a_6}{3},$$

$$l_9=-\frac{3a_1+6a_2+9a_3+12a_4+15a_5+10a_6+5a_7+8a_8}{3};$$

$$g_i=\frac{22-3i}{3} \quad (i=1,\cdots,8), \quad g=-68/3.$$

例 3　$B_1(SO(3)$群)代数,$l=1$.

此时 1 个卡氏算子

$$C = J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 = J_z^2 + J_+^2 + J_-^2,$$

其中 $J_\pm=\frac{1}{\sqrt{2}}(J_x\pm \mathrm{i}J_y)^2$,相当于通常记号 $E_{\pm\alpha}$,J_z 相当于 H_1. 设 J^2 与 J_z 的共同本征态为 $|j,m\rangle$,在量子力学中已知

$$\begin{cases} J^2|j,m\rangle=j(j+1)|j,m\rangle, \\ J_z|j,m\rangle=m|j,m\rangle, \end{cases} \tag{8.74}$$

其中 j 可以是正整数,相应忠实表示(张量表示),也可以是半整数,相应旋量表示. $m=-j,-j+1,\cdots,0,j-1,j$,可以区别$SO(3)$群中不可约酉表示$\{\Gamma^j\}$中不同的权矢量. 算子 $J_\pm$具有把 m 的数值升高或降低 1 的作用,即把属于同一酉表示中的权矢量变为$(m\pm1)$的权矢量:

$$J_\pm\ |j,m\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{j(j+1)-m(m+1)}\,|j,m\pm 1\rangle. \tag{8.75}$$

在方程(8.73)和(8.74)式中,作置换

$$j \to -(j+1), \quad m \to m, \tag{8.76}$$

方程保持不变,这给出与$\{P^{(j)}\}$等价的另一个表示$\{\Gamma^{[-(j+1)]}\}$. 由于 $SO(3)$群或 B_1 代数是紧致群或代数,其不可约酉表示唯一地由其卡氏算子 J^2 的本征值 j 所确定. 表示的维数$=2j+1$,均为有限

维. 当然 $SO(3)$群或 B_1 代数还有无限维表示，这些表示都是非酉表示的. 但有关内容不属于我们讨论的范围. 图 8.5 就是 $SO(3)$群的酉表示的权图. 与忠实表示相应的权图中用黑圆点表示，与旋量表示相关的权用黑方块表示. 权是有规律的离散分布的谱.

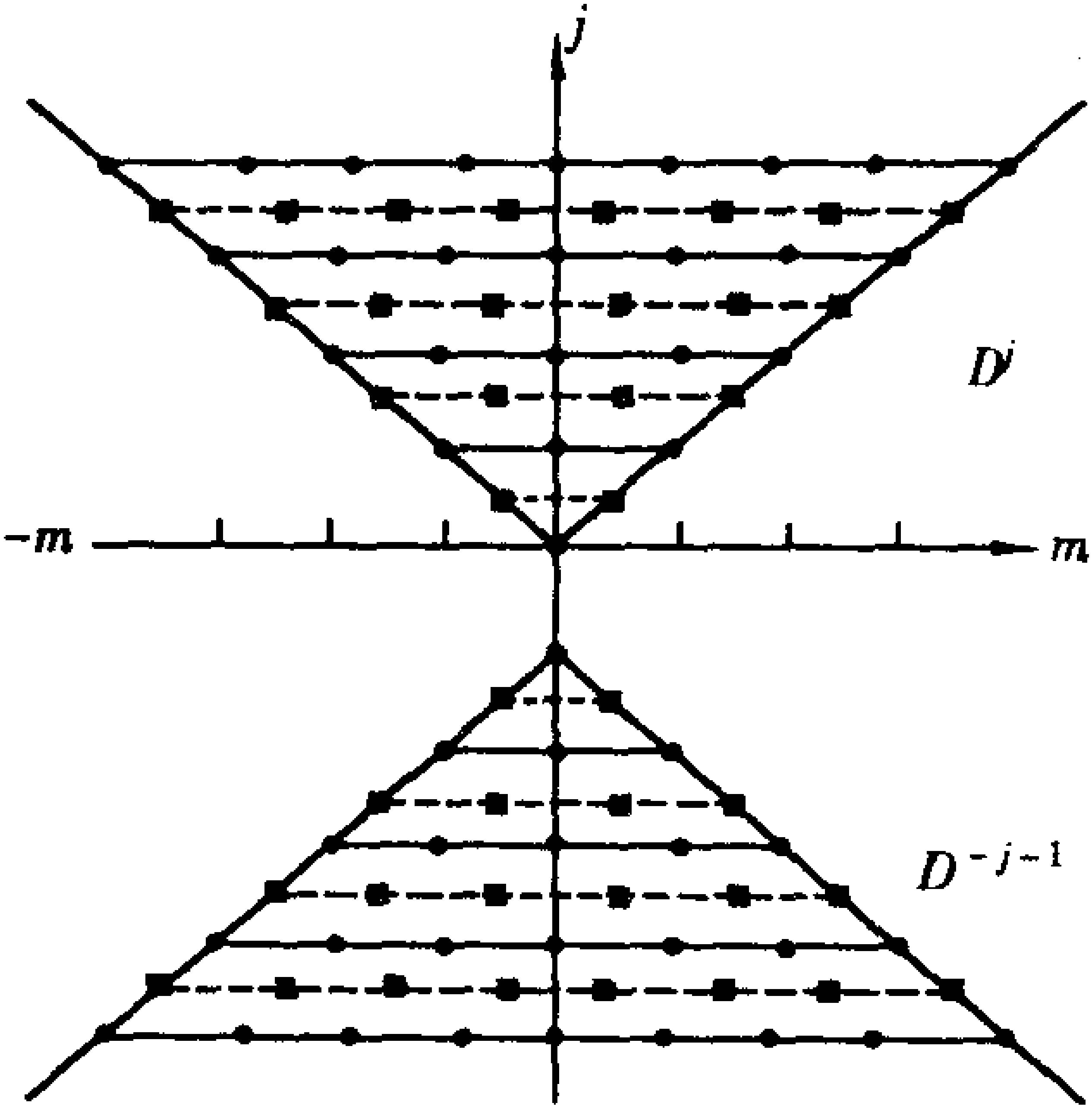


图 8.5 $SO(3)$的酉表示的权

与忠实表示相关的权用黑圆点表示，并用实线加以连接

与旋量表示相关的权用黑方块表示，而用虚线加以连接

业已证明，秩为 l 的半单纯李群或相应李代数，具有 l 个独立的卡氏算子. 这里的卡氏算子当然指广义卡氏算子，

$$I_n = C^{\beta_2}_{\alpha_1\beta_1} C^{\beta_3}_{\alpha_2\beta_2} \cdots C^{\beta_1}_{\alpha_n\beta_n} X^{\alpha_1} X^{\alpha_2} \cdots X^{\alpha_n}, \tag{8.77}$$

其中 $I_0 = I_1 = 0$，即零算子，$I_2 = g_{\alpha_1\alpha_2} X^{\alpha_1} X^{\alpha_2} \sim C$. 但(8.76)式定义的 I_n 并不都是独立的.

例 4 $SO(3)$的 I_3.

$$\begin{aligned} I_3 &= X_1X_2X_3 - X_1X_3X_2 + X_2X_3X_1 - X_2X_1X_3 \\ &\quad + X_3X_1X_2 - X_3X_2X_1 \\ &= X_1[X_2, X_3] + X_2[X_3, X_1] + X_3[X_1, X_2] \\ &= X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \propto I_2. \end{aligned}$$

独立的 I_n 是：

A_l: $I_2, I_3, \cdots, I_{l+1}$;

B_l: $I_2, I_4, \cdots, I_{2l}$;

C_l: $I_2, I_4, \cdots, I_{2l}$;

D_l: $I_2, I_4, \cdots, I_{2l-2}, I_l$;

G_2: I_2, I_6;

F_4: I_2, I_6, I_8, I_{12};

E_6: $I_2, I_5, I_6, I_8, I_9, I_{12}$;

E_7: $I_2, I_6, I_8, I_{10}, I_{12}, I_{14}, I_{18}$;

E_8: $I_2, I_8, I_{12}, I_{14}, I_{18}, I_{20}, I_{24}, I_{30}$.

计算这些本征值的谱是颇为复杂的问题.有兴趣的读者应在有关专著中找到具体介绍.

2. 权的内积的计算

无论是利用初等表示的直积反对称化方法构成基本表示的完全集，或是确定李代数或李群的不可约表示的维数，都需要计算初等表示的权的内积.因为我们已经用初等表示的权$\{\mu_i\}$表示所有李代数的根，所以权的内积的计算，对于确定李代数的结构，无疑具有重要意义.

例 5 $B_l(SO(2l+1)$群)代数.

α_1 ○—○ α_2 $\cdots$ α_{l-2} ○—○ α_{l-1} ● α_l

其中$\forall\ \alpha_k \in \Pi$，可用初等表示的权$\{\mu_i\}$表示，

$$\begin{cases} \alpha_k = \mu_{k+1} - \mu_k \qquad (k = 1, \cdots, l-1), \\ \alpha_l = \mu_l. \end{cases} \tag{8.78}$$

将(8.78)式中诸式相加，得到

$$\mu_1 = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i, \quad \mu_2 = \mu_1 - \alpha_1 = \sum_{i=2}^{l} \alpha_i, \quad \cdots,$$

$$\mu_{l-1} = \alpha_{l-1} + \alpha_l, \quad \mu_l = \alpha_l.$$

可归纳为

$$\mu_i = \sum_{i=k}^{l} \alpha_k. \tag{8.79}$$

设 $i>j$，则有

$$\begin{aligned}
(\mu_i,\mu_j) &= \sum_{k=i}^{l}\sum_{k'=j}^{l}(\alpha_k,\alpha_k') \\
&= \sum_{k=i}^{l-2}\sum_{k'=j}^{l}(\alpha_k,\alpha_k') + \sum_{k'=j}^{l}(\alpha_{l-1},\alpha_{k'}) + \sum_{k'=j}^{l}(\alpha_l,\alpha_k) \\
&= \sum_{k=i}^{l-2}[(\alpha_k,\alpha_{k-1}) + (\alpha_k,\alpha_k) + (\alpha_k,\alpha_{k+1})] \\
&\quad + [(\alpha_{l-1},\alpha_{l-2}) + (\alpha_{l-1},\alpha_{l-1}) + (\alpha_{l-1},\alpha_l)] \\
&\quad + [(\alpha_l,\alpha_{l-1}) + (\alpha_l,\alpha_l)].
\end{aligned}$$

注意到，

$$\begin{cases}
(\alpha_k,\alpha_{k-1}) = -\dfrac{1}{2}(\alpha_k,\alpha_k) = (\alpha_k,\alpha_{k+1}) \qquad (k \neq l), \\
(\alpha_l,\alpha_{l-1}) = -(\alpha_l,\alpha_l) = -\dfrac{1}{2}(\alpha_{l-1},\alpha_l),
\end{cases} \tag{8.80}$$

上式变为

$$\begin{aligned}
(\mu_i,\mu_j) &= \sum_{k=i}^{l-2}[-\frac{1}{2}(\alpha_k,\alpha_k) + (\alpha_k,\alpha_k) - \frac{1}{2}(\alpha_k,\alpha_k)] \\
&\quad + [-\frac{1}{\alpha}(\alpha_{l-1},\alpha_{l-1}) + (\alpha_{l-1},\alpha_{l-1}) - \frac{1}{2}(\alpha_{l-1},\alpha_{l-1})] \\
&\quad + [-(\alpha_l,\alpha_l) + (\alpha_l,\alpha_l)] = 0.
\end{aligned}$$

同样可证，当 $j<i$ 时，$(\mu_i,\mu_j)=0$. 综合以上结果，当 $i\neq j$ 时，有

$$(\mu_i,\mu_j) \neq 0. \tag{8.81}$$

再计算当 $i\neq j$ 时，

$$\begin{aligned}
(\mu_i,\mu_j) = (\mu_i,\mu_i) &= \sum_{k=i}^{l}\sum_{k'=1}^{l}(\alpha_k,\alpha_{k'}) \\
&= \sum_{k'=i}^{l}(\alpha_i,\alpha_{k'}) + \sum_{k=i+1}^{l}\sum_{k'=i}^{l}(\alpha_k,\alpha_{k'})
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k'=i}^{l} (\alpha_i, \alpha_{k'}) = (\alpha_i, \alpha_i) + (\alpha_i, \alpha_{i+1})$$

$$= [(\alpha_i, \alpha_{i-1}) + (\alpha_i, \alpha_i) + (\alpha_i, \alpha_{i+1})] - (\alpha_i, \alpha_{i-1})$$

$$= -(\alpha_i, \alpha_{i-1}) = -\frac{1}{\alpha}(\alpha_{i-1}, \alpha_{i-1}) \quad (i = 2, \cdots, l)$$

$$= (\alpha_l, \alpha_l). \tag{8.82}$$

就是说,我们有

$$(\mu_i, \mu_i) = (\alpha_l, \alpha_l) \equiv K. \tag{8.83}$$

综合(8.81)与(8.83)式,得到

$$(\mu_i, \mu_j) = K\delta_{ij} \quad (i, j = 1, \cdots, l). \tag{8.84}$$

C_l、D_l 与 F_4 均有与(8.81)式类似的关系式.一般说来,不同的李群 K 值不同,以 B_l 为例,由(8.82)式,可知

$$K = \frac{1}{2}(\alpha_i, \alpha_i) = (\alpha_l, \alpha_l) \quad (i = 1, \cdots, l-1).$$

此时其基林形式

$$g_{ij} = \sum_{\alpha \in \Sigma} \alpha_i \alpha_j = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \cdots, l) \tag{8.85}$$

由此得

$$\sum_{i=1}^{l} g_{ii} = \sum_{\alpha \in \Sigma} \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \alpha_i,$$

亦即

$$\sum_{\alpha \in \Sigma} (\alpha, \alpha) = l. \tag{8.86}$$

即是说,基林形式的 H_i 部分(卡当子代数)的维数等于单纯根的个数,或李代群的秩.

在 B_l 的根系中,零根 l 个.短根 $\pm e_i (i=1, \cdots, l)$, $2l$ 个,长根 $\pm e_i \pm e_j (i \neq j)$,个数为 $4C_l^2 = 2l(l-1)$,因此,

$$\sum_{\alpha \in \Sigma} (\alpha, \alpha) = 2l(l-1)(\alpha_1, \alpha_2) + 2l(\alpha_l, \alpha_l)$$

$$= [4l(l-1) + 2l](\alpha_l, \alpha_l)$$

$$= 2l(2l-1)(\alpha_l, \alpha_l)$$

$$= 2l(2l-1)K. \tag{8.87}$$

比较(8.86)式与(8.87)式即得

$$K = \frac{1}{2l(2l-1)}. \tag{8.88}$$

对于其它李代数，类似的计算结果见表 8.3.

表 8.3 其它李代数 K 值表

李代数符号	K 值	李代数符号	K 值
A_l	$1/2(l+1)^2$	F_4	1/18
C_n	$1/4(l+1)$	E_6	1/144
D_l	$1/4(l-1)$	E_7	1/288
G_2	1/24	E_8	1/540

李代数不可约表示 $\mathscr{B}$ 的维数我们已经知道是

$$\dim\mathscr{B} = \prod_{\alpha\in\Sigma^+} (\Lambda^{(1)} + g,\alpha)/(g,\alpha), \tag{8.89}$$

其中 $g = \frac{1}{\alpha}\sum_{\alpha\in\Sigma^+}\alpha$. 计算中往往需要相应的 K 值和展开式 $\sum g_i\lambda_i = g$. 我们已给出全部 $\{g_i\}$ 与 K 值，因而会大大方便维数的计算.

问　题

1. 试验证 A_l 代数的展开式 $g = \sum_{i=1}^{l+1} g_i\mu_i$ 中，$g_i = l/2 - i + 1$ $(i = 1, \cdots, l+1)$.

[提示：

$$g = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Sigma^+}\alpha = \frac{1}{2}\sum_{K=1}^{l+1}\sum_{j=1}^{K-1}\mu_j\mu_K$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{K=2}^{l+1}\sum_{j=1}^{K-1}\mu_K + \frac{1}{2}\sum_{K=1}^{l+1}\sum_{j=1}^{K-1}\mu_j$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{K=2}^{l+1}(K-1)\mu_K+\frac{1}{2}\sum_{K=2}^{l+1}\sum_{j=1}^{K-1}\mu_j$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{K=2}^{l+1}(K-1)\mu_K+\frac{1}{2}\{\sum_{j=1}^{1}\mu_j+\sum_{j=1}^{2}\mu_j+\cdots+\sum_{j=1}^{l}\mu_j\}$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{K=2}^{l+1}(K-1)\mu_K+\frac{1}{2}\sum_{K=1}^{l}(l-K+1)\mu_K$$

$$=\frac{l}{2}\mu_1+\frac{1}{2}\sum_{K=2}^{l}[(l-K+1)-(K-1)]\mu_K-\frac{l}{2}\mu_{l+1}$$

$$=\frac{l}{2}\mu_1+\sum_{K=2}^{l}[\frac{l}{2}-K+1]\mu_K-\frac{l}{2}\mu_{l+1}$$

$$=\sum_{K=1}^{l+1}[\frac{l}{2}-K+1]\mu_K\Rightarrow g_i=\frac{l}{2}-i+1.$$

注意 $\sum_{i=1}^{l+1}g_i=0.$]

2. 证明,对于李群 $SU(l+1)$(A_l 代数,有 $\forall\ \alpha\in\Pi$,

$$g_\alpha\equiv\frac{\alpha(g,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}=1. \tag{8.90}$$

[提示:

$$g=\frac{1}{2}\sum_{j<K}(\mu_j-\mu_K)=\frac{1}{2}\sum_{K=2}^{l+1}\sum_{j=1}^{K-1}(\mu_j-\mu_K)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{K=2}^{l+1}\sum_{j=1}^{K-1}[(\mu_j-\mu_{j+1})+(\mu_{j+1}-\mu_{j+2})+\cdots+(\mu_{K-1}-\mu_K)]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{K=2}^{l+1}\sum_{j=1}^{K-1}(\alpha_j+\alpha_{j+1}+\cdots+\alpha_{K-1})$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{K=2}^{l+1}[\alpha_{K-1}+(\alpha_{K-1}+\alpha_{K-2})+\cdots+(\alpha_{K-1}+\cdots+\alpha_3+\alpha_2)+(\alpha_{K-1}+\cdots+\alpha_2+\alpha_1)]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{K=2}^{l+1}\sum_{j=1}^{l-1}j\alpha_j=\frac{1}{2}\{\sum_{j=1}^{1}j\alpha_j+\cdots+\sum_{j=1}^{l}j\alpha_j\}$$

$$= \frac{1}{2}\{l\alpha_1 + 2(l-1)\alpha_2 + \cdots + l[l-(l-1)]\alpha_l\}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{l} j(l-j+1)\alpha_j,$$

$$g_{\alpha_i} = \frac{2(g,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)} = \sum_{j=1}^{l} j(l-j+1)\frac{(\alpha_j,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{l} j(l-j+1)A_{ij} \quad (\text{卡当矩阵元})$$

$$= \frac{1}{2}[(i-1)(l-i+2)A_{i,i-1} + i(l-i+1)A_{ii}$$

$$+ (i+1)(l-i)A_{i,i+1}].$$

对于 A_l，$A_{ii}=2$，$A_{i,i\pm1}=-1$，代入上式，得

$$g_{\alpha_i} = \frac{1}{2}[-(i-1)(l-i+2) + 2i(l-i+1)$$

$$-(i+1)(l-i)] = 1.\ ]$$

3.　计算 B_l 的不可约表示的维度公式.

[提示：B_l 的正根：μ_i，$\mu_i-\mu_j$（$i,j=1,\cdots,l,i>j$）

$$\prod_{\alpha\in\Sigma^+}(g,\alpha) = \prod_i (g,\mu_i)\prod_{i<j}(g,\mu_i-\mu_j)\prod_{i,j}(g,\mu_i+\mu_j)$$

$$= \prod_i\Big[\sum_{k=1}^{l} g_k(\mu_k,\mu_i)\Big]\prod_{i<j}\Big[\sum_{k=1}^{l} g_k(\mu_k,\mu_i-\mu_j)\Big]$$

$$\cdot\prod_{i<j}\Big[\sum_{k=1}^{l} g_k(\mu_k,\mu_i+\mu_j)\Big].$$

注意，

$$(\mu_i,\mu_j) = K\delta_{ij}(i,j=1,\cdots,l),$$

故上式化为

$$\prod_{\alpha\in\Sigma^+}(g,\alpha) = \prod_i (Kg_i)\prod_{i<j}K(g_i-g_j)\prod_{i<j}K(g_i+g_j). \tag{8.91}$$

令 $m_i=l_i+g_i$，同样有

$$\prod_{\alpha\in\Sigma^+}(\Lambda^{(1)}+g,\alpha)=\prod_i Kg_i\prod_{i<j}K(m_i-m_j)\prod_{i<j}K(g_i+g_j),$$

(8.92)

将(8.91)式与(8.92)式代入维度公式

$$\dim\mathscr{B}(B_l)=\prod_{\alpha\in\Sigma^+}\frac{(\Lambda^{(1)}+g,\alpha)}{(g,\alpha)}$$

$$=\prod_{i=1}^{l}\left(\frac{m_i}{g_i}\right)\prod_{i<j}\frac{(m_i-m_j)}{(g_i-g_j)}.$$

又及：C_l 的维度公式是相同的. 同样易得 A_l 的维度公式是

$$\dim\mathscr{B}(A_l)=\prod_{i<j}(m_i-m_j)/(g_i-g_j).\,]. \quad (8.93)$$

*4. 验证 D_e、G_2、F_4、E_6、E_7、E_8 的不可约表示的维度公式是

(1) D_e

$$\dim(\mathscr{B})=\prod_{i<j}\frac{(m_i-m_j)}{(g_i-g_j)}\cdot\frac{(m_i+m_j)}{(g_i+g_j)}. \quad (8.94)$$

(2) G_2

$$\dim(\mathscr{B})=\prod_{i=1}^{3}\left(\frac{m_i}{g_i}\right)\prod_{i<j}\left(\frac{m_i-m_j}{m_i+m_j}\right). \quad (8.95)$$

(3) F_4

$$\dim(\mathscr{B})=\prod_{i=1}^{4}\left(\frac{m_i}{g_i}\right)\prod_{i<j}\left(\frac{m_i-m_j}{m_i+m_j}\right)\prod\left(\frac{m_1\pm m_2\pm m_3\pm m_4}{g_1\pm g_2\pm g_3\pm g_4}\right).$$

(8.96)

(4) E_6

$$\dim(\mathscr{B})=\frac{m}{g}\prod_{i<j}\left(\frac{m_i-m_j}{m_i+m_j}\right)\prod\left(\frac{m_i+m_j+m_k+m/2}{g_i+g_j+g_k+g/2}\right).$$

(8.97)

(5) E_7

$$\dim(\mathscr{B})=\prod_{i<j}\left(\frac{m_i-m_j}{m_i+m_j}\right)\prod\frac{(m_i+m_j+m_k+m_l)}{(g_i+g_j+g_k+g_l)}.$$

(8.98)

(6) E_8

$$\dim\mathscr{B} = \prod_{i<j}\left(\frac{m_i - m_j}{m_i + m_j}\right)\prod\frac{m_i + m_j + m_k}{g_i + g_j + g_k}. \qquad (8.99)$$

*5. 计算二次卡氏算子对于最高权 $\Lambda^{(1)}$ 的本征态的本征值

$$(\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(1)} + 2g) = \sum_{i,j} l_i(l_i + 2g_j l_j)(\lambda_i, \lambda_j), \quad (8.100)$$

分别对 A_l、B_l、C_l、D_l 及 G_2、F_4、E_6、E_7 和 E_8 进行计算.

(答案,将前得到的 g_i 与 K 值代入(8.100)式,即得如下答案:

代数符号	本征值
A_l	$\sum_{i=1}^{l+1}\frac{l_i(l_i - 2i)}{2(l+1)}$
B_l	$\sum_{i=1}^{l}\frac{l_i(l_i + 2l - 2i + 1)}{2(2l+1)}$
C_l	$\sum_{i=1}^{l}\frac{l_i(l_i + 2l - 2i + 1)}{2l(2l+1)}$
D_l	$\sum_{i=1}^{l}\frac{l_i(l_i + 2l - 2i)}{4l(l-1)}$
G_2	$\frac{1}{24}[l_1(3l_1 + 8) + l_2(3l_2 + 2) + l_3(3l_3 - 10)]$
F_4	$\frac{1}{18}[l_1(l_1 + 11) + l_2(l_2 + 5) + l_3(l_3 + 3) + l_4(l_4 - 1)]$
E_6	$\frac{1}{46}[l(l + 22) + 2\sum_{i=1}^{6} l_i(l_i - 2i)]$
E_7	$\frac{1}{36}[\sum_{i=1}^{8} l_i(l_i - 2i) - 20l_8]$
E_8	$\frac{1}{460}[\sum_{i=1}^{9} l_i(l_i - 2i) - 42l_9]$)

6. 证明,对于代数 A_l、G_2、E_7 和 E_8 有

$$\begin{cases}(\mu_i,\mu_i) = n\,K \quad (i = 1,\cdots,l+1),\\ (\mu_i,\mu_j) = -\,K \quad (i \neq j).\end{cases} \tag{8.101}$$

[提示：由 $\sum_{i=1}^{l+1}\mu_i = 0 \Rightarrow \mu_{l+1} = -\sum_{i=1}^{l}\mu_i$. 又

$\alpha_i = \mu_i - \mu_{i+1}(i = 1,\cdots,l) \Rightarrow \sum_{i=1}^{l} = \mu_l - \mu_{l+1},\cdots,\sum_{i=l-1}^{l}\alpha_i + \mu_{l+1} =$

$\mu_{i-1},\alpha_l + \mu_{l+1} = \mu_l \Rightarrow$（诸式相加）$\sum_{i=1}^{l}\mu_i - l\mu_{l+1} = \sum_{i=1}^{l} i\alpha_i \Rightarrow (l +$

$1)\sum_{i=1}^{l}\mu_i = \sum_{i=1}^{l} i\alpha_i = -(l+1)\mu_{l+1}$.

因此，

$$\begin{aligned}(\mu_i,\mu_i) &= (\sum_{k=i}^{l}\alpha_k - \mu_{l+1},\sum_{k'=i}^{l}\alpha_{k'} - \mu_{l+1})\\ &= \sum_{k=k'=i}^{l}(\alpha_k,\alpha_{k'}) + (\mu_{l+1},\mu_{l+1}) - 2\sum_{k=i}^{l}(\alpha_k - \mu_{l+1})\\ &= \sum_{k,k'=i}^{l}(\alpha_k,\alpha_{k'}) + \frac{1}{(l+1)^2}\sum_{k,k'=1}^{l}(k\alpha_k,k'\alpha_{k'})\\ &\quad + \frac{2}{(l+1)}\sum_{k=i}^{l}\sum_{k'=1}^{l}(\alpha_k,k'\alpha_{k'}) = \cdots = K,\end{aligned}$$

$$(\mu_i,\mu_j) = -K(i \neq j),$$

其中 $K=(\alpha_1,\alpha_1)$.]

7. 证明，对于代数 E_6，有

$$\begin{cases}(\mu_i,\mu_i) = 6\ 个 (l = 1,2,\cdots,6),\\ (\mu_i,\mu_j) = 1\ 个 (i \neq j),\\ (\mu_i,\mu) = 0(i = 1,\cdots,6,\mu\ 为另一子代数\ A_1\ 的初等表示的权),\\ (\mu,\mu) = 3K.\end{cases} \tag{8.102}$$

[提示：对于 $(\mu_i,\mu_j)=-K\delta_{ij}(i\neq j \quad i,j=1,\cdots,6)$，利用 A_l 代数的

性质，现在$l=5$，$\sum_{i=1}^{l+1}\mu_i=0$．

对于 $\mu(\mu=2\alpha'_1+\alpha'_2)$，它是 A_1 的初等表示的权，表示的维数为 $2\mu+1$，有$(\mu,\mu)=3K$.]

8. 对于 E_6，若有

$$h_1=\sum_{i=1}^{6}b_i\mu_i+b\mu,\quad h_2=\sum_{i=1}^{6}c_i\mu_i+c\mu,$$

则
$$(h_1,h_2)=3Kbc+6K\sum_{i=1}^{6}b_ic_i-K[\sum_{i=1}^{6}b_ic_i].$$

[提示：$(b\mu,c\mu)=bc(\mu,\mu)=3Kbc$，

$$\begin{aligned}(\sum_{i=1}^{6}b_i\mu_i,\sum_{j=1}^{6}c_j\mu_j)&=\sum_{i=1}^{6}b_i\sum_{j=1}^{6}c_j(\mu_i,\mu_j)\\&=\sum_{i}^{6}b_i\sum_{j=1(i\neq j)}^{6}c_j(-K\delta_{ij})+\sum_{i=1}^{l}b_ic_i(6K)\\&=-K[\sum_{i=1}^{6}b_i\sum_{i=1}^{6}c_i]+6K\sum_{i=1}^{6}b_ic_i,\end{aligned}$$

$$(\sum_{i=1}^{6}b_i\mu_i,c\mu)=\sum_{i=1}^{6}b_ic(\mu_i,\mu)=0,$$

$$(\sum_{i=1}^{6}b\mu,\sum_{i=1}^{6}c_i\mu_i)=\sum_{i=1}^{6}bc_i(\mu,\mu_i)=0.]$$

9. 对于 A_l、G_2、E_7 和 E_8，若有

$$h_1=\sum_{i=1}^{l+1}b_i\mu_i,\quad h_2=\sum_{i=1}^{l+1}c_i\mu_i,$$

求(h_1,h_2).

[提示：
$$\begin{aligned}(h_1,h_1)&=\sum_{i=1}^{l+1}b_i\sum_{j=1}^{l+1}c_i(\mu_i,\mu_j)\\&=\sum_{i,j(i\neq j)}(\mu_i,\mu_j)+\sum_{i=1}^{l+1}b_i\sum_{i=1}^{l+1}c_i(\mu_i,\mu_i)\\&=(n+1)\sum_{i=1}^{l+1}b_ic_i-K[\sum_{i=1}^{l+1}b_i][\sum_{i=1}^{l+1}c_i].]\end{aligned}$$

10. 设李代数的权 Λ 的简并度为 α,即

$$H_i|u_\Lambda^{(1)}\rangle = \Lambda_i|u_\Lambda^{(1)}\rangle, \quad H_i|u_\Lambda^{(2)}\rangle = \Lambda_i|u_\Lambda^{(2)}\rangle,$$

则对权作魏尔反射

$$\Lambda \xrightarrow{S_\alpha} \Lambda' \equiv S_\alpha\Lambda = \Lambda - \frac{2(\Lambda,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}2, \qquad (8.103)$$

则权 Λ' 的简并度亦为 2.

[提示:令 $K=2(\Lambda,\alpha)/(\alpha,\alpha)$,应为整数.对于矢量$(E_{-\alpha})|u_\Lambda^{(1)}\rangle$,有

$$\begin{aligned} H_i(E_{-\alpha})|u_\Lambda^{(1)}\rangle &= \{[H_i,E_{-\alpha}] + E_{-\alpha}H_i\}|u_\Lambda^{(1)}\rangle \\ &= [-2_iE_{-\alpha} + \Lambda_iE_{-\alpha}]|u_\Lambda^{(1)}\rangle \\ &= (\Lambda_i - 2_i)E_{-\alpha}|u_\Lambda^{(1)}\rangle. \end{aligned}$$

易由此得,

$$(\Lambda_i - K\alpha_i)(E_{-\alpha})^K|u_\Lambda^{(1)}\rangle,$$

即$(E_{-\alpha})^K|u_\Lambda^{(1)}\rangle$为权$(\Lambda-K\alpha)=\Lambda'$的本征矢.同样有

$$(\Lambda_i - K\alpha_i)(E_{-\alpha})^K|u_\Lambda^{(2)}\rangle.$$

换言之,$(E_{-\alpha})^K|u_\Lambda^{(1,2)}\rangle$均对应权 Λ'.

用本题方法可证魏尔反射的诸权的简并度相同,即称等价权.]

第九章　李群的整体性质与同伦群

我们对于李群在单位元邻域的性质，即局域性质进行了深入的讨论．不同的李群，可能会有同样的李代数，即相同的局域性质．但是，就整体而言，不同的李群具有迥然不同的性质．群的整体性质是与拓扑学紧密联系在一起的，实际上在不同的地方，我们曾不那么严格地加以定性叙述过．

李群的整体性质可由同伦群，尤其是基本同伦群刻画．关于相关的点集拓扑的知识，我们只予最简单的说明．我们看到，同伦群作为描述李群拓扑结构的基本数字工具，在基本粒子物理学、天体物理、生物物理（如 DNA 的拓扑构型），尤其是在凝聚态物理的缺陷研究中，有着广泛的应用．本书只能涉及到其中一些最有趣的应用领域，希望读者从中可以窥一斑而见全豹，举一反三，触类旁通．

§9.1　点集拓扑的若干基本知识

邻域　在 n 维欧氏空间 E_n 中，点 P 的邻域是指包围 P 点的一组点集合 U，且 U 包含以 P 为圆心的一个 n 维开实心球．所谓开球指除了球面以外，构成整个实心球的所有的点（亦称内点）的集合．

例 1　平面（E_2）中的点的邻域．

在图 9.1 中，图(a)所示集合 U 是点 P 的一个邻域，因为在 U 中显然可以画出一个以 P 为圆心的开圆．图(b)、(c)中集合 U 就不能这样做了，显然任何以 P 为圆心的开圆都会包含不属于集合 U 的点．换言之，此时的 U 均非点 P 的邻域．

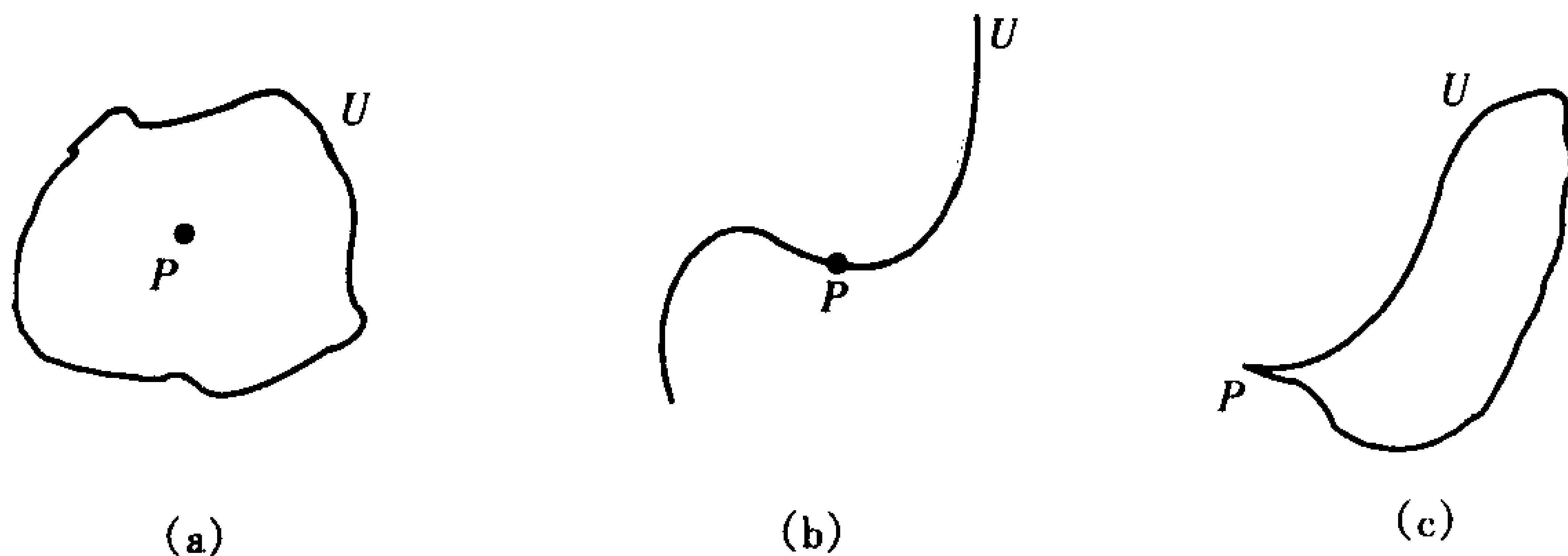


图 9.1 平面中的点的邻域

关于 E_n 空间中邻域，有以下显然事实，请读者加以证明：设 U 为点 P 的任一领域，则有

(1) $P \in U$；

(2) 若集合 $V \supset U$，则 V 示为 P 的邻域；

(3) 若 U、V 均为 P 的邻域，则交集 $U \cap V$ 亦为 P 的邻域；

(4) 若 U 为 P 的邻域，则必有集合 $V \subset U$，且 V 为 P 的邻域，而且 U 为 V 中所有点的邻域.

拓扑空间 $\{M;U\}$　$\forall\ P \in M$，均对应子集合族 $\{U_i(P)\}$，其中元素 $U_i \subset M$ 且为 P 的邻域，且 $\{M,U\}$ 具有如下性质：

(1) 若 U_i 是 P 的邻域，则 $P \in U_i$；

(2) $\forall\ M_j \subset M$，且 M_j 包含点 P 的一个邻域，则 M_j 亦为 P 的邻域；

(3) 若 U_i 与 U_j 是 P 的邻域，则 $U_i \cap U_j$ 亦为 P 的邻域；

(4) 若 U_i 是 P 的一个邻域，则必对应 P 的这样一个邻域，U_j $(U_i \subset U_j)$，使得 U_i 是 U_j 的每个点的邻域；

则称 $\{M;U\}$ 为拓扑空间. 此处邻域系 $U = \{U(P) \mid P \in M\}$ 称为 M 的一个拓扑. 集合 M 与其拓扑结合，构成一个拓扑空间，记为 $T \equiv \{M;U\}$.

例 2　E_n 空间. 以原点为中心的单位球面记如 S. 设 $\forall\ P \in S$，定义 P 点的邻域 U 为包含 P 点且距离小于 ε（很小正数）的所有

点的集合，则 $T_S=\{S;U(P)\}$ 构成一个拓扑空间. 显然 T_S 为 E_n 的子空间. $T=\{E_n;U(P)\}$ 即为 E_n 与及拓扑 $U(P)$（定义同上）构成的拓扑空间.

n 维开球与 n 维闭球分别构成 E_n 的开与闭的子空间（其拓扑定义相同）.

离散拓扑 设 $\forall P\in M$，存在 P 的一个邻域 U_i，使得 $U_i\subset U(P)$，则拓扑空间 $T=\{M;U\}$ 的一个子集 $U_i(U_i\subset M)$ 称为开集. 如取空集 $\varnothing$、M 与 M 的所有子集为 M 的拓扑，就得到 M 的离散拓扑.

例 3 设拓扑空间 $T=\{M;U\}$. 若 $T_1\subset M$，且点 $P\in T_1$. 记 V_i 为 P 在 T 中的一个邻域，则 $U_i=T_1\cap V_i$ 称为 P 在 T_1 中的邻域. 易证 $\{T_1,U_i\}$ 构成拓扑空间. 拓扑 $\{U_i\}$ 称为 T 在 T_1 上诱导的拓扑，T_1 是 T 的拓扑子空间.

例 4 拓扑空间 $T=\{M;U\}$ 中，U 仅由 M 与 M 的空子集 $\varnothing$ 构成，则为 T 上最粗的拓扑.

例 5 整数集合 M. $\forall n\in M$，取集合 $U^q(n,r)$，$\forall r=n+mq(m=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm q)\in U^q(n,r)$，这里 q 为确定质数. 选定一个 q，就给 M 的一个特定拓扑. 由此可定义拓扑空间 $T=\{M,U^q\}$.

例 6 实数集合 M. 对于 $\forall x\in M$，对应集合 $U(x)$ 有 $x\in U(x)$，并且存在 $\varepsilon>0$，使得区间

$$\{x-\varepsilon<x<x+\varepsilon\}\subset U(x),$$

于是集合族 $\{U(x)\}$ 构成实数集合 M 的一个拓扑，称为自然拓扑，它与 E_1 的拓扑是等价的.

映射 设 T_1 与 T_2 为两拓扑空间，$\forall P_1\in T_1$，与 T_2 中有一确定的点 $P_2=t(P_1)$ 对应，则 t 为从 T_1 到 T_2 的映射. 若对于 T_2 中点 $P_2=t(P_1)$ 的邻域 U，在 T_1 中存在点 P_1 的一个邻域 V 与之对应，且有 $t(V)\subset U$，则称映射 t 在 P_1 点是连续的. 若映射 t 在 T_1 的所有点都连续，则称映射 t 为连续的映射，见图 9.2.

同胚映射 若两拓扑空间 T_1 与 T_2 之间存在一个映射，使两

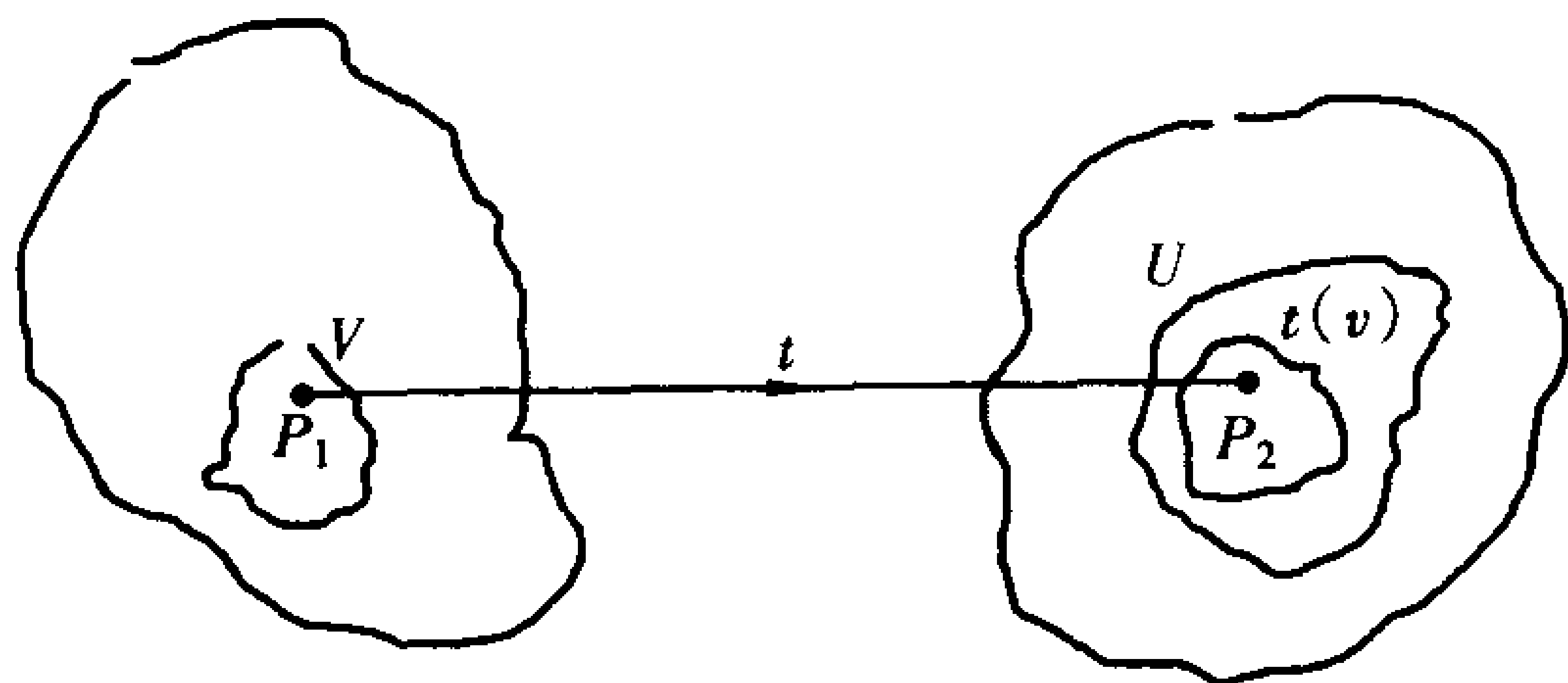


图 9.2 在 P_1 点连续映射 t

空间所有的点与开集合在此映射下一一对应，则此映射为同胚映射. 此时空间 T_1 与 T_2 在拓扑上就是等价的，即具有完全相同的拓扑结构.

同胚映射 t 及其逆映射 t^{-1} 都是连续映射，彼此同胚的诸拓扑空间显然具有等价关系.

拓扑空间的直积 设 T_1 与 T_2 为两拓扑空间，且 $\forall P_1 \in T_1$，$\forall P_2 \in T_2$，集合族 $U(P_1)$ 与 $V(P_2)$ 分别为相应的拓扑，则点偶 (P_1, P_2) 构成的集合 $T_1 \otimes T_2$，集合 $U \otimes V$ 即为其邻域，集合族 $U(P_1) \otimes V(P_2)$ 构成点偶集合 $T_1 \times T_2$ 的拓扑. 简言之，$T_1 \times T_2$ 是 T_1 与 T_2 的拓扑积，亦为拓扑空间.

利用拓扑空间的直积，是构造新拓扑空间的重要方法之一.

例 7 拓扑空间 $E_1 \otimes E_1$，得到平面拓扑：

$$E_m \otimes E_n = E_{m+n} \quad \text{(高维欧氏拓扑)}.$$

例 8 一个圆周与实数轴上的一个区间的拓扑积生成一个圆柱面. 在柱面坐标系下，设实轴为 Z 轴，$a \leqslant z \leqslant b$ 为实轴的某区间. 圆周为 $\rho = c$（常数）；$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. 其拓扑积为点偶集合（$z = a - b$；$\rho = c$；$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$），这正好是长为 $(b-a)$ 的圆柱面.

连通空间 拓扑空间如果不能分为两个不相交的非空开集的并集，则称空间是连通的. 如果 T_1 与 T_2 均为连通空间，则其直积 $T_1 \otimes T_2$ 亦为连通的. 如果连续映射 t 将连通空间 T_1 映射到空间

T_2，则 T_2 必定是连通的.

例 9 实数轴 **R** 是连通空间. 实数轴上的区间是实数轴唯一的连通子空间.

所有有理数构成的 **R** 的子空间是不连通的子空间. 设有两有理数 $x<z$，总可以找到一无理数 y，使得 $x<y<z$. 事实上，有理数空间是处处不连通的，即完全不连通的.

例 10 $\underbrace{\mathbf{R}\otimes\cdots\otimes\mathbf{R}}_{n}=E_n$，故 n 维欧氏空间是连通的. 由于酉空间 C_n 与 E_{2n} 空间是同胚的，故 C_n 亦连通.

如果拓扑空间 T 中每一点 P 都有一个不连通的邻域，则称 T 为局域连通空间. 实轴上若干互不相重合的开区间的和集，就是局域连通但非连通的空间.

覆盖 若扑拓空间 T 的子集合族 $\{U\}$ 的和集包含 T，则称此和集覆盖 T. 空间 T 的每一点被包含在此集合族中的某一集合中. 集合族 $\{U\}$ 称为 T 的覆盖.

如果覆盖中每一个集合都是开集合，则称此覆盖为开覆盖. 如果覆盖中只包含有限个集合，则称此覆盖是有限覆盖.

拓扑紧致空间 如果拓扑空间 T 的任意开覆盖必含有一个有限开覆盖，则称此空间为拓扑紧致的. 紧致空间的任意子空间必然也是紧致的.

如果拓扑空间 T_1 与 T_2 均是紧致的，则其拓扑积 $T_1\otimes T_2$ 必然也是紧致的. 如果拓扑空间 T 中的每一点均在开集中，而这一开集的闭包是紧致(有界)的，则 T 称为局部紧致空间.

例 11 E_n 是非紧致的空间. 但如以 E_n 中任一点为球心的开球作为此点的领域，则开球的闭包——球面，是紧致(有界)的，故 E_n 为一局部紧致的空间.

§9.2 同伦路径与基本群

在拓扑空间的连通性的研究中，尤其是在群的整体性质的研

究中，同伦路径具有极其重要的作用.

1. 同伦(Homotopy)

如果两流形(如群流形等)X 与 Y 可由一族连续映射 f 将 X 映射到 Y，即

$$\left.\begin{array}{ll} & f:X \to Y; \\ \text{或} & \forall\, x \in X, \forall\, y \in Y, \text{有 } f(x) = y. \end{array}\right\} \tag{9.1}$$

如果两映射 f_0 与 f_1，可以通过连续变形，由 f_0(或 f_1)变为 f_1(或 f_0)，则两者称为同伦映射. 就是说，存在一族中间映射 $F(x,t)$，其中参数 t 处于单位区间$[0,1]$($0 \leqslant t \leqslant 1$)中，$F(x,t)$相对 x 与 t 都是连续变化的，并且有

$$F(x,0) = f_0, \quad F(x,1) = f_1 \tag{9.2}$$

则称映射族 $F(x,t)$为有固定端点的同伦，或简称同伦.

通常将 f_0 同伦于 f_1，标记为 $f_0 \sim f_1$. 容易证明同伦关系"$\sim$"是一种等价关系.

例 1 若有 $F:f_0 \sim f_1, G:f_1 \sim f_2$，则 $f_0 \sim f_2$.

为证明此命题，只需引入映射族

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t), & 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ G(x,2t), & \dfrac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases} \tag{9.3}$$

显然，$H(x,0)=f_0, H(x,1)=f_2$.

由此可见，彼此同伦等价的映射构成一个类，以后记如$\{f\}$.

2. 同伦路径

在拓扑空间 T 中，任意两点 P 与 Q 之间的路径定义为映射 $f:I=[0,1]$到 T 的连续映射，并且满足

$$f(0) = P, \quad f(1) = Q. \tag{9.4}$$

如果对于拓扑空间 T，其中任何点偶$\forall\, P \in T, \forall\, Q \in T$，总有

连续映射 f(即路径)将 P 与 Q 连接,则称空间 T 为弧连通的或路径连通的.

例 2 E_2 空间. 设有 $P=(x_1,y_1)\in E_2, Q=(x_2,y_2)\in E_2$,令映射 $f(t)$ 与点 $(f_1(t),g_1(t))$ 对应. 其中

$$\begin{cases} f_1(t) = (1-t)x_1 + ty_1, \\ g_1(t) = (1-t)x_2 + ty_2. \end{cases} \tag{9.5}$$

显然,映射 $f(t)$ 是连续的. $f(0)\to(x_1,y_1)=P, f(1)\to(x_2,y_2)=Q$. 此时 $f(t)$ 就是连结 E_2 中任意两点的路径,故 E_2 空间是弧连通的.

例 3 n 维欧氏空间 E_n.

设有任意点 $P=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in E_n, Q=(y_0,y_1,\cdots,y_n)\in E_n$. 给出映射 $f(t):(f_1(t),f_2(t),\cdots,f_n(t))$,其中

$$\begin{cases} f_1(t) = (1-t)x_1 + ty_1, \\ f_2(t) = (1-t)x_2 + ty_2, \\ \cdots\cdots \\ f_n(t) = (1-t)x_n + ty_n. \end{cases} \tag{9.6}$$

显然,$f(0)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P; f(1)=(y_1,y_2,\cdots,y_n)=Q$. 就是给出由 P 到 Q 的一条路径. E_n 空间也是弧连通的.

例 4 圆周是弧连通的. 圆周可表为 $e^{i2\pi\theta}$,其中 $\theta\in[0,1]$. 此时任何点偶 $P=e^{i2\pi\theta_1}, Q=e^{i2\pi\theta_2}$,可由路径 $f(t)=(1-t)\theta_1+t\theta_2$ 连接. 显然,$f(0)=e^{i2\pi\theta_1}; f(1)=e^{i2\pi\theta_2}$.

从几何上说,映射 f 将单位区间 $I\longrightarrow$ 一条曲线 T. 若令 $f(0)=f(1)=P_0$(基点),则曲线是闭合的,在拓扑上等价于具有参考点 x_0(相应于在 1 与 0 时其边界相同)的圆 S^1. 映射或曲线的同伦的概念已如上述. 闭曲线的同伦类尤为重要. 设 P 为拓扑空间的一个点,由 $I_P=f_P(t)=P(0\leqslant t\leqslant 1)$ 定义的路径,称为 P 点的常值路径或零路径. 与点 P 的零路径 I_P 同伦的所有曲线的集合记为 $[I_P]$. 实质上零路径表示常值映射

$$C(t) = y_0 = \text{const}, \quad \forall\, t\in I=[0,1] \tag{9.7}$$

例 5 设 $f_P(t)$ 是点 $P\in T$ 的一条闭合曲线，如要 $f_P(t)$ 与 $[I_P]$ 同伦必须映射族 $F(x,t)$ 满足

$$\begin{cases}F(0,t)=f_P(t),\\ F(1,t)=I_P=P\end{cases}\quad(0\leqslant x\leqslant 1),\tag{9.8}$$

$$\begin{cases}F(x,0)=P,\\ F(x,1)=P\end{cases}\quad(0\leqslant t\leqslant 1).\tag{9.9}$$

此条件相当于在空间 T 中无“洞穴”一类缺陷. 此时闭合曲线 $f_P(t)$ 可连续变形，退化为点 P. 需要说明的是，以前对 x 未限制在单位区间，此处加上条件(9.8)对于曲线拓扑性质并未影响.

3. 单连通与多连通空间

设 T 为拓扑空间，若 $\forall\ P\in T$，只存在一类闭曲线，则称此空间为单连通的；若 $\forall\ P\in T$，每一个点有 m 个同伦类的闭曲线与之对应，则称此空间为 m 度连通的空间.

例 6 圆周是单连通的；圆环是无穷度连通的. 圆环有两类明显拓扑不等价的闭曲线：一类是不围绕圆心或中间挖出一内圆的；另一类则是围绕圆心的. 前者可连续变形退化为一点，后者就不行. 还可证明，围绕中心不同次数的闭曲线也是拓扑不等价的. 同样道理，环形曲面也是无限度连通的.

当 $n>1$ 时，n 维球 S_n 是单连通的.

4. 基本群(Fundamental group).

基本群是刻画拓扑空间 T 的连通性的基本数学工具，它是与同伦路径密切相关的数学概念. 简言之，基本群就是由 $I=[0,1]$ (或 S')⟶拓扑空间 T 的不同映射同伦类 $\{f\}$、$\{g\}$…所构成的群.

基本群的单位元 $\{e\}$ 就是前面讲过的常值映射 C(9.7 式). 路径 $\{f\}$ 的逆元素 $\{f^{-1}\}$ 称为逆路径，f^{-1} 与 f 为同一点集，但具有相反巡引方向，定义为

$$f^{-1}(t) = f(1-t). \tag{9.10}$$

现定义两个路径乘积,即基本群的群运算.设第一条路径 f_1 的终点与第二条路径的起点重合,则由第一条路径与第二路径相连得到的路径,称为 f_1 与 f_2 的路径乘积,即

$$f_1(t)\cdot f_2(t) = \begin{cases} f_1(2t), & 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ f_2(2t), & \dfrac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases} \tag{9.11}$$

如果应同伦类的符号,就是

$$\{f_1\}\cdot\{f_2\} = \{f_1\cdot f_2\}. \tag{9.12}$$

显然

$$\{f\}\cdot\{f^{-1}\} = \{f\cdot f^{-1}\} = \{e\}. \tag{9.13}$$

具有同一基点的闭路径或曲线的"乘法",显然是定义(9.12)的一种特殊情况.可以证明

$$\{f_1\}\cdot\{f_2\cdot f_3\} \sim \{f_1\cdot f_2\}\cdot f_3. \tag{9.14}$$

就是说,不同类的路径相乘满足结合律.于是具有同一基点的不同同伦类的闭合曲线的集合在上述群运算下,构成一个群,称为拓扑空间 T 的基本群或第一同伦群,记如 $\Pi_1(T)$.此处定义的基本群是相对于特殊基点 P 得到的,可以证明,在弧连通空间中,任何两点作为基点的基本群都是同构的.换言之,基本群在本质上与基点的选取无关,它是离散群.

例 6 设 $T = E_2 - (0,0)$(平面挖去原点),基点为 $P = (x_0, y_0)$.由 $I = [0,1]$ 到 T 的映射是平面上以 P 为基点(始于且终于 P)的闭合曲线.在图 9.3(a)中,曲线避开(0,0),可以收缩到点 P 上,因此属于常值映射,即 $\{e\}$.曲线若围绕{0,0},并顺时针绕行 n 圈,即属于 $\{n\}$ 类闭合曲线.如反时针绕行,分别记为 $\{-1\}$ 类,$\{-2\}$ 类,…,$\{-n\}$ 类.于是

$$\Pi_1(E_2 - (0,0)) = \mathbf{Z} \quad (\text{整数集合}), \tag{9.15}$$

即通常加法运算的整数群.此处整数 n 表示闭曲线同伦类,称为绕

数(winding number).

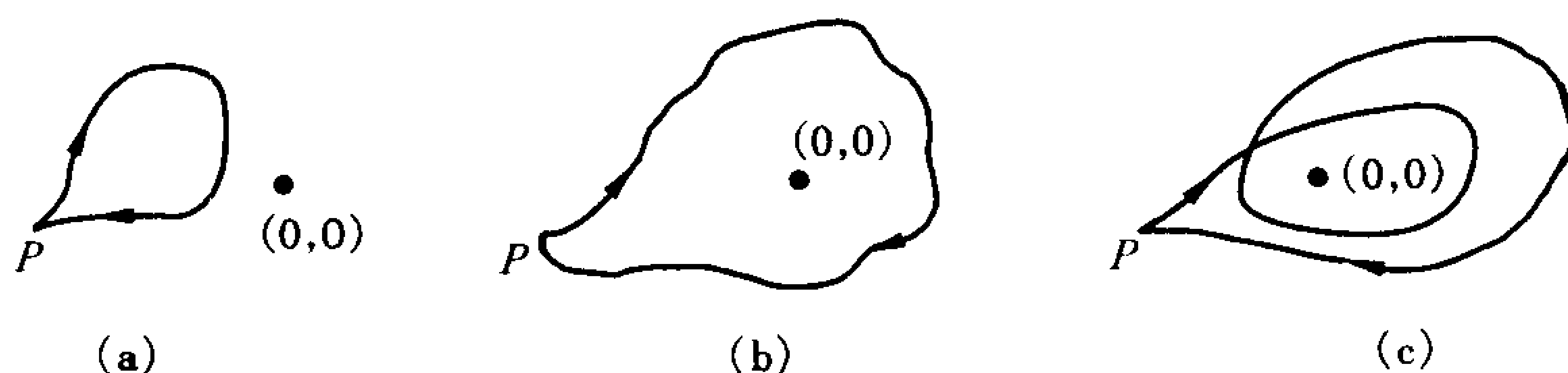


图 9.3 在挖去原点(0,0)的平面上用绕数为 0,1,2 表示的拓扑不等价的三类映射(曲线)

问 题

1. 证明同伦运算满足结合律.

[提示:首先要注意,两个闭合曲线若只有参数化不同,则它们属于同一同伦类.令$\{f\}$、$\{g\}$与$\{h\}$的代表元素为$f(t)$、$g(t)$与$h(t)$.因而

$$(f\cdot g)\cdot h=\begin{cases}f(4t), & 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{4},\\ g(4t-1), & \frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{1}{2},\\ h(2t-1), & \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1,\end{cases}\tag{9.16}$$

以及

$$f\cdot(g\cdot h)=\begin{cases}f(2t), & 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2},\\ g(4t-2), & \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant\frac{3}{4},\\ h(4t-3), & \frac{3}{4}\leqslant t\leqslant 1,\end{cases}\tag{9.17}$$]

在(9.16)与(9.17)式中,仅有参数化的方法不同,故$(f\cdot g)\cdot h$与$f\cdot(g\cdot h)$属于同一同伦类,

$$\{((f \cdot g) \cdot h)\} = \{f \cdot (g \cdot h)\}. \tag{9.18}$$]

2. 证明,常值映射(不变闭合曲线)

$$C(t) = x_0 \quad (0 \leqslant t \leqslant 1) \tag{9.19}$$

确实具有单位元$\{e\}$的性质.

[提示:设 f 为$\{f\}$的代表元素,$f(t)$,$0<t<1$,

$$f(0) = f(1) = x_0, \tag{9.20}$$

则有

$$C \cdot f = \begin{cases} x_0, & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ f(2t-1), & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} \tag{9.21}$$

$$f \cdot C = \begin{cases} f(2t), & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ x_0, & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases} \tag{9.22}$$

(9.20)、(9.21)与(9.22)式的区别仅只参数化不同,因此

$$\{C \cdot f\} = \{f \cdot C\} = \{C\} \equiv \{e\},$$

即

$$\{C\} \cdot \{f\} = \{f\} \cdot \{C\} = \{C\} = \{e\}. \tag{9.23}$$]

3. 证明对于每一同伦类闭合曲线$\{f\}$,均有逆元$\{f^{-1}\}$存在.

[提示:定义 $f^{-1}(t)=f(1-t)$,由此可见,

$$f(t) \cdot f^{-1}(t) = \begin{cases} f(2t), & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ f(2-2t), & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} \tag{9.24}$$

$$f^{-1}(t) \cdot f(t) = \begin{cases} f(1-2t), & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ f(2t-1), & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases} \tag{9.25}$$

(9.24)与(9.25)式之不同,仅在于参数化,可见

$$\begin{cases}\{f(t)\cdot f^{-1}(t)\}=\{f^{-1}(t)\cdot f(t)\},\\ \{f(t)\}\cdot\{f^{-1}(t)\}=\{f^{-1}(t)\}\cdot\{f(t)\}.\end{cases}\tag{9.26}$$

再定义同伦 $F(t,x)$，$x\in I=[0,1]$：

$$F(t,x)=\begin{cases}f(2tx), & 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2},\\ f(2x-2tx), & \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}\tag{9.27}$$

显然，

$$\begin{cases}F(t,0)=f(0)=x_0=C(t),\\ F(0,x)=f(0)=x_0=F(1,x),\\ F(t,1)=f(2x)=f(t)\cdot f^{-1}(t).\end{cases}\tag{9.28}$$

由此可见，$f\cdot f^{-1}$与 $C(t)$属于同一同伦类，

$$\{f\cdot f^{-1}\}=\{f\}\cdot\{f^{-1}\}=\{C\}\equiv\{e\}.\tag{9.29}$$]

4. 若 x_1 与 x_2 为拓扑空间 T 的一条连续路径相连接的两个点，则有"路径同构"的性质，

$$\Pi_1(T,x_1)\cong\Pi_1(T,x_2).\tag{9.30}$$

[提示：见图 9.4. 令 $\rho:I\longrightarrow T$ 是条路径

$$\begin{cases}\rho(0)=x_1,\rho(1)=x_2\\ \rho^{-1}(t)=\rho(1-t)\end{cases}\tag{9.31}$$

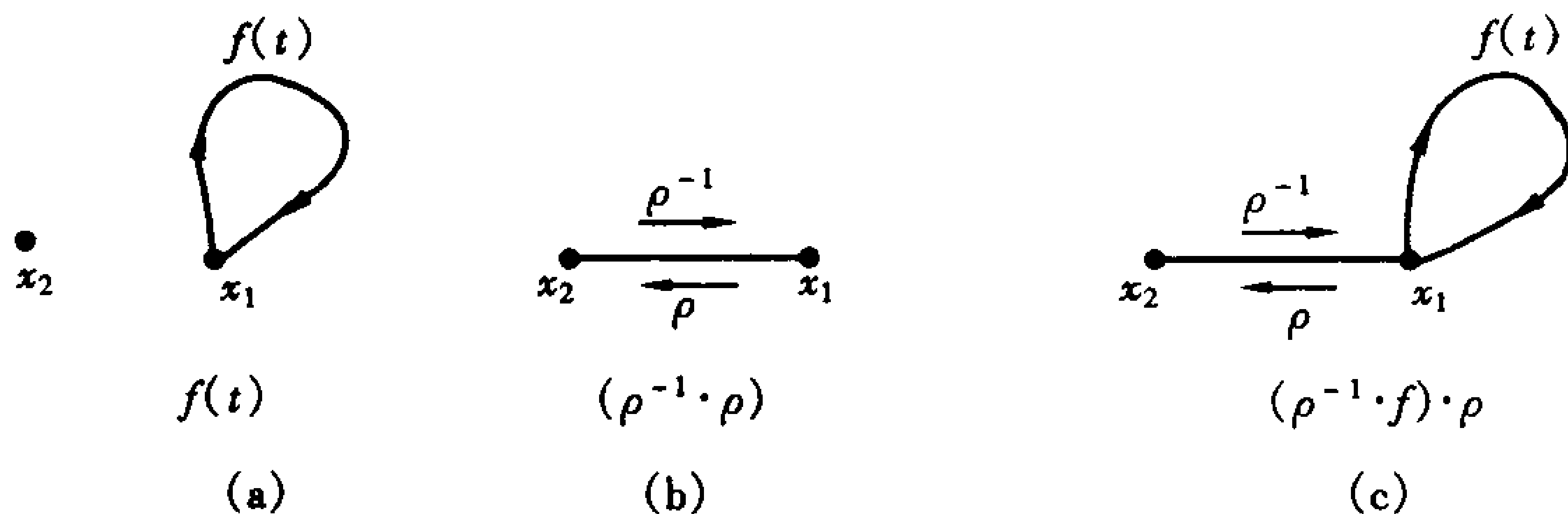


图 9.4 路径同构

设 $f(t)$ 是以 x_1 为基点的闭合曲线. 如图(c)所示,$(\rho^{-1}\cdot f)\cdot\rho$ 则是以 x_2 为基点的闭合曲线. 定义由 $\Pi_1(T,x_1)$ 到 $\Pi_1(T,x_2)$ 的映射为 ξ,则

$$\xi\{f\}=\{(\rho^{-1}\cdot f)\cdot\rho\},\{f\}\in\Pi_1(T,x_1). \tag{9.32}$$

由于群的结合律,

$$\{(f\cdot g)\cdot h\}=\{f\cdot(g\cdot h)\}=\{f\cdot g\cdot h\}. \tag{9.33}$$

注意到 $\{\rho\cdot\rho^{-1}\}=\{C(t)=x_1\}$, $\{\rho^{-1}\cdot\rho\}=\{C(t)=x_2\}$,即分别为 $\Pi_1(T,x_1)$ 与 $\Pi_1(T,x_2)$ 的单位元素. 再考虑 $\forall\ f(t)$、$g(t)\in\Pi_1(T,x_1)$,应有

$$\begin{aligned}\xi(\{f\}\cdot\{g\})&=\xi(\{f\cdot g\})\\&=\{(\rho^{-1}\cdot f\cdot g)\rho\}\\&=\{\rho^{-1}\cdot f\cdot g\cdot\rho\}\\&=\{\rho^{-1}\cdot f\cdot\rho\cdot\rho^{-1}\cdot g\cdot\rho\}\\&=\{\rho^{-1}\cdot f\cdot\rho\}\cdot\{\rho^{-1}\cdot g\cdot\rho\}\\&=\xi(\{f\})\cdot\xi(\{g\}).\end{aligned} \tag{9.34}$$

由此可见 $\xi(\{f\}\cdot\{g\})=\xi(\{f\})\cdot\xi(\{g\})$,映射 ξ 是同态映射.

再定义由 $\Pi_1(T,x_2)$ 到 $\Pi_1(T,x_1)$ 的映射 η,

$$\begin{aligned}\eta(\{\alpha\})&=\{(\rho\cdot\alpha)\cdot\rho^{-1}\}=\{\rho\cdot\alpha\cdot\rho^{-1}\}\\&\quad(\{\alpha\}\in\Pi_1(T,x_2)),\end{aligned} \tag{9.35}$$

则对于 $\{f\}\in\Pi_1(T,x_1)$ 应有

$$\begin{aligned}\eta\cdot\xi(\{f\})&=\eta(\{\rho^{-1}\cdot f\cdot\rho\})\\&=\{\rho\cdot\rho^{-1}\cdot f\cdot\rho\cdot\rho^{-1}\}\\&=\{\rho\cdot\rho^{-1}\}\cdot\{f\}\cdot\{\rho\cdot\rho^{-1}\}\\&=\{f\},\end{aligned} \tag{9.36}$$

可见 η 为 ξ 的逆映射. $\eta\cdot\xi$ 是 $\Pi_1(T_1,x_1)$ 上的不变映射,同样 $\xi\cdot\eta$ 则是 $\Pi_1(T,x_2)$ 上的不变映射. 因此,同态映射 $\xi\cdot\eta$ 实质上是同构映射,故如题云.]

§ 9.3 李群的拓扑性质

1. 拓扑群

将拓扑空间的概念与抽象群的概念结合起来，并且满足一定连续性要求，就得到拓扑群的概念.

设有一抽象群$\{G,m\}$，其中群乘积系数m给出映射

$$G\times G\xrightarrow{m}G,\tag{9.37}$$

确定抽象群的群结构. 对于同一集合G，给定一个拓扑τ，构成拓扑空间$T=\{G,\tau\}$，形成拓扑结构. 若群运算在拓扑空间是连续的，即

$\forall\ g_1,g_2\in G$及对于$g_1\cdot g_2^{-1}$的每一个邻域U_{12}'，存在g_1与g_2的邻域U_1与U_2，且

$$U_1U_2^{-1}\subset U_{12}',\tag{9.38}$$

则$\{G,m,\tau\}$定义一个拓扑群.

拓扑群可以是连续的，也可以是离散的.

例 1 设有限群$G=(e,a,b)$，e为单位元素，其乘法表为$a\cdot a=b,b\cdot b=a,a\cdot b=b\cdot a=e$. 令下列开集合(或邻域)作为$G$的一个拓扑

$\{\varnothing\}$	$\{e\}$	$\{a\}$	$\{e,a\}$	$\{e,a,b\}$
U_1'	U_2'	U_3'	U_4'	U_5'

容易验证，此拓扑满足拓扑空间的要求.

若考虑$g_1=g_2=a,a^{-1}=b$，则$a\cdot a^{-1}=e$存在于邻域U_2'、U_4'和U_5'中，a存在于U_3'、U_4'与U_5'中，而a^{-1}仅存在于U_5'中. 此时$g_1\cdot g_2^{-1}=e$的邻域$U_{12}'=U_2'$. 显然$U_1U_2^{-1}=(U_3U_5,U_4U_5,U_5\cdot U_5)\not\subset U_2'$，故连续性要求不满足. 这样定义的拓扑不构成拓扑群.

例 2 例 1 中，定义以下开集合组成群G的拓扑

$$\begin{array}{ccccc} \{\varnothing\} & \{e\} & \{a\} & \{b\} & \{e,a,b\} \\ U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 \end{array}$$

此时满足连续性条件，故构成拓扑群.

例 3 实数轴上的拓扑定义的实数加法群是连续拓扑群.

$GL(n,\mathbf{C})$群的 n^2 参数可以视为 n^2 维复欧氏空间或 $2n^2$ 维实欧氏空间的点，这样容易定义相应的拓扑，使得 $GL(n,\mathbf{C})$成为连续拓扑群.

一般而言，若以元素本身作为其邻域，则这样定义的拓扑，可以使任何离散群变为拓扑群. 但我们的兴趣在于研究连续拓扑群的性质.

2. 拓扑群的同构

两拓扑群的同构的条件有两点：抽象群同构，拓扑空间同胚.

注意，抽象群同构，可以具有不同拓扑结构，因而不同胚. 不同构的抽象群，也可以赋予相同的拓扑结构，具有同胚的拓扑空间.

拓扑群$\{G,m,\tau\}$的拓扑子群(H,m,τ)满足两个条件：

(1) $\{H,m\}$是抽象群$\{G,m\}$的子群；

(2) $\{H,\tau\}$是拓扑空间$\{G,\tau\}$的封闭子空间.

例 4 抽象整数加法群是抽象实数加法群的子群. 但是整数加法群并不构成实数的自然拓扑的闭子空间. 事实上，设$\forall\ n\in\mathbf{Z}$(整数集合)，$x\in U$ 则区域$\{n-\varepsilon<n<n+\varepsilon\}\subset U(\varepsilon>0)$中必包含非整数. 因此，整数加法群不是实数加法群的拓扑子群.

不变拓扑子群(正规子群)N 是拓扑群 G 的这样的拓扑子群：$\forall\ g\in G$，有

$$g^{-1}Ng = N. \tag{9.39}$$

对于拓扑群 G 来说，其中心就是抽象群 G 的中心，记为 Z. Z 中所有元素$\forall\ z\in Z$，都有性质(必为阿贝尔不变子群)

$$zg = gz \quad (\forall\ g \in G). \tag{9.40}$$

对于连续的半单纯群，不存在连续的阿贝尔子群，故其中心必是离

散的.

例 5 $SU(2)$的中心 $Z_2=(1,-1)$，或

$$E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad I=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

$GL(n,\mathbf{C})$的中心是单位矩阵任何整数倍数，即 $Z=\{\lambda E\}$为无限集合.

3. 陪集空间、商空间

我们已经熟知抽象群 G、商群、不变子群 H 的概念. 商群G/H的元素是不变子群 H 的陪集 gH. 若用 $\phi(g)=gH$ 定义 G 到 G/H 的映射 $g\xrightarrow{\phi}gH$，由此得到的同态称为自然同态或正则同态.

例 6 $G=SU(2)$，$H=Z_2$，

$$SU(2)\xrightarrow{\phi}SU(2)/Z_2$$

是 $\alpha\to1$ 的同态.

现赋予商群以拓扑结构. 若 G 为拓扑空间，则 G/H 称为陪集空间. 设 ϕ 为 $G\to G/H$ 的自然映射，则可用如下方法定义商拓扑. 即要求映射 ϕ 满足，当且仅当 $\phi^{-1}(U)$是 G 中的开集合时，G/H 中的集合 U 才是开集合. 如此即能保证 G/H 是拓扑空间，称之为商空间.

4. 齐性空间

设 G 为拓扑群，$\forall\ g\in G$，映射

$$T_g^L:g_1\longrightarrow gg_1,\quad T_g^R:g_2\longrightarrow g_2g \tag{9.41}$$

分别称为群元 g_1 和 g_2 的左平移和右平移. 任何群元 g_1、g_2，都可以通过左、右平移互换：

$$g_2=T_g^Lg_1=gg_1\quad 或\quad g_2=T_g^Rg_1=g_1g.$$

由此可见，

$$T_g^L:g=g_2g_1^{-1}\ 或\ T_g^R=g_1^{-1}g_2.$$

群运算的唯一性和连续性，保证由固定元素定义的左平移和右平移都是由 $G \longrightarrow G$ 的同胚映射.

所谓齐性空间是指这样的拓扑空间，其中任一点都可以通过 G 的一个元素映射为另一个任意点. 显然，任何拓扑群均为齐性的. 这就保证群 G 中任一点的邻域的局域性质，可以"重现"在 G 中其它点中去. 我们以前讨论的单位元的邻域的性质，可以推广到群 G 中任意点的邻域. 不难证明，商空间 G/H 也是齐性空间.

5. 拓扑流形

如果拓扑空间 T_n 中每一点都有一个邻域，同胚于欧氏空间 E_n 中一个开集合，则称此空间 T_n 是局部欧氏空间. 如果 T_n 是一个连通的局部欧氏空间，即称为拓扑流形. 拓扑流形必然是局部紧致的.

一般拓扑群，当其拓扑空间是拓扑流形时，就称为李群. 由此可见，李群必然是局部紧致与局部连通的. 如果拓扑流形是实数域上的，则相应李群是实李群；如果拓扑流形是复数域上的，则称此群为复李群.

6. 实单纯李群及李代数

几个实单纯李代数的复扩张，如果同构于同一复李代数，只有一个紧致李代数，此时其基林形式是负定的. 复单纯李代数记为 A_c，相应的紧致实形记为 A_r^c.

例 7 $so(3,\mathbf{C})$的紧致实形为 $so(3)$，其基底满足下列对易关系

$$[x_i, x_j] = \varepsilon_{ijk} x_k \quad (i,j,k = 1,2,3). \tag{9.42}$$

进行基底变换

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \tag{9.43}$$

则新基底$\{y_i\}$满足对易关系

$$[y_1, y_2] = -y_3, \quad [y_2, y_3] = y_1, \quad [y_3, y_1] = y_2. \tag{9.44}$$

它们构成非紧致的单纯李代数 $so(2,1)$，与 $so(3)$不同构. $so(3)$与 $so(2,1)$的复扩张均为 $so(3,\mathbf{C})$.

在(9.43)式中，变换矩阵还可取

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \quad 或 \quad D = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}, \tag{9.45}$$

得到另外两个 $so(2,1)$同构的李代数.

注意，利用(9.43)式再进行基底变换，

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & & \\ & \mathrm{i} & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{i}y_1 \\ \mathrm{i}y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \tag{9.46}$$

易证

$$[z_i, z_j] = \varepsilon_{ijk} z_k \quad (i,j,k = 1,2,3), \tag{9.47}$$

即又回到 $so(3)$代数. 利用(9.45)式给出的 D 连续变换两次，亦有相同结果. 我们这样给出的 D，给出 $so(3)$的一个对合自同构变换.

如果 L 是 A_r^c 的对合自同构(适当的基底变换总可使其对角化)，I 为 $n \times n$ 单位矩阵，可以证明，只有当变换矩阵为

$$D = \sqrt{L} = \frac{1-\mathrm{i}}{\alpha} L + \frac{1+\mathrm{i}}{\alpha} I \tag{9.48}$$

时才会得到不同构的新代数，注意

$$L^2 = I, \quad D^4 = I. \tag{9.49}$$

显然，变换矩阵的对角元素只可能是 1 或 i.

由复半单纯李代数 A_c 得到其实形完全集合的法则：选定使 L 对角化的基底，构成 A_r^c 的所有不等价的对合自同构. 然后用 i 去乘 A_r^c 中所有与 L 的本征值-1 相对应的基矢，其它其矢不变. 这样得到的新基矢集合，新是相应对合自同构的那个实单纯李代数

的基底.

例 8 $so(3,\mathbf{C})$的实形 $so(3)$相应的不等价的对合自同构是

$$L=\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix},\tag{9.50}$$

相应的变换矩阵是

$$D=\begin{pmatrix}\mathrm{i}&&\\&\mathrm{i}&\\&&1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1&&\\&\mathrm{i}&\\&&\mathrm{i}\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}\mathrm{i}&&\\&1&\\&&\mathrm{i}\end{pmatrix},\tag{9.51}$$

相应的实单纯李代数 $so(2,\mathbf{1})$的新基底分别是

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix};\quad y=\begin{pmatrix}\mathrm{i}x_1\\\mathrm{i}x_2\\y_3\end{pmatrix},$$

$$y'=\begin{pmatrix}x_1\\\mathrm{i}x_2\\\mathrm{i}x_3\end{pmatrix},\quad y''=\begin{pmatrix}\mathrm{i}x_1\\x_2\\\mathrm{i}x_3\end{pmatrix}.\tag{9.52}$$

为便于查阅,以下给出各种李代数的实形及其矩阵表示.

(1) $sl(n,\mathbf{C})$的实形(复扩张为 A_{n-1})

(a) $su(n)$:$sl(n,\mathbf{C})$的紧致实形. n 阶反厄密矩阵,且 $\mathrm{Tr}Z=0$.

(b) $sl(n,\mathbf{R})$:所有 n 阶实矩阵 X,$\mathrm{Tr}X=0$.

(c) $su(p,q)(p+q=n,p\geqslant q)$,矩阵为

$$Z=\begin{pmatrix}Z_1&Z_2\\\widetilde{Z}_2^*&Z_3\end{pmatrix},$$

其中 Z_1 与 Z_3 分别为 p 阶与 q 阶的反厄密矩阵,且 $\mathrm{Tr}Z_1+\mathrm{Tr}Z_3=0$. Z_2 是任意的.

(2) $so(2n+1,\mathbf{C})$的实形(复扩张为 B_n).

(a) $so(2n+1)$紧致实形式,矩阵为 $2n+1$ 阶实反对称矩阵.

(b) $so(p,q)(p+q=2n+1, p\geqslant q)$，矩阵 X 为 $2n+1$ 阶，

$$X=\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ \widetilde{X}_2 & X_3 \end{pmatrix},$$

其中 X_1 与 X_3 为 p 阶与 q 阶的实反对称矩阵，X_2 是任意的.

(3) $sp(2n,\mathbf{C})$ 的实形（C_n 代数为其复扩充）.

(a) $sp(2n)$ 紧致实形式，其矩阵

$$Z=\begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_3 & -\widetilde{Z}_1 \end{pmatrix}$$

为 $2n$ 阶矩阵，Z_1 为 n 阶复矩阵，Z_2 和 Z_3 则为对称矩阵.

(b) $sp(2n,\mathbf{R})$，其矩阵形式为

$$X=\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & -\widetilde{X}_1 \end{pmatrix},$$

为 $2n$ 阶实矩阵，X_1、X_2 与 X_3 均为 n 阶实矩阵，其中 X_2 与 X_3 为对称的.

(c) $sp(p,q)(p+q=2n, p\geqslant q, p、q$ 为偶数)，其矩阵为 $2n$ 阶复矩阵，形如

$$Z=\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & Z_{14} \\ \widetilde{Z}_{12}^* & Z_{22} & \widetilde{Z}_{14} & Z_{24} \\ -Z_{13}^* & Z_{14}^* & Z_{11}^* & -Z_{12}^* \\ \widetilde{Z}_{14}^* & -Z_{24}^* & -\widetilde{Z}_{12} & Z_{22}^* \end{pmatrix},$$

其中 Z_{ij} 均为复矩阵，Z_{11} 和 Z_{13} 是 p 阶矩阵，Z_{12} 和 Z_{14} 是 $p\times q$ 矩阵. Z_{11} 和 Z_{22} 是反厄密的，Z_{13} 和 Z_{24} 则是对称的.

(4) $so(2n,\mathbf{C})$ 的实形（复扩张为 D_n）.

(a) $so(2n)$ 紧致实形式，其矩阵为 $2n$ 阶实反对称矩阵.

(b) $so(p,q)(p+q=2n, p\geqslant q)$，矩阵为

$$X=\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ \widetilde{X}_2 & X_3 \end{pmatrix},$$

是 $2n$ 阶的实矩阵，其中 X_1 与 X_3 分别为 p 阶与 q 阶反对称矩阵，X_2 是任意的.

(c) $so^*(2n)$，其矩阵为

$$Z=\begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ -Z_2^* & Z_1 \end{pmatrix},$$

是 $2n$ 阶复矩阵，其中 Z_1 与 Z_2 是 n 阶复矩阵，Z_1 是反厄密的，Z_2 则是厄密的.

以上复半单纯李代数的实形，实际上给出实李群的分类. 表 9.1 列出经典实单纯李群的分类.

表 9.1 经典实单纯李群

复扩张	实　群	维　数	不变形式
A_{n-1}	$SU(n)$	n^2-1	$x_1x_1^*+\cdots+x_nx_n^*$
	$SU(p,q)$	n^2-1	$-\sum\limits_{i=1}^{p}x_ix_i^*+\sum\limits_{k=p+1}^{n}x_kx_k^*$
	$SL(n,R)$	n^2-1	单位模群
	$SU^*(2n)$	n^2-1	$(z_1,\cdots,z_n,z_{n+1},\cdots z_{2n})\xrightarrow{\varphi}(z_{n+1}^*,\cdots,z_{2n}^*,-z_1^*,\cdots,-z_n^*)$
B_n	$SO(2n+1)$	$2n^2+1$	$\sum\limits_{i=1}^{2n+1}x_i^2$
	$SO(p,q)$	$2n^2+n$	$\sum\limits_{i=1}^{p}x_i^2-\sum\limits_{k=p+1}^{2n+1}x_k^2$
C_n	$Sp(2n)$	$2n^2+n$	$x_1y_2-x_2y_1+\cdots+x_{2n-1}y_{2n}$
	$Sp(2n,R)$	$2n^2+n$	$x_1y_2-x_2y_1+\cdots+x_{2n-1}y_{2n}$
	$Sp(p,q)$	$2n^2+n$	$x_1y_2-x_2y_1+\cdots+x_{2n-1}y_{2n}$ 和 $-x_1y_1^*-\cdots-x_py_p^*+x_{p+1}y_{p+1}^*+\cdots+x_{2n}y_{2n}^*$
D_n	$SO(2n)$	$2n^2-n$	$\sum\limits_{i=1}^{2n}x_i^2$
	$SO(p,q)$	$2n^2-n$	$-\sum\limits_{i=1}^{p}x_i^2+\sum\limits_{k=p+1}^{2n}x_k^2$
	$SO^*(2n)$	$2n^2-n$	$\sum\limits_{i=1}^{2n}x_i^2$ 和 $\sum\limits_{i=1}^{2n-1}(x_ix_{i+1}^*-x_{i+1}x_i^*)$

表 9.2 给出复半单纯李代数的同构情况. 我们看到,同构主要发生在低维代数. 反映在实单纯李代数的同构关系是

(1) $su(2)\sim so(3)\sim sp(2)\sim su^*$

(2) $su(1,1)\sim so(2,1)\sim sp(2,\mathbf{R})\sim sl(2,\mathbf{R})$.

表 9.2 复半单纯李代数的同构

1	$A_1\sim B_1\sim C_1$
2	$B_2\sim C_2$
3	$D_2\sim A_1\oplus A_1$
4	$A_3\sim D_3$
5	$so(6,2)\sim so^*(8)$

(2) $so(5)\sim sp(4)$,

$so(4,1)\sim sp(2,2)$,

$so(3,2)\sim sp(4,\mathbf{R})$.

(3) $so(4)\sim su(2)\oplus su(2)\sim so(3)\oplus so(3)\sim sp(2)\oplus sp(2)$,

$so^*(4)\sim su(2)\oplus sl(2,\mathbf{R})$,

$so(3,1)\sim sl(2,\mathbf{C})$,

$so(2,2)\sim sl(2,\mathbf{R})\oplus sl(2,\mathbf{R})$.

(4) $su(4)\sim so(6)$,

$su(3,1)\sim so^*(6)$,

$su^*(4)\sim so(5,1)$,

$sl(4,\mathbf{R})\sim so(3,3)$,

$su(2,2)\sim so(4,2)$.

7. 通用覆盖群

对于任意多连通群 G,总存在唯一的一个单连通群 $\tilde{G}$,使 $\tilde{G}$ 可以同胚映射到 G 上去,则 $\tilde{G}$ 称为 G 的通用覆盖群.

群 $\tilde{G}$ 的中心 $\tilde{Z}$ 所包含的一个不变的离散子群 K,使 $\tilde{G}$ 局域同

构于 $\tilde{G}/K$. 反之,对于一个单连通的李群 $\tilde{G}$,存在一个连通的局部同构的李群集合 Γ,其通用覆盖群就是 $\tilde{G}$. 由 $\tilde{G}$ 的商群 $\tilde{G}/K$ 可以得到集合 Γ 的所有成员. 商群 $\tilde{G}/k$ 的中心就是 $\tilde{Z}/K$. $\tilde{G}/K$ 的基本群 $\Pi_1(\tilde{G}/K)\sim$(同构)K.

例 9 $SU(2)$群的中心是 Z_2,因此 $SU(2)/Z_2$ 局部同构于 $SU(2)$. 事实上

$$SU(2)/Z_2 \sim SO(3),$$

$SU(2)$是 $SO(3)$的覆盖群. 这里 $G=SO(3)$,$\tilde{G}=SU(2)$,$K=Z_2$.

例 10 设 $G=SO(2)$,其通用覆盖群 $\tilde{G}=\mathbf{R}$(实数加法群). 由于

$$\Pi_1(SO(2)) = \mathbf{Z}(\text{整数集合}) = Z_\infty = K,$$

所以

$$\tilde{G}/K = \mathbf{R}/Z_\infty \sim G = SO(2).$$

在经典李群中,$SU(e+1)$和 $Sp(2n)$是单连通的,其覆盖群就是其自身. $SO(n)(n>2)$是双连通的,对应的覆盖群叫旋量群,记为 $Spin(n)$. $Spin(2)$覆盖 $SO(n)$两次. 表 9.3 表示局部同构紧致李群 G 的集合及其通用覆盖群.

表 9.3

通用覆盖群$\tilde{G}$	中心 Z	商群$\tilde{G}/K$
$SU(l+1)$	Z_{l+1}	$SU(l+1)/Z_{l+1}$;$SU(l+1)/K$
$Sp(2l)$	Z_2	$SP(2l)/Z_2$
$Spin(2l+1)$	Z_2	$Spin(2l+1)/Z_2\cong SO(2l+1)$
$Spin(2l)$	l 为奇数 Z_4	$Spin(2l)/Z_2\cong SO(2l)$
	l 为偶数 $Z_2\times Z_2$	$SO(2l)/Z_2$

§ 9.4 高次同伦群及其初步应用

基本群 $\Pi_1(G)$是研究紧致李群 G 的整体性质的重要工具，也是判断群的连通性的重要度量.

例 1 $\Pi_1(SU(2))=0$（即只有单位元素），

$\Pi(O(3)) = \Pi_1(SU(2)/Z_2) = Z_2$（模为 2 的整数集合）.

这表示 $SU(2)$是单连通，$O(3)$则是双连通. $SU(2)$与 $O(3)$有 2 $\longrightarrow$1 的同态映射.

例 2 判定非阿贝尔-黑格斯模型的涡流(Vortices). 模型的复标量场 $\varphi(\theta)=e^{in\theta}\varphi_0$，其中 $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$，$\theta$ 为极角；φ_0 为真空期待值；n 则是整数. 相因子构成 $U(1)$群，即映射到 S^1 的群. 映射的类

$$\Pi_1(U(1)) = \Pi_1(SO(2)) = \Pi_1(S') = Z. \tag{9.53}$$

即允许有携带通量 $\Phi_n=n\Phi_1(n=0,\pm1,\cdots)$的涡流存在.

若模型的整体对称性是 $SU(N)$或 $SU(N)/N$，则由于

$$\Pi_1(SU(N)) = 0, \tag{9.54}$$

或

$$\Pi_1(SU(N)/Z_N) = Z_N(\text{模为 } N \text{ 的整数集合}), \tag{9.55}$$

具体选用(9.54)还是(9.55)式，取决于黑格斯场的表示. 若用(9.54)式，则模型没有涡流解；若用(9.55)式，则模型有 N 种不同通量的涡流解

$$\Phi_n = n\Phi_1 \quad (n = 0, \pm 1,\cdots,\text{模为 } N).$$

1. 高次同伦群 $\Pi_n(T)$

考虑 n 维立方体 $I^n=I\times I\times\cdots\times I(n$ 项)，或写作

$$I^n = \{t = (t_1,t_2,\cdots,t_n)\,|\,0 \leqslant t_i \leqslant 1, i = 1,\cdots,n\}. \tag{9.56}$$

其边界

$$\partial I^n = \{t(t_1,\cdots,t_n),\text{某些 } t_i = 0 \text{ 或 } 1\} \quad (i = 1,\cdots,n) \tag{9.57}$$

在拓扑上等价(identified). I^n 在拓扑上等价 n 维球 S^n. 设连续映射 $f(t)$,使

$$\begin{cases} I^n \longrightarrow T(\text{拓扑空间}), \\ \partial I^n \longrightarrow y_0 \in T(y_0 \text{为固定点}), \end{cases} \tag{9.58}$$

这里得到的具有固定点 $f(\partial I^n)=y_0$ 的映射(闭合"曲面")同伦类,构成一个群,称为第 n 次同伦群,记为 $\Pi_n(T)$.

实际上,可令映射(9.58)式的集合记为 $F_n(T,y_0)$.

在 $F_n(T,y_0)$ 的同伦关系"$\sim y_0$"中,对于 $F_n(T,y_0)$ 的两个元素 $f(t)$、$g(t)$,存在连续映射 h,使得 $I^n\times I\to T$,即 $h(t_1,t_2,\cdots,t_n;x)$可使

$$\begin{cases} h(t_1,\cdots,t_n;0) = f(t_1,\cdots,t_n), \\ h(t_1,\cdots,t_n;1) = g(t_1,\cdots,t_n), \end{cases}$$
$$(t_1,t_2,\cdots,t_n) \in I^n \tag{9.59}$$

以及

$$h(t_1,\cdots,t_n;x) = y_0 \quad ((t_1,\cdots,t_n) \in \partial I^n, x \in I). \tag{9.60}$$

则元素 $f(t)$与 $g(t)$称为同伦等价的,记作

$$f \overset{x_0}{\sim} g. \tag{9.61}$$

在集合 $F_n(t,y_0)$中与元素 f 同伦的所有元素构成一个同伦类,记为$\{f\}$. 形如$\{f\}$的所有同伦类的集合记为 $\Pi_n(T,y_0)$.

在集合 $F_n(T,y_0)$中定义乘法运算"$\circ$":

$$f(t)\circ g(t)=\begin{cases} f(2t_1,t_2,\cdots,t_n), & 0\leqslant t_1\leqslant\dfrac{1}{2}, \\ g(2t_1-1,t_2,\cdots,t_n), & \dfrac{1}{2}\leqslant t_1\leqslant 1. \end{cases} \tag{9.62}$$

然后由 $F_n(T,y_0)$的运算"$\circ$"导出 $\Pi_n(T,y_0)$上的运算"$\cdot$":

$$\{f\}\cdot\{g\} = \{f\circ g\}. \tag{9.63}$$

可以证明集合 $\Pi_n(T,y_0)$在运算"$\cdot$"下构成一个群,即以 y_0 为基点的第 n 次同伦群 $\Pi_n(T,y_0)$. 可证明它与 $\Pi_1(T,y_0)$的情况完全相似. 此时单位元是$\{e\}\equiv\{C\}$,$C(I^n)=y_0$. $\{f\}$的逆元是

$\{f^{-1}\}$，而

$$f^{-1}(t_1,t_2,\cdots,t_n\} = f(1-t_1,t_2,\cdots,t_n),$$

$$(t_1,t_2,\cdots,t_n) \in I^n. \qquad (9.64)$$

群 $\Pi_n(T,y_0)$亦为离散群.

若拓扑空间 T 是路径连通的，而点 $y_1,y_2\in T$，则与 Π_1 的情况一样，可以证明 $\Pi_n(T,x_1)$与 $\Pi_n(T,x_2)$路径同构. 因此对于路径连通的拓扑空间，存在与基点无关的抽象的第 n 次同伦群，以后记为 $\Pi_n(T)$.

$\Pi_n(T)$的若干重要性质：

(1) 若 G 为拓扑群，其单位元为 e，则 $\Pi_1(G,e)$是阿贝尔群.

(2) 若 T 为任意拓扑空间，对于 $n\geqslant 2$，$\Pi_n(T,y_0)$是阿贝尔群.

(3) 若 S^n 为 n 维球，则

$k<n$，$\Pi_k(S^n)=\{0\}$ （仅有单位元的平庸群），

$k>1$，$\Pi_k(S^1)=\{0\}$，

$n\geqslant 1$，$\Pi_n(S^n)=\mathbf{Z}$ （整数加法群）. (9.65)

(4) 若 T 在保持 y_0 点不动的同伦变换下是可以压缩的(contractible)，则对 $n\geqslant 1$，有

$$\Pi_n(T,x_0) = \{0\}. \qquad (9.66)$$

如实轴 $\mathbf{R}$、一个区间、任意欧氏空间、欧氏空间中的凸集合，等等.

在表 9.4 中我们列出与物理学关系较为密切的若干同伦群，供读者参考.

表 9.4 不同流形的同伦群表

T \ Π_n	$U(1)$	$SU(2)$	$N>3$ $SU(N)$	$SO(3)$	$SO(4)$	$SO(5)$	$SO(6)$	$N>7$ $SO(N)$	$Sp(N)$
$\Pi_1(T)$	Z	0	0	Z_2	Z_2	Z_2	Z_2	Z_2	0
$\Pi_2(T)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\Pi_3(T)$	0	Z	Z	Z	Z、Z	Z	Z	Z	Z
$\Pi_4(T)$	0	Z_2	0	Z_2	Z_2,Z_2	Z_2	0	0	Z_2
$\Pi_5(T)$	0	Z_2	Z	Z_2	Z_2,Z_2	Z_2	Z	0	Z_2

应用示例——周期真空理论.

设 $A_i^a(a=1,2,3;i=1,2,3,4)$为 $G=SU(2)$的杨-米尔斯场，

$$\lim_{t\to\pm\infty} E_i^a = 0, \quad \lim_{t\to\pm\infty} H^a = 0, \tag{9.67}$$

（系统的始态、末态处于真空）

其中场强张量为

$$E_i^a = \frac{\partial A_i^a}{\partial t},$$

$$\varepsilon_{ijk}H_k = \partial_i A_j^a - \partial_j A_i^a + C^{abc}A_i^b A_j^c, \quad \text{（哑指标求和）} \tag{9.68}$$

因此纯规范项是

$$A_j(x) = \mathrm{i}g^{-1}(x)\partial_j g(x) \quad (x \in S^3, g \in G), \tag{9.69}$$

这里矩阵

$$A_j \equiv \sum_a A_j^a \tau^a, \tag{9.70}$$

其中 τ^a 为群 G 的伴随矩阵表示. 它应遵从边界条件

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{\mathrm{d}A_i(x,t)}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{9.71}$$

当$|x|\to\infty$时，不管什么方向，群元 $g(x)$都趋于同一群元，即空间的无限远处对应于确定点. 由此可见，我们应有同伦 $S^3 \longrightarrow G$（等价 $I^3\to G$）. 这里可以利用

$$\Pi_3(SU(2)) = \Pi_3(S^3) = Z \quad \text{（整数群）},$$

此式表明存在离散的拓扑不等价的无穷多真空态，可以记为$|n\rangle$. $Z=\{n\}$，其中整数 n 此时称为覆盖数(wrapping number).

可以证明，对于规范变换

$$\begin{cases} A_j \longrightarrow U^{-1}A_j U + \mathrm{i}U^{-1}\partial_j U, \\ U(x) = \exp\{\mathrm{i}\lambda^a(x)\tau^a\}. \end{cases} \tag{9.72}$$

若 $\lambda^a(x)=0$，当$|x|=+\infty$时，$|n\rangle$只是在同一拓扑类$\{|n^{(\lambda)}\rangle\}$真空之间变换. 反之，当$|x|=+\infty$时，$\lambda^a(x)\neq 0$，则变换到其它拓扑类的真空：

$$T|n\rangle = |n+1\rangle, \tag{9.73}$$

其中规范变换算子 T 具有性质

$$[T,H]=0, \tag{9.74}$$

即能量本征态即其本征态. 由于 T 的幺正性，故其本征值为 $e^{-i\theta}(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$. 令真实真空本征态为 $|\theta\rangle$，即

$$T|\theta\rangle = e^{-i\theta}|\theta\rangle, \tag{9.75}$$

这里 θ 为运动常数. 它可以表示真空的周期性. 真空 $|\theta\rangle$ 因此又称 θ 真空，可以表示为覆盖真空的组合

$$|\theta\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta}|n\rangle. \tag{9.76}$$

实际上，由(9.76)式有

$$\begin{aligned} T|\theta\rangle &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta}T|n\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta}|n+1\rangle \\ &= e^{-i\theta}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i(n+1)\theta}|n+1\rangle = e^{-i\theta}|\theta\rangle, \end{aligned}$$

回到定义式(9.75).

在不同类真空之间量子隧道效应，应用跃迁振幅（推导从略）

$$\langle m|e^{-iHT_0}|n\rangle \xrightarrow{T_0\to\infty} \exp\left[\frac{-8\pi^2|n-m|}{g^2}\right][1+O(g^2)+\cdots]$$

(这里 g 为强耦合常数). $\qquad$ (9.77)

此振幅由所谓瞬子(Instaton)解确定. 瞬子解的存在导致真空态重新定义.

对于 $G=SU(3)$，由于 $\Pi_3(SU(3))=\Pi_3(SU(2))=Z$，以上 θ 真空理论大致不变.

例 3 对于 $SU(2)$理论，其伴随表示矩阵

$$Z=\begin{pmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{pmatrix}, \tag{9.78}$$

显然具有性质：$Z^1=Z^{-1}$，$\det Z=1$. $\det Z=1$ 就是

$$a^2+b^2+c^2+d^2=1, \tag{9.79}$$

这一条件等价于 S^3. 由此可见，对应映射 $SU(2)\longrightarrow S^3$，

$$\Pi_3(SU(2)) = \Pi_3(S^3) = Z. \tag{9.80}$$

此式表明在 $SU(2)$的 Yang-Mills 理论中，确实存在无限多个拓扑不等价的真空.

§9.5 相对同伦群与正合序列

以上定义的高次($n>1$)同伦群 $\Pi_n(T,y_0)$是基于映射 $f:I^n \longrightarrow T,\partial I^n \longrightarrow y_0$，可以称之为“绝对”同伦群，其中 ∂I^n 表示 n 维立方体的界面. 将此定义适当推广就可以定义“相对”同伦群. 绝对同伦群是相对同伦群的特殊情况.

1. 相对同伦群

设 A 为拓扑空间 T 的子集合，且 $y_0\in A$，若有映射

$$\begin{cases} f:I^n \longrightarrow T \\ \partial^{(n-1)'}I(\text{一个表面}) \longrightarrow A, \\ \partial^{(n-1)}I(\text{其余表面}) \longrightarrow y_0 \end{cases}$$

由此得到的具有一个固定点 y_0 与集合 A 的映射同伦群，称为 n 次相对同伦群，记为 $\Pi_n(T,A,y_0)$.

如果 $y_0=A$，$\Pi_n(T,A,y_0)$就还原为绝对同伦群 $\Pi_n(T,y_0)$. 同时，由于 A 是拓扑空间 T 的一个子集合(子空间)，因此 $\Pi_n(A,y_0)$亦为定义在 A 上的绝对同伦群.

在 $\Pi_n(T,A,y_0)$中，群运算的定义类似于 $\Pi_n(T,y_0)$. 有关成群的证明，请参阅 P. J. 希尔顿的《同伦论》(科学出版社，1960，p17～19). 有关拓扑映射可直观表示在图 9.5 中.

显然，由于 $A\subset T$，故 $\Pi_n(A,y_0)$与 $\Pi_n(T,y_0)$同态. 同样，由于 $y_0\in A$，故 $\Pi_n(T,y_0)$与 $\Pi_n(T,A,y_0)$同态. 由于在映射 $I^n\rightarrow(T,A,y_0)$中，实际上已隐含 ∂I^{n-1}映射到(A,x_0)(此处 $\partial^{(n-1)}I = \partial^{(n-1)'}I+\partial^{(n-1)''}I$)，故 $\Pi_n(T,A,y_0)$与 $\Pi_{n-1}(A,y_0)$同态. 由此得到同伦群的下述同态序列：

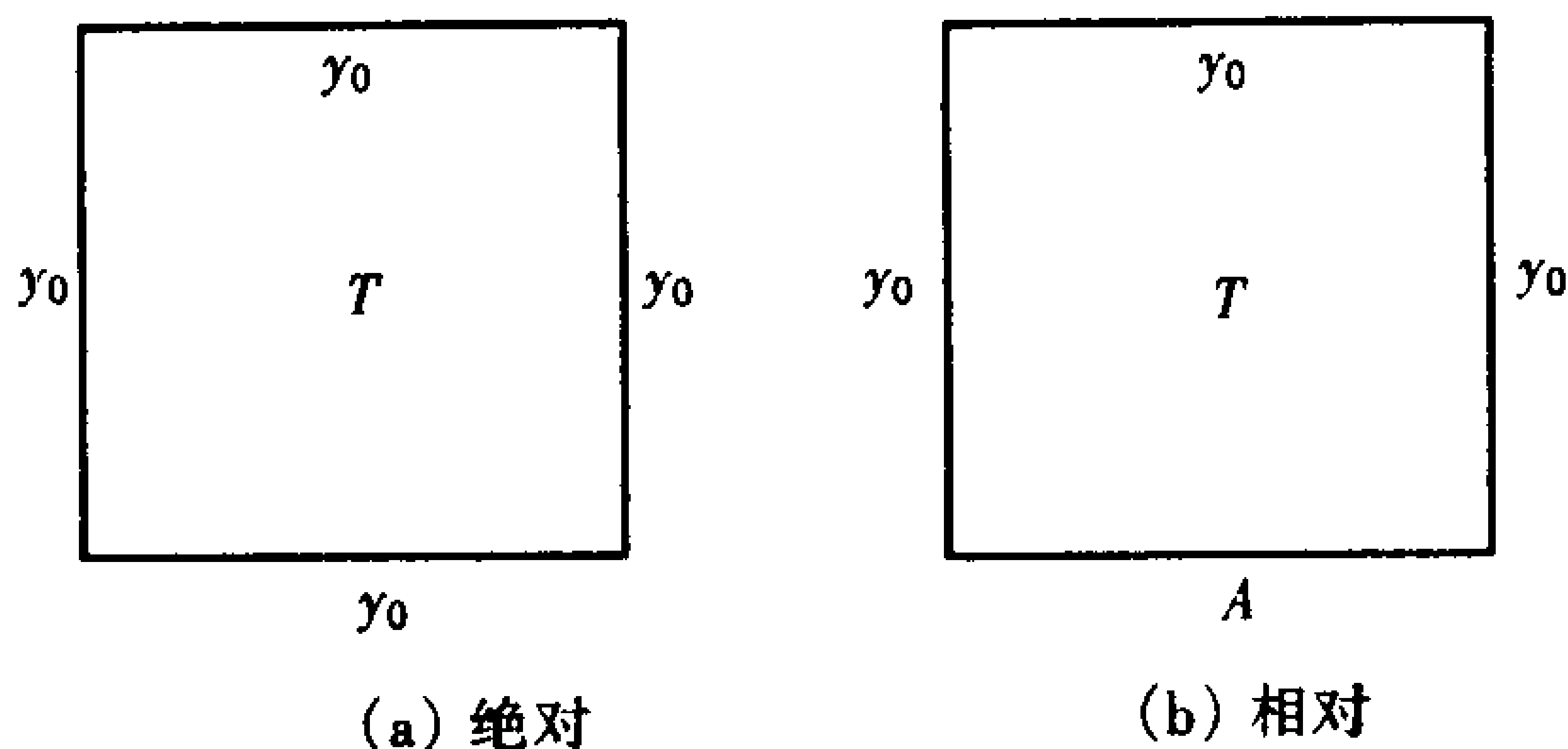


图 9.5　绝对与相对同伦群映射

$$\begin{aligned}&\cdots\Pi_{n+1}(T,A,y_0)\to\Pi_n(A,y_0)\to\Pi_1(T,y_0)\to\cdots\\&\cdots\Pi_2(T,A,y_0)\to\Pi_1(A,y_0)\to\Pi_1(T,A,y_0)\\&\to\Pi_0(A)\to\Pi_0(T).\end{aligned}\tag{9.81}$$

序列中"→"表示同态映射，符号 ↓‾‾‾↓ 则表示沿映射方向同伦群次数降低一次的"周期". 这里零同伦群 $\Pi_0(T)$的定义是 T/T_0，其中 T_0 为包含单位元素的拓扑叶. T/T_0 即混合空间的叶数.

例 1　设恒等变换 $A,y_0\to A,y_0,T,A,y_0\to T,A,y_0$ 诱导出变换

$$\begin{cases}i:\ \Pi_n(A,y_0)\longrightarrow\Pi_n(T,y_0),\\ j:\ \Pi_n(T,y_0)\longrightarrow\Pi_n(T,A,y_0),\end{cases}\tag{9.82}$$

由定义显见是同态映射. 证明见例 2 与例 3.

例 2　设映射

$$f:\ I^n,\partial^n I\longrightarrow A,y_0$$

表示 $\partial\in\Pi_n(A,y_0)$，则映射 $f':I^n\longrightarrow A$ 有关系

$$f\sim f'.$$

在此同伦下，I^n 中的像点描出一条代表 $\xi^{-1}\in\Pi_1(A,y_0)$的闭曲线. 于是，$f':I^n,\partial^n I\longrightarrow A,y_0$ 代表 $\xi(a)$. 这个映像 f 可当作是下列映像 $I^n,\partial^n\longrightarrow T,y_0$ 代表着 $i(\xi(\alpha))$. 此时的 f 表示映射 $I^n,\partial^n\longrightarrow T,y_0$，就代表 $i(\alpha)$. 同时，$f\sim f'$表示如下同伦：根据 $\Pi_1(A,y_0)$在 Π_n

(T,y_0)上运算的定义，它变 $i(\alpha)$ 为 $i(\xi(\alpha))$，于是 i 是一个运算同态.

例 3 设 $\alpha\in\Pi_n(T,y_0)$ 由 $f:I^n,\partial^n\longrightarrow I^n,\partial^n\longrightarrow T,y_0$ 代表. 于是，作为直接推论，f 的一个使得 I^n 的像点代表一条 $\xi^{-1}\in\Pi_1(A,y)$的闭曲线的同伦，就是一个使得 I^{n-1}保留在 A 内而 $\partial^{n-1}I$ 的像点描出一条代表 $\xi^{-1}\in\Pi_1(A,y_0)$的闭曲线的同伦，故 $j(\xi(\alpha))=\xi(j(\alpha))$.

换言之，i 与 j 是关系 $\Pi_1(A,y_0)$的中运算子同态.

正合序列的意思是：若同态序列

$$\cdots\longrightarrow G_1\xrightarrow{\varphi_1}G_2\xrightarrow{\varphi_2}G_3\xrightarrow{\varphi_3}G_4\cdots \tag{9.83}$$

中，$G_i(i=1,2,\cdots)$表示群，$\varphi_i(i=1,2,\cdots)$表同态映射，并且每一步同态映射的像就是下一步同态映射的核. 亦即在映射

$$\cdots\xrightarrow{\varphi_{i-1}}G_i\xrightarrow{\varphi_i}\cdots \tag{9.84}$$

中，有

$$\mathrm{im}\varphi_{i-1}=\mathrm{Ker}\varphi_i, \tag{9.85}$$

其中 $\mathrm{im}\varphi_{i-1}$表示映射 φ_{i-1}的像，$\mathrm{Ker}\varphi_i$表示映射 φ_i 的核. 注意，$\mathrm{im}\varphi_{i-1}\in G_i$，$\mathrm{Ker}\varphi_i\in G_i$.

可以证明，同态序列(9.81)是正合序列. 详细证明见希尔顿的《同伦论》.

例 4 证明 $ji\Pi_n(A)=0$.

设 $\alpha\in\Pi_n(A)$由

$$f:\ I^n,\partial^nI\longrightarrow A,y_0$$

代表. 于是 $ji(\alpha)$由

$$f:\ I^n,\partial^{n'}I,\partial^{n''}I\longrightarrow T,A,y_0$$

代表，其中 $f(I^n)\subset A$. 因为 I^n 可以拓扑收缩为一点 $x_0=(0,0,\cdots,0)$，就是 $ji\alpha=0$.

例 5 证明 $dj\Pi_n(A)=0$，其中 d 表示边缘同态：$n\geqslant2$，

$$\Pi_n(T,A,y_0)\longrightarrow\Pi_{n-1}(A,y_0). \tag{9.86}$$

设 $f:I^n,\partial^{n'}I,\partial^{n''}I\longrightarrow T,A,y_0$ 代表 $\alpha\in\Pi(T,A,y_0)$. 于是

$f|I^{n-1}:\partial^{n'}I,\partial^{n''}I\longrightarrow A,y_0$ 表示一个元素 $\beta\in\Pi_{n-1}(A,y_0)$. 显然 d 只依赖于 α,故可记 $\beta=d(\alpha)$.

又设 $\alpha\in\Pi_n(T)$,由

$$f:I^n,\partial^n I\longrightarrow T,y_0$$

代表. 于是 $dj\alpha$ 由

$$f|\partial^n:\partial^{n'},\partial^{n''}\longrightarrow A,y_0$$

代表. 但是 $f(\partial^n I)=y_0$,所以 $dj(\alpha)=0$.

正合序列的重要性质:

(1) 如果 G 是路径连通的,则有

$$\Pi_0(G)=0.$$

(2) 如果 G 是李群,则

$$\Pi_2(G)=\{0\}\quad(\text{仅包含单位元的平庸群}).$$

(3) 如果 G 是单连通的,则

$$\Pi_1(G)=\{0\}.$$

暂且不证明以上性质. 为了进一步考察正合序列的性质,引入与拓扑空间 T 对应的陪集空间 G/H,这里 G 是李群,H 是其子群,不要求一定是正则的.

设 T 为拓扑空间 $T\{f\}$. 变换群 G 作用于 T 上:$\forall\ f_i,f_j\in T$,对应有 $g\in G$,

$$f_i=gf_j.$$

我们称此群传递性地作用于 T. 群 G 不必唯一.

对于确定 $f\in T$,定义 f 的小群 H_f:$\forall\ g\in H_f$,有 $gf=f'\in H_f$. 显然子群 $H_f\subset G$. 我们称子群 H_f 为 f 的各向同性子群,或迷向子群,或 f 的固定子(fizer).

若 $f_2=gf_1$,则 $Hf_2=gHf_1g^{-1}$. 因此可以选择任一标准元素 f 作为参照量. 在变换 $f'=gf$ 下,一切数学结构,为群结构、拓扑结构均由自同构 $G\longrightarrow gGg^{-1}$,$H\longrightarrow gHg^{-1}$(不变)所确定. 因此在同构意义上,可以略去 H_f 的下标 f,以后子群记为 H.

在问题 1 中,证明了拓扑空间与上述陪集空间 G/H 有一一对

应的关系，且对应是连续的. 特别是，当 H 为正规子群时，G/H 就是一个群. 在物理应用中，陪集空间是序参量空间.

例 6 平面自旋.

如果选择序参量为平面上单位矢量，变换群为 $SO(2)$（定轴转动），此时迷向子群 $H=\{e\}$（单位元素），陪集空间 $T=G/H=SO(2)$.

变换群 G 的选择并非唯一的. 本例可以选择 $G=O(2)$，则相应 $H=(E,i)$（反射群). 同时 G 还可以选择为一维平移群 $T(1)$，则迷向子群 H 为平移 $n\cdot 2\pi(n=0,1,2,\cdots)$ 的分立平移群. 但是，序参量空间 $T=G/H$ 最后均为 $SO(2)$.

在正合序列(9.83)中，设拓扑空间 T 取作序参量空间 G/H，则序列变为

$$\cdots\Pi_n(H)\to\Pi_n(G)\to\Pi_n(G/H)\to\Pi_{n-1}(H)\to$$

$$\cdots\Pi_2(H)\to\Pi_2(G)\to\Pi_2(G/H)\to\Pi_1(H)\to$$

$$\Pi_1(H)\to\Pi_1(G)\to\Pi_1(G/H)\to\Pi_0(H)\to\Pi_0(G) \qquad (9.87)$$

原因如下：取 $eH=H=y_0$，则 T 中的闭曲线（环）$\alpha(t)$ 与 G 中的一个路径 $g(t)$ 相对应：

$$\alpha(t)=g(t)\cdot y_0=g(t)\cdot H.$$

由于

$$\begin{aligned}\alpha(0)=\alpha(t)&=y_0=g(0)y_0\\&=g(t)y_0=g(t)H,\end{aligned}$$

显然，$g(t)$ 的起点与终点均在 H 中，并可选择为单位元 e. 于是路径 $g(t)$ 就表征相对同伦群 $\Pi_1(G,H,e)$ 的一个元素. 因此

$$\begin{cases}[\alpha(t)]\in\Pi_1(T,y_0),\\ [g(t)]\in\Pi_1(T,H,y_0)\end{cases}\text{（[…] 表示同伦类）}. \qquad (9.88)$$

可以证明，

$$\begin{cases} \Pi_1(T, y_0) \underset{(\text{同构})}{\cong} \Pi_1(T, H, e), \\ \Pi_n(T, y_0) \cong \Pi_n(T, H, e) (n > 1). \end{cases} \tag{9.89}$$

故序列(9.83)变为序列(9.87),考虑到性质(1)、(2)、(3),序列(9.87)最后几项变为

$$\begin{aligned} &\{0\} \to \Pi_2(G/H) \to \Pi_1(H) \to \{0\} \\ &\to \Pi_1(G/H) \to \Pi_0(H) \to \{0\}. \end{aligned} \tag{9.90}$$

这是由于若

$$\cdots \to \{0\} \to F \xrightarrow{\varphi} G \to \{0\}, \tag{9.91}$$

必有 $F \cong G$(φ是同构映射). 由序列(9.90)得

$$\Pi_2(G/H) \cong \Pi_1(H) \cong \Pi_1(H_0), \tag{9.92}$$

$$\Pi_1(G/H) \cong \Pi_0(H) \cong H/H_0, \tag{9.93}$$

其中 H_0 为 H 的包含单位元 e 的一叶(子群). 关系(9.92)、(9.93)是非常重要的两个基本定理,在物理应用中,即在求 $\Pi_2(T)$ 与 $\Pi_1(T)$ 时特别重要. 注意公式成立的条件为 G 为单连通.

问　　题

1. 试证拓扑空间 T 与 G/H 有一一连续对应的关系.

[提示:先证有对应. 设 $f \in T, g \in G$,且 $fH = f$. 取 $g \overline{\in} H$,则 $gf = f' \to gHf = f'$,亦即 $f \longleftrightarrow eH, f' \longleftrightarrow gH$,故 $T\{f\}$ 与 $G/H\{gH\}$ 对应.

对应是 1-1 的. 若 $a, b \in G$,但 $a \neq b$,而 $af = bf = f' \longrightarrow f = (a^{-1}b)f$,故 $(a^{-1}b) \in Hf = H$. 因而 $b = a(a^{-1}b)$ 属于陪集 aH,ae 亦属于陪集 aH. a 与 b 均属于同一陪集,于是给定一个 f' 就决定一个唯一陪集.

反之,若给定 $a, b \in G$,且属于同一陪集,必有 $af = bf = f'$,否则 $af \neq bf$,则 $(a^{-1}b) \overline{\in} H$,$a$、$b$ 不能属于同一陪集,与假设矛盾. 于是一个陪集决定一个 f'.

最后证连续性. 对于一个陪集序列 g_nH，当且仅当 g_n 是 G 中一个收敛序列时，g_nH 才是收敛的. 因此 G/H 中的收敛序列 g_nH 对应于 T 中的收敛序列 $f_n=g_nf$. 反之，T 中的收敛序列可以用 G/H 中收敛序列表征. 因为若序列 f_n 收敛于 $\overline{f}$，则对于 G 中 e 的任意小邻域 U 会存在一个大的整数 N，使得 $n>N$ 时，$f_n=e_n\overline{f}$，$e_n\in U$. 如果 $\overline{f}$ 由陪集 K 表示，则 f_n 由 e_nK 表示. 此序列收敛到 $eK=K$.]

2. 由(9.90)式证明(9.92)和(9.93)式.

[提示：先证若

$$\cdots \overline{F} \xrightarrow{\varphi_1} G \xrightarrow{\varphi_0} \{0\},$$

则 φ_1 的像包括 G 的全体. 这是由正合性决定的. 由于 $G/G_0\cong\{0\}$，故 $G\cong G_0$，即 $G=\mathrm{Ker}\varphi_0$(核)$=G_0$，$\mathrm{im}\varphi_1$(像)$=\mathrm{Ker}\varphi_0$(正合性)$=G$，换言之，φ_1 是满映射.

续证若

$$\cdots \to \{0\} \xrightarrow{\phi} F \xrightarrow{\varphi} G \to \cdots,$$

则 φ_1 为 1-1 映射. 由于 $\mathrm{im}\phi=\mathrm{Ker}\varphi$，且 $\mathrm{im}\phi=e\in F$，$\mathrm{Ker}\varphi=e$，即 1-1映射.

由此可知

$$\cdots \to \{0\}F \to \xrightarrow{\varphi} G \to \{0\}\cdots$$

中，映射 φ 必为 1-1 的满映射，即同构映射.)

3. 证明若 G 为连续群，G_0 为其包含单位元的一叶，则 G_0 必为 G 的正规子群.

[提示：为此只需证明，对于$\forall\ g,h\in G_0$，有 $gh^{-1}\in G$. 由于 G_0 中含有 e，故必有路径

$$g(t):\ g(0)=e, g(t)=g,$$
$$h(t):\ h(0)=e, h(t)=h(h^{-1}(0)=e, h^{-1}(t)=h^{-1}).$$

但 $g(t)h^{-1}(t)=\begin{cases}g(0)h^{-1}(0)=e,\\ g(t)h^{-1}(t)=g\cdot h^{-1}\end{cases}$ 是 G_0 中连续路径，始于 e，终于 gh^{-1}. 即 $gh^{-1}\in G_0$，G_0 确为 G 的子群.

设$\forall g\in G$，$\forall h\in G$. 令 $h(t)$ 是 G_0 中由 e 到 h 的连续路径：$h(0)=e$，$h(t)=h$，则 $gh(t)g^{-1}$必为 G 中连续路径，始于 $gh(0)g^{-1}=geg^{-1}=e\in G_0$，终于 $gh(t)g^{-1}=ghg^{-1}$. 由于始点 e 在 G_0 中，由 G_0 的定义，终于 $ghg^{-1}\in G_0$.]

4. 设 $H=SO(2)$，给出一般三维自旋的序参量空间.

[提示：$T=SO(3)/SO(2)$，$G=SO(3)$. 亦可选择 $G=SU(2)$，则 H 为 $SO(2)$为 $SU(2)$中的同态像，即 $SU(2)$中使子轴不变的子群. 设

$$U(\hat{z},\theta)=E\cos\theta/2+\mathrm{i}\sigma_z\sin\theta/2=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}\end{pmatrix}\text{（幺正矩阵）},$$

其中 E 为 2×2 单位矩阵，σ_z 为泡利矩阵

$$\sigma_z=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

显然 $H=U(1)$，即相位因子群.]

5. 向列液晶的变换群同于一般三维自旋，$H=D_\infty$，即绕分子轴的任意转动加上绕垂直于分子轴的轴的转动 π 所构成的群. 给出相应的序参量空间 T.

[提示：$G=SO(3)$，$T=SO(3)/D_\infty$，或 $G=SU(2)$，则 H 为 D_∞在 $SU(2)$中的同态像，即包含变换 $i:z\longrightarrow -z$，或绕 y 轴转动 π，

$$\pm u(y,\pi)=\pm\mathrm{i}\sigma_y=\pm\mathrm{i}\begin{pmatrix}0 & \mathrm{i}\\ -\mathrm{i} & 0\end{pmatrix}=\pm\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

于是 H 的群元分两组，即 $u(\hat{z},\theta)$和

$$v(\hat{z},\theta)=u(\hat{z},\theta)(\mathrm{i}\sigma_y)=\begin{pmatrix}0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}\\ -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2} & 0\end{pmatrix}.$$

可以表示为

$$H=[\{u(\hat{z},\theta)\equiv H_0,\{v(\hat{z},\theta)\}=H_0(i\sigma_y)]$$

$$= \{H_0, H_0(\mathrm{i}\sigma_y)\} = \{U(1), U(1)(\mathrm{i}\sigma_y)\}.\ ]$$

6. 双轴相列液晶的变换群同于一般三维自旋，其迷向子群 $H=D_2$（分子点群），给出其序参量空间 T.

[提示：$T=SO(3)/D_2$. 如果取单连通群 $SU(2)=G$，则 H 应取 D_2 在 $SU(2)$ 中的同态映射：

$$\begin{cases} e \to \pm\ e, \\ R(\hat{n},\pi) \to \pm\ u(\hat{n},\pi), \end{cases} \tag{9.94}$$

其中 $\pm u(\hat{n},\pi)=\pm(E\cos\pi/2+\mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\sin\theta/2)=\pm\mathrm{i}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}$，$\boldsymbol{n}$ 为转动轴的单位矢量(n_x,n_y,n_z). 因此 $H=(\pm e,\pm\mathrm{i}\sigma_x,\pm\mathrm{i}\sigma_y,\pm\mathrm{i}\sigma_z)$，它与四元素群同构. 即 $H\cong\overline{Q}$.

所谓四元素群 $Q=\{1,i,j,k\}$满足

$$i^2=j^2=k^2=-1,\quad ij=-ji=k(\text{循环}).$$

四元素群 $\overline{Q}=(\pm1,\pm i,\pm j,\pm k)$.]

四元素群分 5 类，$C_0=\{1\}$，$\overline{C_0}=\{-1\}$，$C_1=\{\pm i\}$，$C_2=\{\pm j\}$，$C_3=\{\pm k\}$. 类乘法如表 9.5.

表 9.5

C_i \ C_j	C_0	$\overline{C_0}$	C_1	C_2	C_3
C_0	C_0	$\overline{C_0}$	C_1	C_2	C_3
$\overline{C_0}$	$\overline{C_0}$	C_0	C_1	C_2	C_3
C_1	C_1	C_1	$2(C_0+\overline{C_0})$	$2C_3$	$2C_2$
C_2	C_2	C_2	$2C_3$	$2(C_0+\overline{C_0})$	$2C_1$
C_3	C_3	C_3	$2C_4$	$2C_1$	$2(C_0+\overline{C_0})$

实际上，四元素群还可以表示为

$$Q=\{\pm E,\ \pm\mathrm{i}\sigma_x,\ \pm\mathrm{i}\sigma_y,\ \pm\mathrm{i}\sigma_z\},$$

这里 E 为 2×2 单位矩阵，σ_x,σ_y 与 σ_z 为泡利矩阵.]

§ 9.6 缺陷与同伦群

连续介质的缺陷可以用同伦群极其容易地描写. 简言之，利用

序参量空间 $T=G/H$ 中的同伦群元表征、分类，缺陷的并合则通过同伦群的乘法表示.

设有一平面序参量场 $\boldsymbol{S}(x,y)=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})$，其中 p 点为奇点. 所谓"点缺陷"，可以认为是在 p 点邻域(如半径 d 的圆以外的区域，$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})$处处连续. 在半径大于 d 的圆 C 上，$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})$应是连续的. 设 B 为 C 上任意点，将 $\boldsymbol{S}(B)$在拓扑空间 T 中标出，令 B 在实空间 C 上逆时针环行一周，即转过 2π，设 B'为 B 在拓扑空间的映射，则 B'在 T 空间相应环行 $2n\pi$，其中 $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$. 此时整数 n 叫绕数. 如图 9.6(a)、(b)所示.

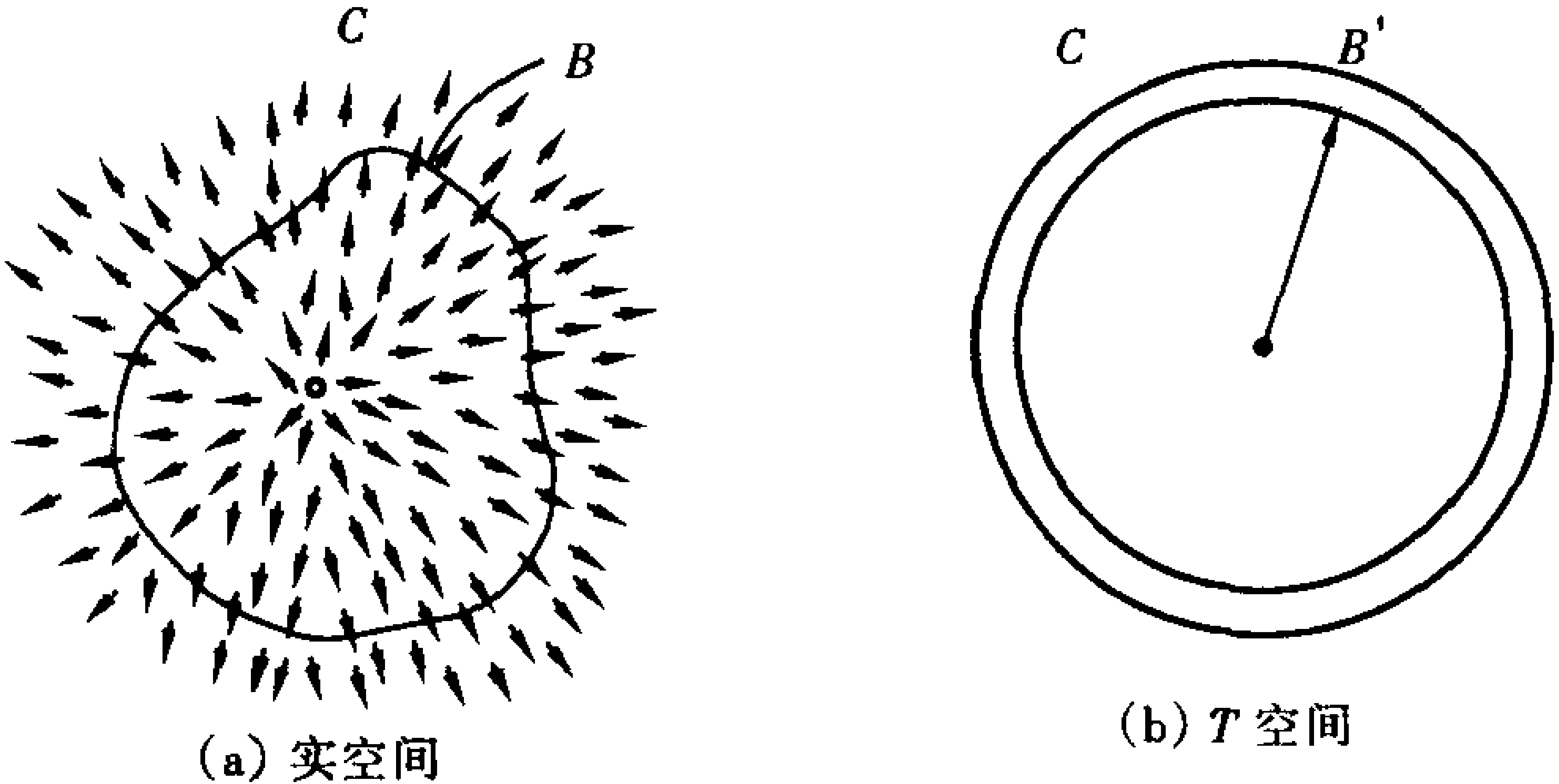


图 9.6 实空间与 T 空间中的点缺陷(绕数)

此处问题的本质在于，在 P 点的极小邻域之处，$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})$的函数形式给出，处处连续. 我们可以根据此邻域外 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})$的行为，判断 P 点是否为场 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})$的奇点，亦即是否为缺陷.

图 9.7 表示的是 $n\neq0$ 的点缺陷组态的实例. 令圆 C 半径连续收缩，就生成一族圆周. 由于 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})$除 P 点外，处处连续，而 n 取值又具有离散性，因而对应这样生成的同一圆族的 n，应取同一数值. 若 $n\neq0$，则 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})$的导数必然发散，称 P 为奇点，对应物理上的缺陷.

当 $n=0$，相应组态如图 9.8 所示，相应的奇点是"岐点"，实际

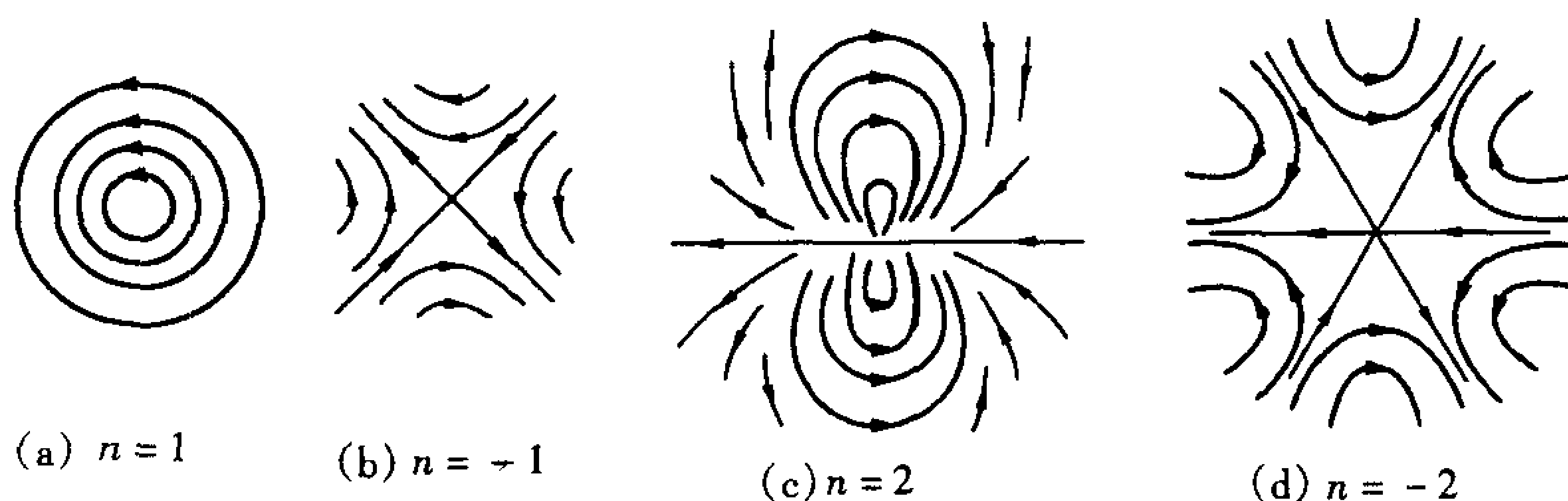


图 9.7 T 空间中平面自旋系统 n 种点缺陷组态

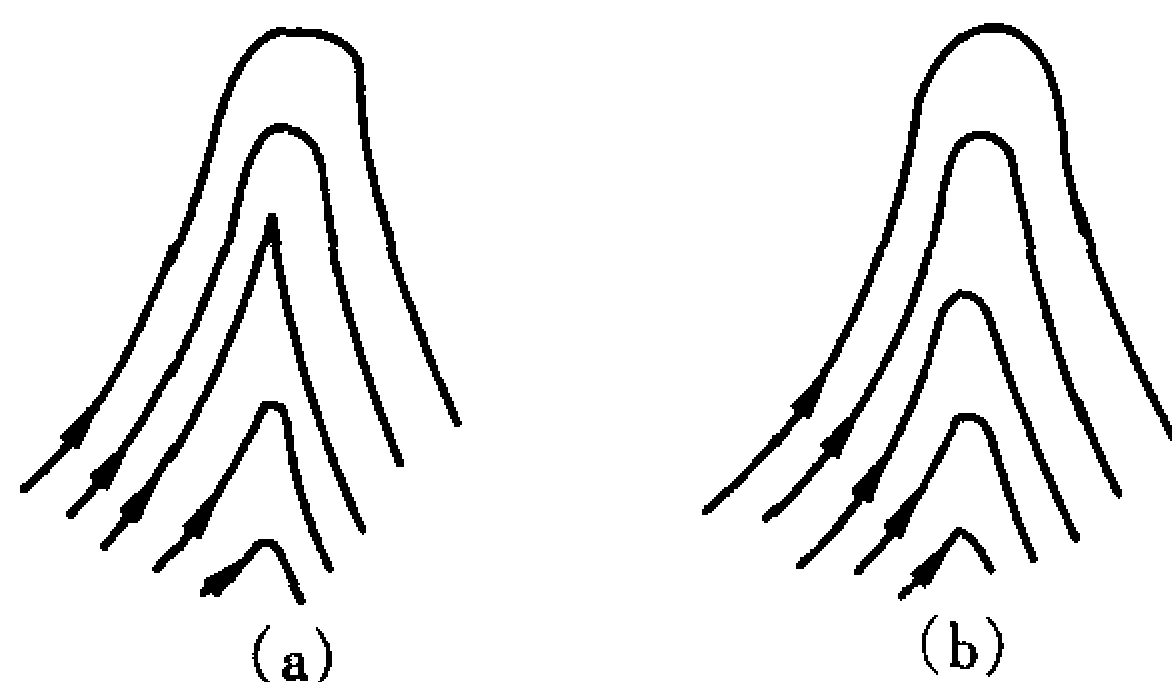


图 9.8 $n=0$ 平面自旋的组态

上可以通过局部的调整或形象地称“手术”，亦即“连续变化”加以“消除”，称为可去奇点. 反之，$n\neq 0$ 的奇点，无法通过局部调整消除，称为不可去奇点.

我们先讨论二维系统的点缺陷，或三维系统的线缺陷问题. 凡 n 相同的映像，均可通过局部调整，变为相同的组态，称为同一同伦类. 在 T 空间同伦群群元用 n 标志，而在实空间 n 则表示一类缺陷，这就是何以可用序参数空间 T 上的同伦群群元对缺陷分类的原因.

同一类缺陷可以互相转化，它们之间在拓扑上是无障碍的，不同类缺陷不能相互转化，它们之间存在着拓扑障碍，这往往意味着耗费无限大的能量.

二维系统的点缺陷，或三维系统的线缺陷，若相应的序参量空

间 $T=G/H$，则其同伦类由

$$\Pi_1(G/H) = H/H_0(\Pi_0(H)) \tag{9.95}$$

表示，其中 H_0 为 H 的含单位元 e 的一叶.

例 1 平面自旋.

序参量 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{i}\cos\theta+\boldsymbol{j}\sin\theta$；

变换群 $G=T(1)$；$T\phi(\theta)\rightarrow\theta-\phi$；

迷向群 $H=\{T_{2\pi}(n),n=0,\pm1,\pm2,\cdots,\}$；

离散群 $H_0=\{e\}$. (9.96)

因此，

$$\Pi_1(T) = H = Z \quad (\text{整数加法群}). \tag{9.97}$$

例 2 一般自旋(令参考轴为 Z 轴).

一般可令

$$\boldsymbol{S} = R(\boldsymbol{n},\theta)\hat{\boldsymbol{Z}},$$

其中 $\hat{\boldsymbol{Z}}$ 表示沿子轴单位矢，$R(\boldsymbol{n},\theta)$ 表示绕 $\boldsymbol{n}$ 轴转动 θ 角. 另一个等价表示是，变换群不选择 $SO(3)$，而选择单连通的 $SU(2)=G$，则代替 $\boldsymbol{S}$ 用 h 表示，

$$h = (\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = u^{-1}(\boldsymbol{n},\theta)\sigma_z u(\boldsymbol{n},\theta), \tag{9.98}$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}=\sigma_x\boldsymbol{i}+\sigma_y\boldsymbol{j}+\sigma_z\boldsymbol{k}$ 为泡利矩阵，$u^{-1}(\boldsymbol{n},\theta)=\widetilde{u}(\boldsymbol{n},\theta)$，$u(\boldsymbol{n},\theta)=E\cos(\theta/2)+\mathrm{i}(\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma})\sin\theta/2$，是 $SU(2)$的群元.

迷向群 H 群元

$$u(\hat{\boldsymbol{Z}},\theta) = E\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \mathrm{i}\sigma_z\sin\frac{\theta}{2} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\theta}{2}} \end{pmatrix}. \tag{9.99}$$

H 显然为单连通群，故 $H_0=H$，$H/H_0=\{0\}$. 因此

$$\Pi_1(T) = \{0\}. \tag{9.100}$$

就是说，三维自旋系统没有稳定的线缺陷.

例 3 向列液晶.

$G=SU(2)$，但迷向群 H 还包含变换 $\hat{\boldsymbol{Z}}\rightarrow-\hat{\boldsymbol{Z}}$，即

$$\pm u(y,\pi)=\pm\left[E\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sigma_y\sin\frac{\pi}{4}\right]$$

$$= \pm \mathrm{i}\sigma_y = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{9.101}$$

故 H 包含两组群元 $u(\hat{\boldsymbol{Z}},\theta)$ 和 $v(\hat{z},\theta)$，

$$\begin{aligned} \hat{v}(\hat{z},\theta) &= u(\hat{\boldsymbol{Z}},\theta)(\mathrm{i}\sigma_y) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2} \\ -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{9.102}$$

商群 $\Pi_0(H)=H/H_0=\{\mathrm{e},\mathrm{i}\sigma_y\}$，因此

$$\Pi_1(R) = \Pi_0 = Z_2 \quad (\text{模为 } \alpha \text{ 的整数加法群}).$$

实际上三维向列液晶中只存在一种拓扑稳定的线缺陷，称为 180°向错(disclination)(图 9.9). 单位群元对应的 360°向错，在拓扑上不稳定. 如图 9.10 所示，其中图(a)中每一个分子呈“T”形，分子两端不可区分，是等价的. 图(b)中表示，分子已绕垂直于纸面，并绕分子轴转动，分子轴均与纸面垂直. 此时已变成无缺陷的均匀态. 从图(a)到图(b)，向错通过第三维实现“逃逸”.

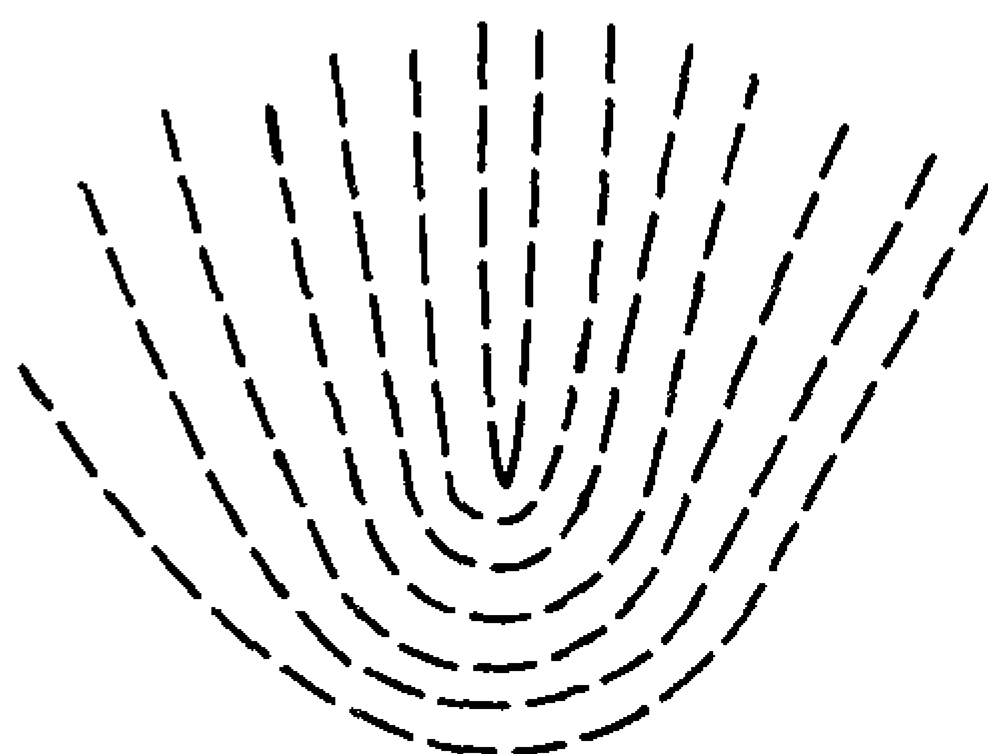


图 9.9　180°向错

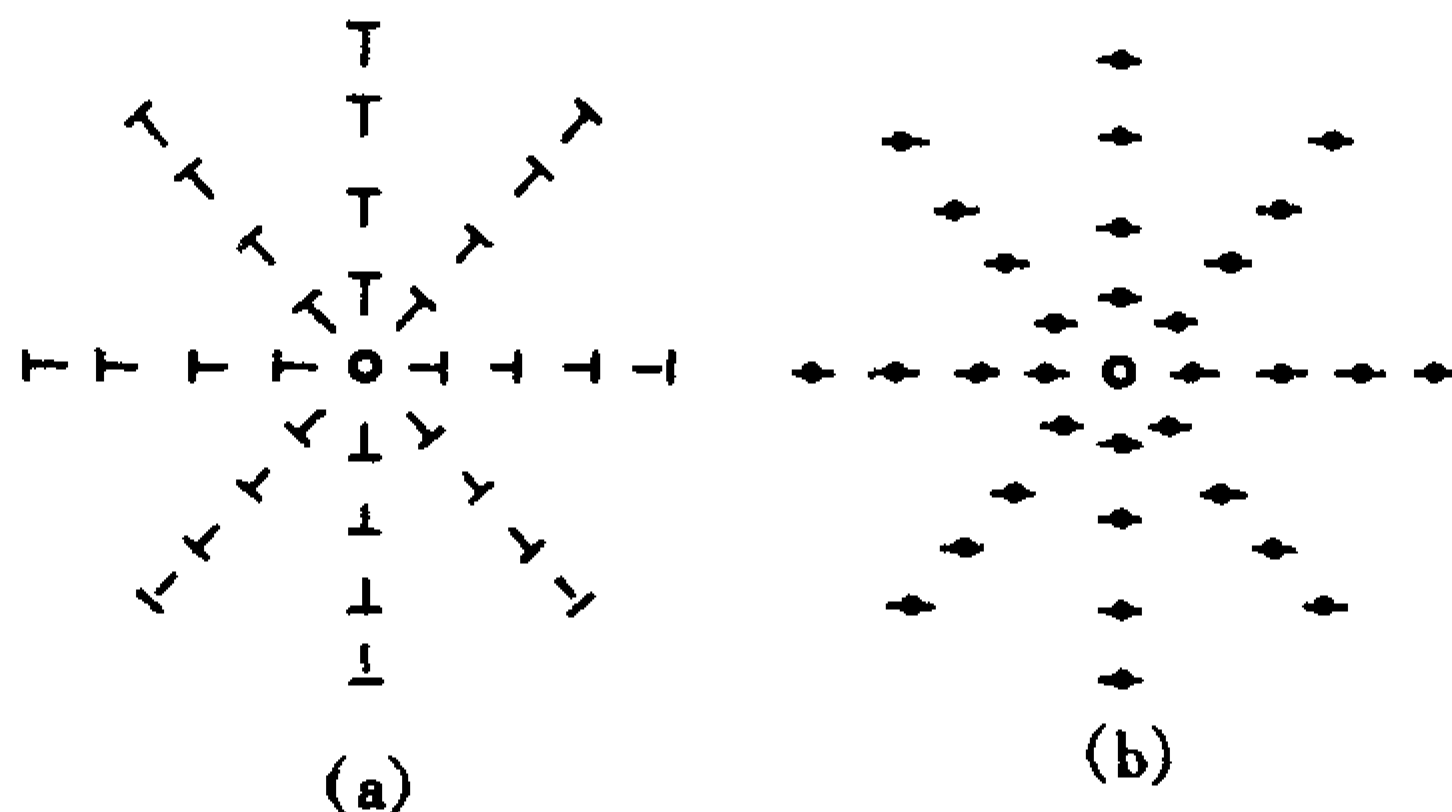


图 9.10　360°向错逃逸

三维系统的点缺陷由二次同伦群确定，

$$\Pi_2(G/H) = \Pi_1(H) = \Pi_1(H_0). \qquad (9.103)$$

例 4 二维自旋系统中三维超流 $4He$ 系统. 由于 H 是离散平移群, $H_0=\{e\}$, 故

$$\Pi_2(G/H) = \Pi_1(H) = \Pi_1(H_c) = \{0\}. \qquad (9.104)$$

此系统无稳定点缺陷.

例 5 一般自旋.

由于 $\forall\ U(\hat{\boldsymbol{Z}},\theta)\in H$, 故 H 是 $SU(2)$ 中单连通子群, $H_0=H \cong \{u(\hat{\boldsymbol{Z}},\theta)\}$.

$$\Pi_1(U(1)) = Z \quad (\text{整数加法群}), \qquad (9.105)$$

此系统的点缺陷由正、负整数标定.

例 6 向列液晶.

H 的子群有两叶, H_0 是 $\{u(\hat{\boldsymbol{Z}},\theta)\}$, 另一叶是 $H_0(\mathrm{i}\sigma_y)$. 因此

$$\Pi_2(G/H) = \Pi_1(H) = \Pi_0(H_0) = Z. \qquad (9.106)$$

由于 $\forall\ u(\hat{\boldsymbol{Z}},\theta)\in H_0$, 有自同构映射

$$(\mathrm{i}\sigma_y)u(\hat{\boldsymbol{Z}},\theta)(\mathrm{i}\sigma_y)^{-1} = u(\hat{\boldsymbol{Z}},-\theta),$$

因此 $u(\hat{\boldsymbol{Z}},\theta)$ 与 $(\hat{u},-\theta)$ 相应的点缺陷分别用整数 n, $-n$ 表示, 在拓扑上是等价的. 例如, 以 $+n$ 标定的点缺陷, 绕 180° 向错的回路环行一周, 就变为以 $-n$ 标定的点缺陷. 换言之, 向列液晶的点缺陷只需正整数 n 标定就可以了.

同时, 任何偶数 $2n$ 点缺陷, 分解为两个 n 缺陷, 令其中一个绕 180° 向错环行一周就变为 $-n$ 缺陷, 与另一个 n 缺陷并合, 归于消灭. 任意奇数 $2n+1$ 点缺陷, 通过类似变换, 可变为 $n=1$ 的点缺陷.

例 7 双轴向列相液晶.

H 为两面群 D_2 或四元素群 Q, 是离散群, 因而

$$\Pi_2(G/H) = \Pi_1(H_0) = \{0\}, \qquad (9.107)$$

此时不存在稳定点缺陷.

在均匀状态下有平移对称破缺的有序介质, 这种介质一般称为晶体介质. 可将上面理论朴素地推广(naive generalization)到晶体介质. 但有关工作尽管有一定的创意, 但存在严重问题, 受到

梅林(N. D. Mermin)的严厉批评，兹不赘述. 但利用同伦理论研究玻璃体中的线缺陷却取得一定成功.

玻璃体是无序态，可以认为是由内部无结构粒子构成的凝聚态物质. 由于此类液态或气态凝聚态物质可以形变的方式几乎是无限的，故不妨假定其平移操作群包括所有可能的平移和转动对称操作群，可表为

$$G = T(d) \otimes_S SO(d), \tag{9.108}$$

其中$\otimes_S$ 表示半直积. 更严格地说，G 是 d 维欧几里德微分同胚的群.

玻璃体没有微观对称性，故

$$H = \{0\} \otimes_S \{0\} = \{0\}.$$

因而序参量空间(此时多称内部状态空间)

$$T = G/H = G.$$

G 的平移子群是单连通的，而转动子群则不是.

设 $\overline{G}$ 为 G 的泛覆盖群，$\overline{H}$ 则为 H 在 $\overline{G}$ 中的同态映像，则

$$T = G/H = \overline{G}/\overline{H}, \tag{9.109}$$

此时 $\overline{G}$ 为单连通的. 显然有

$$\Pi_1(T) = \overline{H}/\overline{H}_0, \quad \Pi_2(T) = \Pi_1(\overline{H}_0). \tag{9.110}$$

尤其是当 $\overline{H}$ 为离散群时，(9.110)式变为

$$\Pi_1(T) = \overline{H}, \quad \Pi_2(T) = \{e\}. \tag{9.111}$$

就玻璃体而言，$H=\{0\}$，对应唯一的泛覆盖群 $\overline{G}$ 与离散的阿贝尔正规子群 $\overline{H}$. 由于 G 的平移子群是单连通的，$\overline{H}$ 与 H 的平移子群应相同，均为$\{0\}$，即玻璃体中不存在拓扑稳定的平移位错. G 的转动子群 $SO(d)$不是单连通的. 当 $d=3$ 时，$\overline{SO}(3)=SU(2)$；当 $d=2$ 时，$\overline{SO}(2)=T(1)$. 由前面讨论，已知

$$SO(3) \cong SU(2)/Z_2, \quad SO(2) \cong T(1)/Z,$$

即是 $d=3$，$\overline{H}=\{0\}\otimes_S Z_2$，$d=2$，$\overline{H}=\{0\}\otimes_S Z$. 换言之，

$$\begin{cases} \Pi_1(T,d=3) = Z_2, \\ \Pi_1(T,d=2) = Z. \end{cases} \tag{9.112}$$

第一式表明，三维玻璃体中只存在一种拓扑稳定的线缺陷，是一种向错.

实际上，玻璃体最常见的结构模型是所谓无规网络. 人们业已证明，对于无规网络，所有奇数边构成的环，都能由单线贯穿连通，并单线可以避开偶数边环，自行形成闭合曲线，或终止于玻璃体表面. 这条可以通过任意奇数边环的单线，就是唯一稳定的向错线. 其标志就是每个网络环中边均为奇数，所谓奇数性(Oddness).

关于天体物理中大范围(large scale)时空结构也是由同伦群确定. 在本质上，与有序介质的缺陷问题没有什么不同，在此不作深入讨论了.

问　　题

1. 试讨论双轴向列液晶的线缺陷.

[提示：$G=SO(3)$，$H=D_2$，$\overline{G}=SU(2)$，$\overline{H}=Q=\{\pm 1, \pm \mathrm{i}\sigma_x, \pm \mathrm{i}\sigma_y, \pm \mathrm{i}\sigma_z\}$. $\Pi_1(T)=\overline{H}=Q$ 四元数群，此类介质称为阿贝尔介质. Q 分 5 个共轭类：$C_0=\{1\}$，$\overline{C_0}=\{-1\}$，$C_1=\{\pm \mathrm{i}\sigma_x\}$，$C_2=\{\pm \mathrm{i}\sigma_y\}$，$C_3=\{\pm \mathrm{i}\sigma_z\}$，表征 5 类线缺陷. C_0 表示可去线缺陷，$\overline{C_0}$表示 360°向错，C_1、C_2 和 C_3 表示三种 180°向错，分别相应绕 x、y 和 z 轴环行后分子轴转动 180°. 360°向错可以从第三线逃逸. 相应的类乘法表实际上反映线缺陷并合模式：

	C_0	$\overline{C_0}$	C_1	C_2	C_3
C_0	C_0	$\overline{C_0}$	C_1	C_2	C_3
$\overline{C_0}$	$\overline{C_0}$	C_0	C_1	C_2	C_3
$\overline{C_1}$	C_1	C_1	$2(C_0+\overline{C_0})$	$2C_3$	$2C_2$
$\overline{C_2}$	C_2	C_2	$2C_3$	$2(C_0+\overline{C_0})$	$2C_1$
C_3	C_3	C_3	$2C_2$	$2C_1$	$2(C_0+\overline{C_0})$.

]

2. 讨论在柱面细管(pores)中超流^3He 系统的点缺陷与线缺

陷.

(1) 设 A 相序参量可表为

$$A_{\mu i} = \Delta d_\mu \Delta i \quad (i,\mu = 1,2,3), \tag{9.113}$$

其中 Δ 为某标量，$\boldsymbol{\Delta}=(\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{\alpha}_1+\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}_2)\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 为两相互垂直的单位矢量，$\boldsymbol{e}=\boldsymbol{\alpha}_1\times\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{d}$ 是自旋空间的单位矢量.偶极相互作用要求 $\boldsymbol{d}=\pm\boldsymbol{e}$，磁场与 $\boldsymbol{d}$ 垂直.

(2) B 相序参量可表示为

$$A_{\mu i} = \Delta \mathrm{e}^{\mathrm{i}\chi} R_{\mu i} \quad (\mu,i = 1,2,3), \tag{9.114}$$

其中 χ 为相位，$R_{\mu i}$ 为三维任意转动矩阵，令转角 $\alpha\leqslant\arccos(\frac{-1}{4})$.

(3) A 相序参量

$$A_{\mu i} = \Delta d_\mu \Delta_i \quad (\mu,i = 1,2,3), \tag{9.115}$$

其中 $\boldsymbol{\Delta}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{\alpha}_1+\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}_2)$，$\boldsymbol{\alpha}_1\perp\boldsymbol{\alpha}_2$，且 $\boldsymbol{d}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{\beta}_1+\mathrm{i}\boldsymbol{\beta}_2)$，$\boldsymbol{\beta}_1$ 与 $\boldsymbol{\beta}_2$ 为自旋空间中两互相垂直的单位矢量，磁场垂直于 $\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\beta}_2$.

[提示：(1) A 相.在系统内部

$$G = SO(3)\otimes S^2, H = Z_2(\boldsymbol{d}\longrightarrow -\boldsymbol{d};\boldsymbol{\Delta}\longrightarrow -\boldsymbol{\Delta}),$$

则*

$$\Pi_1(T) = Z_4 \quad (\text{模为 4 整数加法群}).$$

实际上，$\boldsymbol{d}\longrightarrow S^2$，$\boldsymbol{\Delta}\longrightarrow SO(3)$.

在边界上只有 $\boldsymbol{e}=\pm\boldsymbol{\rho}$ 允许，这里 $\boldsymbol{\rho}$ 为柱面坐标中单位半径矢量．为确定起见，令 $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{\rho}$，

$$\tilde{G} = S^1\times S^2, H = Z_2,$$

$$\Pi_1(\tilde{T}) = Z.$$

这里利用了问题 3 的结果.此时序参量可以表为

---

* 参见 G. Volovik, etal; Zh. Eksp. Teor. Fiz. 72(1977)p2256.

$$\Delta = R(\frac{1}{2}\pi \quad \hat{\phi} \quad)R(\alpha\hat{z})\,\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + \mathrm{i}\hat{y}),$$

其中 $\hat{x}$、$\hat{y}$ 和 $\hat{z}$ 为相应单位矢，$\hat{\phi}$ 为方向角的单位矢.

例如对于拓扑量子数 $N(Z)=2m-1$ 的织构(Texture)，Z_4 分类使它变为

$$N(Z) = 2m - 1(\text{模为 } 4).$$

(2) B 相. 若偶极相互作用导致系统内部

$$T = S^1 \times S^2,$$

则有

$$\Pi_1(T) = Z.$$

边界条件 $\boldsymbol{n}=\pm\boldsymbol{\rho}$，则

$$\tilde{T} = S^1,$$

且
$$\Pi_1(\tilde{T})=Z.$$

此时边界条件对于织构的拓扑结构无影响.

(3) A_1 相. 取磁场沿 pores 的轴，略去偶极作用，在系统内部

$$T = (SO(3) \otimes S^1)/S^1.$$

利用正合序列，可求得

$$\Pi_1(T) = Z_2.$$

在边界上，$\boldsymbol{l}=\pm\boldsymbol{\rho}$. 令 $\boldsymbol{l}=+\boldsymbol{\rho}$，有

$$\tilde{T} = \frac{S^1 \times S^1}{S^1},$$

且

$$\Pi_1(\tilde{T}) = Z.$$

其实此时还可进行更复杂讨论，兹从略.]

3 求 $\Pi_1(S^1 \times S^2/Z_2)$.

[提示：一般 r 次同伦群有

$$\Pi_r(H) \longrightarrow \Pi_r(G) \longrightarrow \Pi_r(G/H).$$

由此有正合序列

$$\Pi_1(Z_2) \longrightarrow \Pi_1(S^1 \times S^2) \longrightarrow \Pi_1(S^1 \times S^2/Z_2) \longrightarrow \Pi_0(Z_2) \longrightarrow \Pi_0(S^1 \times S^1).$$

但是

$$\Pi_0(Z_2) = H/H_0 = Z_2, \quad \Pi_0(S^1 \times S^2) = \{0\},$$
$$\Pi_1(Z_2) = \{0\}.$$

同时注意一般地有

$$\Pi_n(T \times T') = \Pi_n(T) + \Pi_n(T'),$$

故

$$\Pi_1(S^1 \times S^2) = \Pi_1(S^1) + \Pi_1(S^2) = Z.$$

正合序列变为($\tilde{T}=S^1\times S^2/Z_2$)

$$0 \longrightarrow Z \longrightarrow \Pi_1(\tilde{T}) \longrightarrow Z_2 \longrightarrow 0.$$

由同态映射可知 $\Pi_1(\tilde{T})=Z+Z_2$ 或 Z.

由于在二维球面 S^2 上圆 S^1 与 S^1 的内积空间中,直径两端点可以用路径相连,因而是等价元素,应排除 $Z+Z_2$,即

$$\Pi_1(\tilde{T}) = Z.]$$

4. (1) 设 $T=SO(3)\otimes S^1/Z_2$;

(2) 设 $T=S^1\times S^1/Z_2$;

(3) 设 $T=SO(3)\otimes S^1/S^2$;

(4) 设 $T=S^1\times S^1\times S^1/S^1$;

(5) 设 $T=SO(3)\otimes SO(3)/S^2$;

(6) 设 $T=SO(3)\otimes S^1\times S^1/S^1$.

求相应的 $\Pi_1(T)$.

[提示:(1) $\Pi_1(Z_2)\longrightarrow\Pi_1(SO(3)\otimes S^1)\longrightarrow\Pi_1(T)\longrightarrow\Pi_0(Z_2)\longrightarrow\Pi_0(SO(3)\otimes S^1)$,

亦即

$$0 \longrightarrow \Pi_1(SO(3) + \Pi_1(S)) \longrightarrow \Pi_1(T) \longrightarrow Z_2 \longrightarrow 0$$

$$\Longrightarrow 0 \longrightarrow Z_2 + Z \longrightarrow \Pi_1(T) \longrightarrow Z_2 \longrightarrow 0$$

$$\Longrightarrow \Pi_1(T) = Z + Z_2.$$

(2) $T = S^1 \times S^1 / Z_2$,

$$0 \longrightarrow Z + Z \longrightarrow \Pi_1(T) \longrightarrow Z_2 \longrightarrow 0$$

$$\Longrightarrow \Pi_1(T) = Z + Z.$$

(3) 设 $T = SO(3) \otimes S^1 / S^2$,

$$\Pi_1(S^2) \longrightarrow \Pi_1(SO(3) \otimes S^1) \longrightarrow \Pi_1(T) \longrightarrow \Pi_0(S^2),$$

$$0 \longrightarrow Z_2 + Z \longrightarrow \Pi_1(T) \longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow \Pi_1(T) = Z_2 + Z.$$

(4) $\Pi_1(S^1 \times S^1 \times S^1 / S^1) = \Pi_1(S^1) + \Pi_1(S^1) + \Pi_1(S^1/S^1) = Z + Z$.

(5) $T = SO(3) \otimes SO(3) / S^1$,

$$\Pi_1(T) = \Pi_1(SO(3) + \Pi_1(SO(3)/S^1)$$

$$= \Pi_1(SO(3)) = Z_2.$$

(6) $\Pi_1(T) = \Pi_1(SO(3)) + \Pi_1(S^1) + \Pi_1(S^1/S^1) = Z_2 + Z$.

对于 T 与 T' 的拓扑积，这里用到公式

$$\Pi_n(T \times T') = \Pi_n(T) + \Pi_n(T'), \qquad (9.116)$$

其中 T 与 T' 为路径连通的豪斯道夫拓扑空间，它们只有一个公共点 y_0. 实际应用中还有公式(对于并集 $T \cup T'$)*

$$\Pi_n(T \cup T') = \Pi_n(T) + \Pi_n(T') + \Pi_{n+1}(T \times T'),$$

$$n \geqslant 2, \qquad (9.117)]$$

5. 对于 A 相超流液氦 ^{3}He 系统，如果磁场沿柱轴(pores)，此时 $T = (SO(3) \otimes S^1 / Z_2$，边界条件给出 $\tilde{T} = (S^1 \times S^1 / Z_2)$，讨论其拓扑结构.

[提示：参阅上题，$\Pi_1(T) = Z_2 + Z$，$\Pi_1(\tilde{T}) = Z + Z$. 例如对于结构

* 参阅 P. J. 希尔顿的《同伦论》，科学出版社，1960，p44～46.

Texture,

$$\begin{cases} \sqrt{2}A = (\hat{\phi} + i\hat{Z})\exp[i(m+\frac{1}{2})\phi], \\ d = \hat{x}\cos(n+\frac{1}{2})\phi + \hat{y}\sin(n+\frac{1}{2})\phi, \end{cases} \tag{9.118}$$

可以用下列拓扑量子数标定,

$$N_1(Z) = m - n - 1, \quad N_2(Z) = 2n + 1.$$

若无边界条件,

$$N(Z_2) = (m - n - 1)(\text{模为 } 2), \quad N(Z) = 2n + 1.$$

此时 $m=0$ 与 $m=2$ 就是等价了. 只需对(9.118)稍加修正,对于任意磁场,同伦群 $\Pi_1(\tilde{T})=Z+Z$ 都是成立的.]

第十章　李群的若干应用

群论的应用在前九章中已散见于各章节中. 本章仍集中介绍李群的若干应用,以便读者进一步深入、巩固对李群、李代数及其表示理论的理解,同时有助于提高不同领域的读者应用李群论解决实际问题的能力.

首先介绍旋转群和量子力学的角动量理论. 有关工作在原子物理、原子核多体问题,乃至粒子物理中占据非常重要地位.

$SU(n)$ 群与 $SO(n)$ 群关系密切,近年来在物理学中,尤其是粒子物理、原子核物理中,有极其广泛地应用,本章将给予适当篇幅介绍有关工作的进展.

关于群论在工程技术中的应用,一般群论书籍中介绍甚少,我们将介绍李群在机械与流体力学中应用的范例. 限于篇幅,所有应用领域在此我们难以一一涉及,即使涉及到的也难免有语焉不详之嫌. 但是,我们希望读者由此可由一斑而窥全豹,充分领略群论无限广阔的应用前景.

§10.1　$SO(3)$ 与 $SU(2)$ 群的同态关系

$SO(3)$ 与 $SU(2)$ 的关系是同态关系.

$SO(3)$ 群在物理学上占据特殊地位. 它与量子力学的角动量理论、三维球对称系统有着密不可分的"血缘"关系. 它是一秩紧致李群,其连通度为 2,相应通用覆盖群为单连通的 $SU(2)$ 群. 两者存在 2∶1 的同态映射关系. $SO(3)$ 群的 2 度连通性导致双值表示.

$SO(3)$ 与 $SU(2)$ 局域同构,有同构李代数. 由于两者都是紧

致群，其有限维表示均为等价的酉表示，可约表示都是完全可得的.

变换李群 $SO(3)$ 在笛卡儿坐标中的三个无穷小算子是

$$\begin{cases} X_1 = z\dfrac{\partial}{\partial y} - y\dfrac{\partial}{\partial z}, \\ X_2 = x\dfrac{\partial}{\partial z} - z\dfrac{\partial}{\partial x}, \\ X_3 = y\dfrac{\partial}{\partial x}, - x\dfrac{\partial}{\partial y}, \end{cases} \tag{10.1}$$

相应对易关系为

$$[X_i,\ X_j] = \sum_k \varepsilon_{ijk} X_k, \tag{10.2}$$

其中结构常数 $C_{ij}^k = \varepsilon_{ijk}(i,j,k = 1,2,3)$. 若令 $J_i = \mathrm{i}X_i(i = 1,2,3)$，则有通常量子力学中角动量分量算子的对易关系($h = 1$)

$$[J_i, J_j] = \mathrm{i}\sum_k \varepsilon_{ijk} J_k. \tag{10.3}$$

将$\{J_i\}$ 转换为卡当-魏尔基$\{J_0, J_\pm\}$，

$$J_0 = H = J_3,$$

$$J_\pm = E_{\pm\alpha} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(J_1 \pm \mathrm{i}J_2). \tag{10.4}$$

显然，相应对易关系为

$$[J_0, J_\pm] = \pm J_\pm, \quad [J_+, J_-] = -J_0. \tag{10.5}$$

基$\{J_0, J_\pm\}$ 即角动量球分量形式，其显式为

$$L_\pm = \mathrm{i}e^{\pm \mathrm{i}\phi}\left\{\sin\theta\frac{\partial}{\partial\psi} + \frac{1}{2}\left(\mp \mathrm{i} + \cot\frac{\psi}{2}\cos\theta\right)\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2}\csc\theta\left(\cos\theta \pm \cot\frac{\psi}{2}\right)\frac{\partial}{\partial\psi}\right\}, \tag{10.6}$$

$$L_0 = \mathrm{i}\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial\psi} - \frac{1}{2}\cot\frac{\psi}{2}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\psi} - \frac{\partial}{\partial\theta}\right). \tag{10.7}$$

应满足原来条件：

$$J_0^+ = J_0, \quad J_\pm^+ = - J_\pm. \tag{10.8}$$

它们只能构成一个 Casmir 算子

$$J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = - (J_+ J_- + J_- J_+) + J_0. \tag{10.9}$$

在(10.7)式中，$\{\psi, \phi, \theta\}$ 即为常见的 Euler 角，其定义如图 10.1.

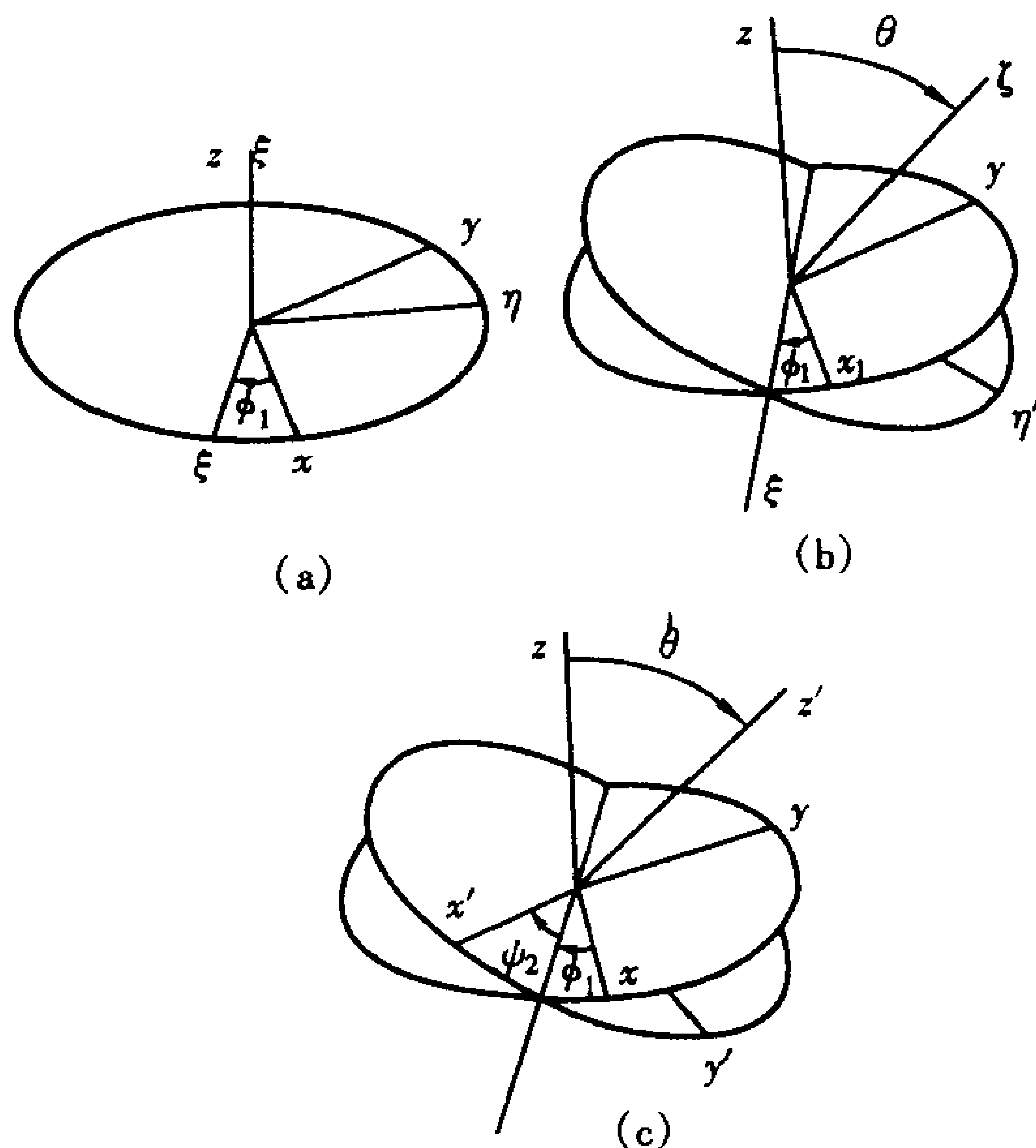


图 10.1 Euler 角

由于 $SO(3)$ 只有一个正根 α. 设最高权为 $j\alpha$,则相应权链为

$$j\alpha, \ (j-1)\alpha, \ (j-2)\alpha, \ \cdots, \ (j-f)\alpha. \tag{10.10}$$

根据最高权性质，有

$$\lambda = f - h = \frac{2(j\alpha, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = 2j = \text{非负整数}, \tag{10.11}$$

故 $j=$ 整数或半整数，且与 λ 一样，唯一表示相应的不可约表示.由于 j 是最高权，$h=0$，即是 $f=2j$，因此最低权(见(10.10) 式)为 $j-f=-j$，故一般权可取值

$$m = j,\ j-1,\ \cdots,\ -j+1,\ -j. \tag{10.12}$$

对应不可约表示 $\Gamma^{(i)}$ 的维数

$$N(j) = 2j + 1.$$

设 $|j,m\rangle$ 为不可约表示 $\Gamma^{(1)}$ 中权为 m 的基矢，并满足归一化条件：

$$\langle j,m|j,m'\rangle = \delta_{mm'}(m,m' = j,\ j-1,\ \cdots,\ -j). \tag{10.13}$$

按定义

$$J_0|j,m\rangle = m|j,m\rangle, \tag{10.14}$$

即权 m 为 J_0 的本征值.

注意到对易关系(10.5)式，

$$\begin{aligned} J_0J_+|j,m\rangle &= (J_+J_0 + J_+)|jm\rangle \\ &= J_+(J_0+1)|j,m\rangle = (m+1)J_+|j,m\rangle, \\ J_0J_-|j,m\rangle &= J_0(J_0-1)|j,m\rangle = (m-1)J_-|j,m\rangle \end{aligned} \tag{10.15}$$

亦即 $J_+|j,m\rangle$ 与 $J_-|j,m\rangle$ 分别是 J_0 的对应本征值为 $m+1$ 与 $m-1$ 的特征向量，因而 J_+ 与 J_- 又称权的上升或下降算子.

改写 Casimir 算子

$$J^2 = -J_-J_+ + J_0(J_0+1), \tag{10.16}$$

并注意到显然的事实：$J_+|j,j\rangle = 0, J_0|j,j\rangle = 0$，则

$$J^2|j,j\rangle = j(j+1)|j,j\rangle.$$

一般地，考虑到 J^2 是 Casmir 算子，应均与 J_-、J_+ 和 J_0 对易，与所有不可约表示 $\{\Gamma^{(i)}\}$ 对易，故由舒尔引理 $J^2 = \alpha I$（I 为单位矩阵），且有

$$\begin{cases} J^2|j,j\rangle = \alpha|j,j\rangle, \\ J^2|j,m\rangle = \alpha|j,m\rangle, \end{cases} \tag{10.17}$$

即是 $\alpha = j(j+1)$. 根据(10.15)式，可令

$$\begin{cases} J_+|j,m\rangle = C_+|j,m+1\rangle, \\ J_-|j,m\rangle = C_-|j,m-1\rangle. \end{cases} \tag{10.18}$$

可求得

$$\begin{aligned}\langle j,m|J^2|j,m\rangle &= j(j+1)\\ &= \langle j,m|C_+ - J_- J_+ |j,m\rangle + \langle j,m|J_0(J_0+1)|j,m\rangle\\ &= +2C_+^2 + (m+1)m.\end{aligned}\tag{10.19}$$

利用厄米关系

$$[J_+ |j,m\rangle]^+ = \langle j,m|(-J_-) = C_+^* \langle j,m+1|,\tag{10.20}$$

约定常数 C_+ 为实数，则从(10.19) 式得

$$C_+ = \sqrt{\frac{1}{2}(j-m)(j+m+1)}.\tag{10.21}$$

对于 J_- 算子作同样推导，注意到

$$J^2 = -2J_+ J_- + J_0(J_0-1),$$

可得

$$C_- = \sqrt{\frac{1}{2}(j+m)(j-m+1)}.\tag{10.22}$$

关系式(10.21)、(10.22) 是量子力学中角动量理论中大家熟悉的结论，但现在我们是用纯群论方法得到. 十分清楚，角动量量子的本征函数 $|j,m\rangle(m=j,j-1,\cdots,-j+1,-j)$ 即是 $SO(3)$ 群不可约表示的基矢. 若 j 为整数，则张成 $2j+1$ 维表示空间，若 j = 半整数，则张成 $2j$ 维空间. 角动量量子数 j 为表示的最高权，而群量子数则是一般基矢的权.

下面进而讨论 $SO(3)$ 群与 $SU(2)$ 群的同态关系. $SU(2)$ 群的群元可表示为

$$u = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \quad (a, b \in \Omega_c),\tag{10.23}$$

显然，复参数应满足

$$\det u = aa^* + bb^* = 1.\tag{10.24}$$

容易验证由(10.23) 与(10.24) 式定义的 u 矩阵满足幺正条件：

$$uu^+ = u^+ u = E \quad (2 \times 2 \text{ 单位矩阵}).$$

u 矩阵还可以等价地用四个实参数 $h_i (i = 0,1,2,3)$ 表示之. 实参数满足条件(幺正性)

$$\sum_{i=0}^{3} h_i^2 = 1, \tag{10.25}$$

$$u = \begin{pmatrix} h_0 - \mathrm{i}h_3 & -h_2 - \mathrm{i}h_1 \\ h_2 - \mathrm{i}h_1 & h_0 + \mathrm{i}h_3 \end{pmatrix}. \tag{10.26}$$

为直观起见,可以用实矢量 ψ 的球坐标(ψ,θ,ϕ) 代替参数 h_i,其中 θ、ϕ 是 ψ 的极角和方位角,

$$\begin{cases} h_0 = \cos\left(\dfrac{\psi}{2}\right), \quad h_1 = \sin\left(\dfrac{\psi}{2}\right)\sin\theta\cos\phi, \\ h_3 = \sin\left(\dfrac{\psi}{2}\right)\cos\theta, \quad h_2 = \sin\left(\dfrac{\psi}{2}\right)\sin\theta\sin\phi. \end{cases} \tag{10.27}$$

易证

$$u = E\cos\frac{\psi}{2} - \mathrm{i}(\boldsymbol{\sigma},\ \boldsymbol{n})\sin\left(\frac{\psi}{2}\right), \tag{10.28}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为 ψ 的单位矢量,$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}(\theta,\ \phi)$,$\boldsymbol{\sigma}$ 为泡利矩阵.
根据 σ_i 矩阵的性质,

$$\begin{cases} \sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}E + \mathrm{i}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\sigma_k, \\ (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{b}) = E(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) + \mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}), \end{cases} \tag{10.29}$$

可以得到

$$\begin{cases} u(\boldsymbol{n},\psi_1)u(\boldsymbol{n},\psi_2) = u(\boldsymbol{n},\psi_1 + \psi_2), \\ u(\boldsymbol{n},4\pi) = E, u(\boldsymbol{n},2\pi) = -E, \\ u(\boldsymbol{n},\psi) = u(-\boldsymbol{n},4\pi - \psi) = -u(-\boldsymbol{n},2\pi - \psi). \end{cases} \tag{10.30}$$

由此可见,

(i) ψ 变化范围是半径为 2π 的球体:$0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, 0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi$;

(ii) 球体内每一点与群元 u 一一对应;

(iii) 在外球面($\psi = 2\pi$),所有的点都对应同一群元 E. 这一点

异常重要，决定 $SU(2)$ 群流形是单连通的.

无迹厄米矩阵 X 与三维空间位置矢径有一一对应关系. 任意二维无迹矩阵 X 可表示为

$$X = \sum_{i=1}^{3} x_i \sigma_i = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - \mathrm{i}x_2 \\ x_1 + \mathrm{i}x_2 & -x_3 \end{pmatrix}, \tag{10.31}$$

显然，$\det X = -\sum_{i=1}^{3} x_i^2 = -r^2$，且有

$$x_i = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(X\sigma_i), \tag{10.32}$$

其中 $\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, x_3)$，$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

设转动变换 R 得 $\boldsymbol{r} \longrightarrow \boldsymbol{r}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$，

$$x_i \longrightarrow x'_i = \sum_{j=1}^{3} R_{ij} x_j, \tag{10.33}$$

则该变换亦将 X 变为 X'：

$$X' = \sum_{i=1}^{3} \sigma_i x'_i = \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_i R_{ij} x_j. \tag{10.34}$$

由于 $\det X = \det X'$，故必有相似幺正变换将 X 与 X' 联系在一起，

$$X' = uXu^{-1} = u\left(\sum_{i=1}^{3} \sigma_i x_i\right) u^{-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} (u\sigma_i u^{-1}) x_i.$$

将此式与(10.34)式比较，注意 $\boldsymbol{r}$ 的任意性，则有

$$u\sigma_j u^{-1} = \sum_{i=1}^{3} \sigma_i R_{ij}. \tag{10.35}$$

(10.35)式给出转动变换与相似幺正变换之间联系.

如以 $(-u)$ 代替 u，则(10.35)式左端

$$(-u)\sigma_j(-u)^{-1} = u\sigma_j u^{-1} = \sum_{i=1}^{3} \sigma_i R_{ij},$$

即对应同一转动元素 $R \in SO(3)$. 即 2 个 $SU(2)$ 元素对于一个

$SO(3)$ 元素.

现在更深入讨论每一个 u 是否唯一对应 R. 为此,显式演证如下. 见图 10.2,其中 $\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 垂直,则可作分解

$$\begin{cases} \boldsymbol{r} = \boldsymbol{n}a + \boldsymbol{m}b \quad (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m} = 0) \\ X = \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}a + \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{m}b, \end{cases} \tag{10.36}$$

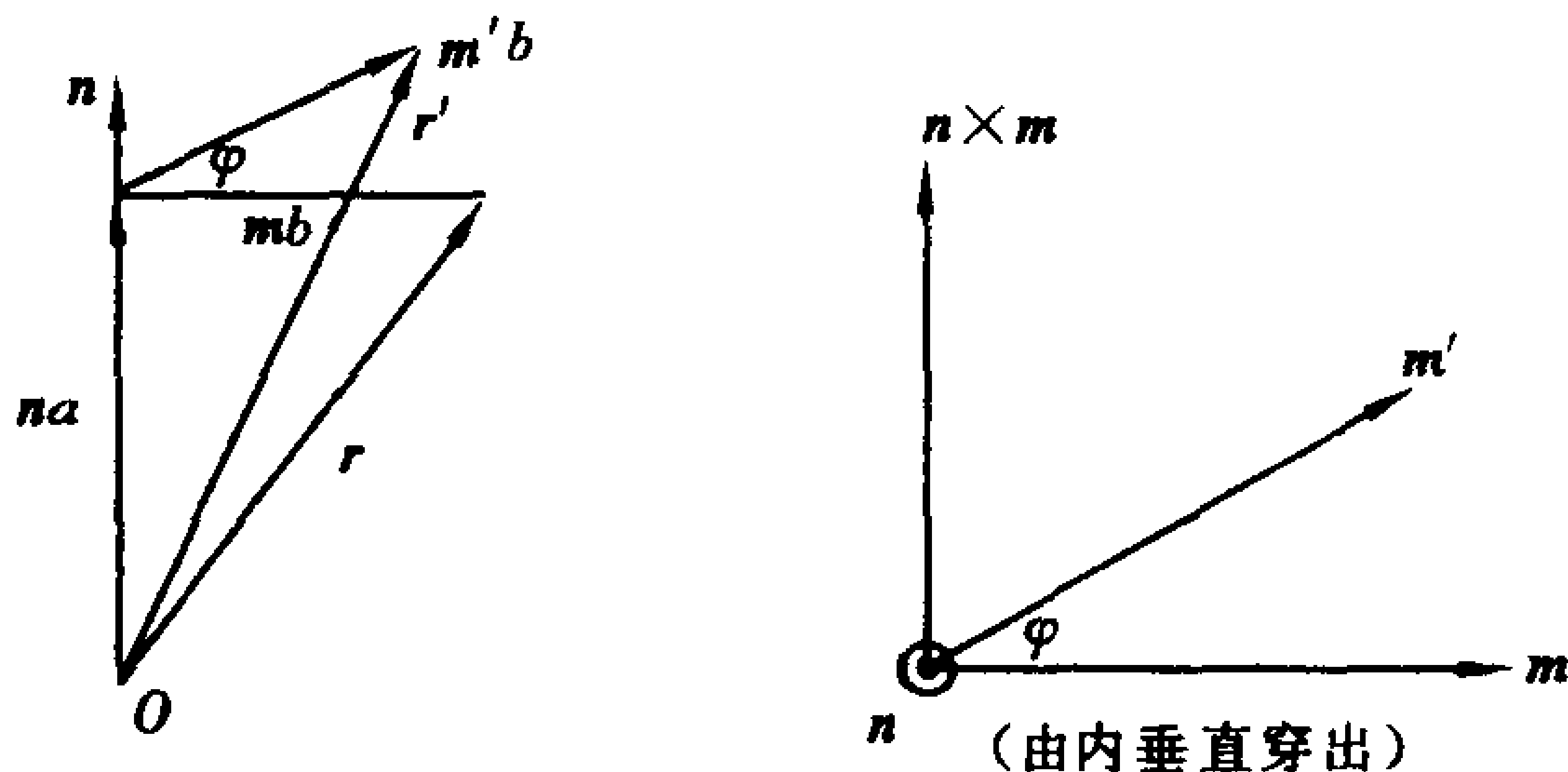


图 10.2 位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 绕 $\boldsymbol{n}$ 转动

由(10.29)式,得到

$$u(\boldsymbol{n},\psi)(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})u(\boldsymbol{n},\psi)^{-1} = \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}, \tag{10.37}$$

$$u(\boldsymbol{n},\psi)(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{m})u(\boldsymbol{n},\psi)^{-1} = \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{m}', \tag{10.38}$$

$$\boldsymbol{m}' = \boldsymbol{m}\cos\psi + (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m})\sin\psi. \tag{10.39}$$

代入(10.33)式,有

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{n}a + \boldsymbol{m}b\cos\psi + (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m})b\sin\psi, \tag{10.40}$$

因此 $u(\boldsymbol{n},\psi)$ 通过(10.35) 式唯一地确定元素 $R(\boldsymbol{n},\psi)$.

进而证明这样的 $\pm u \longrightarrow R$ 的对应关系对乘积保持不变:

$$u_1\sigma_i u_1^{-1} = \sum_j \sigma_j (R_1)_{ji},\ u_2\sigma_i u_2^{-1} = \sum_j \sigma_j (R_2)_{ji}$$

$$\Longrightarrow u_2 u_1 \sigma_i u_1^{-1} u_2^{-1} = \sum_j u_2 \sigma_j (R_1)_{ji} u_2^{-1}$$

$$= \sum_k \sigma_k \sum_j \{(R_2)_{kj}(R_1)_{ji} \tag{10.41}$$

因此,$SO(3)$ 群与 $SU(2)$ 为 $1\rightarrow 2$ 同态

$$SO(3) \sim SU(2).$$

讨论　(i) $SO(3)$ 与 $SU(2)$ 的群空间分别为 $\psi = \pi, 2\pi$ 的球体；

(ii) 在半径为 π 的球内，两群群元一一对应.

(iii) 对于 $SU(2)$ 群，半径为 π 到 2π 的环体所对应的元素，通过(10.29)式等于半径为 π 的球体中相应元素的负值. 这一对 $\pm u$ 矩阵对应一个元素 $R \in SO(3)$；

(iv) 对于 $SO(3)$ 群，在半径为 π 的球面上，直径的两个端点代表同一群元. 群空间内的连线包含直径两端的跳跃. 从原点到群空间任一点的连线可分为两组：一组包含直径两端的偶次跳跃，等同于沿封闭环形路径，可以通过连续变换消失；另一组则包含直径两端奇数次跳跃，这是无法通过拓扑变形消去的. 每组连线均可通过拓扑变换各自重合. $SO(2)$ 因此称为双连通.

(v) 由于 $SU(2)$ 群空间的球面对应一个元素，则群空间的连线可在此球面上任意跳跃、移动. 因此跳跃前后的两点可以独立、自由地在球面上移动，从而消去跳跃. $SU(2)$ 是单连通的，而且是 $SO(3)$ 的覆盖群.

问　　题

1. 试证(10.28)式的第 2 式.

[提示：$\sum_{i,j} a_i b_j (\sigma_i \sigma_j) = \sum_{i,j} a_i b_j \delta_j E + \mathrm{i} \sum_{i,j} a_i b_j \sum_k \varepsilon_{ijk} \sigma_k$

$$\Longrightarrow \sum_i (a_i \sigma_i) \cdot \sum_j (b_j \sigma_j)$$

$$= \sum_i (a_i b_j) E + \mathrm{i} \sum_k \sigma_k \sum_{i,j} \varepsilon_{ijk} a_i b_i$$

$$\Longrightarrow (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) E + \mathrm{i} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$$]

2. 试证(10.37)式、(10.38)式和(10.39)式.

[提示：$u(\boldsymbol{n}, \psi)^{-1} = E\cos\frac{\psi}{2} + \mathrm{i}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n})\sin\frac{\psi}{2}$.

$u(\boldsymbol{n}, \psi)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}) u^{-1}(\boldsymbol{n}, \psi)$

$$= (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})\cos^2\left(\frac{\psi}{2}\right) - \frac{\mathrm{i}}{2}\sin\psi\{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})^2 - (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})^2\}$$

$$+ (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})^3\sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right)$$

$$= \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\left\{\cos^2\frac{\psi}{2} + \sin^2\frac{\psi}{2}\right\} = (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}) \quad ((\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})^2 = E),$$

$$u(\boldsymbol{n},\psi)(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{m})u(\boldsymbol{n},\psi)^{-1}$$

$$= (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})\cos^2\frac{\psi}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}\sin\psi\{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{m})$$

$$- (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{m})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})\} + (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{m})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})\cdot\sin^2\frac{\psi}{2}.$$

由(10.29)式第2式得到

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{m}) - (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{m})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}) = 2\mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m}),$$

其中(10.29)式第2式 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{n},\boldsymbol{b}=\boldsymbol{m},\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}=0$,

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{m})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}) = \mathrm{i}\{\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m})\}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})$$

$$= -\boldsymbol{\sigma}\cdot\{(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{m})\times\boldsymbol{n}\} \quad \text{(再利用(10.29)式第2式)}$$

$$= -\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{m} \quad \text{见图(10.2).}$$]

3. 试求紧致李群 $SU(2)$ 群上积分的权函数 $W(R)$.

[提示:$(\mathrm{d}u) = W(\boldsymbol{n},\psi)\mathrm{d}\psi_1\mathrm{d}\psi_2\mathrm{d}\psi_3 = W(\boldsymbol{n},\psi)\psi^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$.

令 $R = u(\boldsymbol{e}_3,\psi)$,则无穷小群的群元

有限群元 $u(A) = 1 - \mathrm{i}(\alpha_1\sigma_1 + \alpha_2\sigma_2 + \alpha_3\sigma_3)/2$.

$$u(A) = u(\boldsymbol{e}_3,\psi) = E\cos\left(\frac{\psi'}{2}\right) - \mathrm{i}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}')\sin\left(\frac{\psi'}{2}\right)$$

$$= E\left\{\cos\left(\frac{\psi}{2}\right) - \alpha_3\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)/2\right\}$$

$$- \mathrm{i}\sigma_1\left\{\alpha_1\cos\left(\frac{\psi}{2}\right) + \alpha_2\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)/2\right\}$$

$$- \mathrm{i}\sigma_2\left\{\alpha_2\cos\left(\frac{\psi}{2}\right) - \alpha_1\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)/2\right\}$$

$$- \mathrm{i}\sigma_3\left\{\alpha_3\cos\left(\frac{\psi}{2}\right) + \alpha\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)\right\}/2.$$

乘积元素的参数(保留 α_j 的一级小量)为

$$\cos\left(\frac{\psi'}{2}\right) = \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) - \alpha_3\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)/2 = \cos\left\{\frac{\psi+\alpha_3}{2}\right\},$$

$$\sin\left(\frac{\psi'}{2}\right) = \sin\left(\frac{\psi+\alpha_3}{2}\right) = \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) + \alpha_3\cos\left(\frac{\psi}{2}\right)/2,$$

$$\psi' n'_1 = \psi\left\{\alpha_1\cos\left(\frac{\psi}{2}\right) + \alpha_2\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)\right\}/\alpha\sin\left(\frac{\psi}{2}\right),$$

$$\psi' n'_2 = \psi\left\{\alpha_2\cos\left(\frac{\psi}{2}\right) - \alpha_1\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)\right\}\alpha\sin\left(\frac{\psi}{2}\right),$$

$$\psi' n'_3 = \psi'\left\{\alpha_3\cos\left(\frac{\psi}{2}\right) + \alpha\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)\right\}\alpha\sin\left(\frac{\psi'}{2}\right)$$

$$= \psi' = \psi + \alpha_3.$$

对于权函数与积分变换雅可比式有关系

$$(\mathrm{d}r)W(R) = (\mathrm{d}S)W(S) = (\mathrm{d}\alpha)W_0, \qquad (10.42)$$

其中 $(\mathrm{d}\alpha)$ 是恒元邻域的体积元. R 邻域元素记为 $R' = R'(r'_j)$；恒元邻域元素 $A = A(\alpha_j)$，则有 $R' = AR$，或 $A = R'R^{-1}$. 且雅可比式为

$$W_0 = W(R)\left|\det\left\{\frac{\partial f_j(\alpha, r)}{\partial\alpha_k}\right\}\right|_{\alpha=0},$$

$$W(R) = W(0)\left|\det\left\{\frac{\partial f_j(r', \alpha)}{\partial r'_k}\right\}\right|_{r'=0}. \qquad (10.43)$$

现在

$$\frac{W(\psi)}{W_0} = \left|\det\left\{\frac{\partial(\psi' n_i)}{\partial\alpha_i}\right\}_{\alpha=0}\right|$$

$$= \left|\begin{vmatrix} \frac{\psi}{2}\cot\frac{\psi}{2} & \frac{\psi}{2} & 0 \\ -\frac{\psi}{2} & \frac{\psi}{2}\cot\frac{\psi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right| = \psi^2\left\{\psi\sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right)\right\}^{-1},$$

亦即 $W(\psi) = W_0 4\sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right)/\psi^2$.

归一化条件

$$\int W(\psi)\psi^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\psi\mathrm{d}\phi = 1$$

$$\Longrightarrow \int_0^{2\pi} 4W_0 \cdot \sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right)\mathrm{d}\psi \int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi = 1$$

$$\Longrightarrow W_0 = 16\pi^2.$$

群上积分元为

$$(\mathrm{d}u) = \frac{1}{4\pi^2}\sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right)\mathrm{d}\psi \cdot \sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi.$$

注　对于 $SO(3)$，$0 \leqslant \psi \leqslant \pi$，故

$$(\mathrm{d}R) = \frac{1}{2\pi^2}\sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right)\mathrm{d}\psi \cdot \sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi.$$]

§ 10.2　$SU(2)$与$SO(3)$的不可约表示

$SU(2)$ 群的 $2j+1$ 维表示记为 $\Gamma^{(j)} = \{\Gamma^{(j)}(u)\}$. 实际上，$\forall\ u \in SU(2)$，若 u 与 $2j+1$ 维线性空间的正则线性变换对应，且相应乘法规律亦保持对应关系，则线性变换的矩阵即为 $\Gamma^{(j)}(u)$. 此处为 $SU(2)$ 不可约表示的最高权，为整数或半整数.

构造 $2j+1$ 个 $2j$ 次齐次函数，

$$\xi_m = \frac{1}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}x_1^{j+m}x_2^{j-m} \quad (m = j, j-1, \cdots, -j)$$

$$\forall\ x_1, x_2 \in \Omega_c \tag{10.44}$$

其中分母是归一化常数，ξ_m 张成 $2j+1$ 维线性空间. 令 $u \in SU(2)$，表为(10.23) 式，$x_1, x \in L_2$(二维复空间)，且有线性变换

$$x' = ux \Longrightarrow \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \tag{10.45}$$

此变换诱导另一个线性变换

$$\xi'_m = \sum_{m'}\Gamma^{(j)}(u)_{mm'}\xi_{m'}, \tag{10.46}$$

其中

$$\xi'_m = \frac{1}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} x'^{j+m}_1 x'^{j-m}_2$$

$$(m = j, j-1, \cdots, -j). \qquad (10.47)$$

下面来求 $\Gamma^{(i)}(u)$ 的具体表达式. 将(10.45) 式代入(10.47)式,并用二项式定理展开,得

$$\xi'_m = \frac{1}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}(ax_1 + bx_2)^{j+m}(-b^* x_1 + a^* x_2)^{j-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{j+m}\sum_{k'=0}^{j-m}(-1)^{j-m-k'}\frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}{k!k'!(j+m-k)!(j-m-k')!}$$

$$\cdot a^{j+m-k}a^{*k'}b^k b^{*j-m-k}x_1^{2j-k-k'}x_2^{k+k'}. \qquad (10.48)$$

若规定负整数的阶乘为 ∞,则对 k 和 k' 的求和限可以扩大为从 $-\infty$ 到 $+\infty$. 所增加的项均为分母含有负数的阶乘,即为零,因此不改变求和结果. 同时对求和指标作代换,

$$m' = j - (k + k'),$$

则(10.48)式改写为

$$\xi'_m = \sum_{m',k}(-1)^{k+m'-m}\frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}{k!(j-k-m')!(j+m-k)!(k+m'-m)!}$$

$$\cdot a^{j+m-k}a^{*j-k-m'}b^k b^{*k+m'-m}x_1^{j+m'}x_2^{j-m'}. \qquad (10.49)$$

比较(10.48)与(10.46)式,并计及(10.44)式,得到

$$\Gamma^{(i)}(u)_{mm'} = \sum_k (-1)^{k+m'-m}$$

$$\cdot\frac{\sqrt{(j+m')!(j-m')!}\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}{k!(j-k-m')!(j+m-k)!(k+m'-m)!}$$

$$\cdot a^{j+m-k}a^{*j-k-m'}b^k b^{*k+m'-m} \qquad (10.50)$$

这就是与 u 对应的 $SU(2)$ 群的 $2j+1$ 维表示 $\Gamma^{(j)}(u)$ 的显式,其中 m 与 m' 为行与列的脚标.

在问题中,我们将证明由(10.50) 式定义的 $\Gamma^{(j)} = \{\Gamma^{(j)}(u)\}$ 确实是 $SU(2)$ 群的一个表示. 由于 $SU(2)$ 群的 $2j+1$ 维表示只有唯一的最高权 j,因此所有 $2j+1$ 维的表示必与 $\Gamma^{(j)}$ 等价.

1. $SO(3)$ 的不可约表示

先讨论 $SU(2)$ 中一双元素 $(u, -u)$ 与对应的表示矩阵有何关联. 由于

$$u = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \Longrightarrow -u = \begin{pmatrix} -a & -b \\ b^* & -a^* \end{pmatrix}, \quad (10.51)$$

$$aa^* + bb^* = 1,$$

将(10.51)式代入(10.50)式，得到

$$\Gamma^{(j)}_{mm'}(-u) = (-1)^{2j}\Gamma^{(j)}_{mm'}(u). \quad (10.52)$$

由此可知，当 $j=$ 偶数时，$\Gamma^{(j)}(u) = \Gamma^{(j)}(-u)$；当 j 为奇数时，$\Gamma^{(j)}(u) = -\Gamma^{(j)}(u)$. 前者称为偶表示，后者称为奇表示. 显然，偶表示是 $SO(3)$ 的忠实表示，而奇表示则是 $SO(3)$ 的双值表示.

由(10.35)式，可以得到由相似变换：

$$X' = uXu^{-1} \quad (10.53)$$

所诱导的三维空间中从 r 到 r' 的线性变换：

$$r' = Rr, \quad (10.54)$$

其中

$$r' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \quad (10.55)$$

易得

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a^2 - b^2 + a^{*2} - b^{*2}) & -\frac{i}{2}(a^2 - a^{*2} + b^2 - b^{*2}) & -(ab + a^*b^*) \\ \frac{i}{2}(a^2 - a^{*2} + b^2 - b^{*2}) & \frac{1}{2}(a^2 + a^{*2} + b^2 + b^{*2}) & i(a^*b^* - ab) \\ (a^*b + ab^*) & i(ab^* - a^*b) & aa^* - bb^* \end{pmatrix}.$$

(10.56)

在(10.53)式中，$\det X = \det X'$. 即

$$x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

由此可见 $\det R = \pm 1$，即 $R \in O(3)$. 令 $a = 1, b = 0$，易得 $\det R = +1$. 注意到 R，因而 $\det R$ 都是 a 与 b 的连续函数，因此不可能由

变量的连续变化变到行列式为 -1 的 $O(3)$ 群的另一叶，因而，$R \in SO(3)$. 至此我们看到(10.55)式给出了由(10.54)式建立的由 $SU(2)$ 到 $SO(3)$ 的映射所诱导的对应线性变换.

研究 n 个特殊转动. 绕 x_3 轴转动 ϕ 角：

$$x'_1 = \cos\phi x_1 - \sin\phi x_2,\quad x'_2 = \sin\phi x_1 + \cos\phi x_2,\quad x'_3 = x_3,$$

即

$$g_1(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \exp[-i\phi T_3]; \quad (10.57)$$

与(10.56)式对比，$a = e^{-\frac{i}{2}\phi}, b = 0$. 由(10.45)式.

$$u_1(\phi) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}\phi} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i}{2}\phi} \end{pmatrix}. \quad (10.58)$$

令 $g_1(\psi)$ 对应于绕 x_2 轴转 ψ 角，相应 $u_1(\psi)$

$$g_1(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \exp[-i\psi T_3], \quad (10.59)$$

$$u_1(\psi) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}\phi} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i}{2}\phi} \end{pmatrix}. \quad (10.60)$$

令 $g_2(\theta)$ 为绕 x_2 轴的转动 θ，$u_2(\theta)$ 为对应的映射：

$$g_2(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \equiv \exp[-i\theta T_2], \quad (10.61)$$

$$u_2(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \equiv \exp\left\{\frac{-i}{2}\theta\sigma_2\right\}, \quad (10.62)$$

其中 T_2、T_3 与 T_1 为 $SO(3)$ 的生成元，

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{10.63}$$

在问题中，我们要证明由(10.53)式建立的映射 f 保持乘法规律不变. 由此可见与映射

$$\begin{aligned} u &= u_1(\psi)u_2(\theta)u_1(\phi) \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\psi}\cos\dfrac{\theta}{2}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\phi} & -\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\psi}\sin\dfrac{\theta}{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\phi} \\ \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\psi}\sin\dfrac{\theta}{2}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\phi} & \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\psi}\cos\dfrac{\theta}{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\phi} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{10.64}$$

$$\left(a = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\psi}\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\phi},\ b = -\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\psi}\sin\frac{\theta}{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}\phi}\right)$$

对应的转动变换

$$\begin{aligned} g(\psi,\theta,\phi) &= g_1(\psi)g_2(\theta)g_1(\phi) \\ &= \begin{pmatrix} c_\psi c_\theta c_\phi - s_\psi s_\phi & -(c_\psi c_\theta c_\phi + c_\psi c_\phi) & s_\theta s_\psi \\ -(s_\psi c_\theta c_\phi + s_\phi c_\psi & -(s_\psi c_\theta s_\phi - c_\psi c_\phi) & s_\psi s_\theta \\ -c_\phi s_\theta & s_\phi s_\theta & c_\theta \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{10.65}$$

其中 $c_\psi = \cos\psi, c_\theta = \cos\theta, s_\psi = \sin\psi$ 等. 此式正是欧拉角描述的 $SO(3)$ 矩阵，因此映射是满映射. 这对于 $SU(2)$ 与 $SO(3)$ 的同态关系又是一次确证.

我们进而确定 $SO(3)$ 群的任意 $2j+1$ 维不可约表示. 将(10.64)式代入(10.50)式，就有

$$\begin{aligned} &\Gamma^{(j)}_{mm'}(\psi,\theta,\phi) \\ &= \sum_k (-1)^k \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}\ \sqrt{(j+m')(j-m')}}{k!(j-k-m)!(j+m-k)!(k+m'-m)!} \\ &\quad \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\phi}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2j+m-m'-2k}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2k+m'-m}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m'\phi}. \end{aligned} \tag{10.66}$$

这就是 $SO(3)$ 所有不可约的酉表示. 唯需记住，当 j 为偶数时为忠实表示；j 为奇数时为双值表示：一个群元 R 对应 $\pm \Gamma^{(j)}(R)$，此时乘法规律也只有不计符号因子，才能保持.

2. 讨论

(1) 由于对于 $SO(3)$ 群，Haar 测度有

$$\int(\mathrm{d}\tau) = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\psi\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi = 8\pi^2, \qquad (10.67)$$

因此对于不可约表示 $\Gamma^{(j_1)}$ 与 $\Gamma^{(j_2)}$ 有正交关系

$$\int\Gamma^{(j_1)}_{m_1m'_1}(\psi,\theta,\phi)\Gamma^{(j_2)}_{m_2m'_2}(\psi_2,\theta,\phi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\psi\mathrm{d}\phi$$

$$= \frac{8\pi^2}{2j_1+1}\delta_{j_1j_2}\delta_{m_1m_2}\delta_{m'_1m'_2}. \qquad (10.68)$$

尤其是，当 $m_1 = m_2, m'_1 = m'_2$ 时，注意到

$$\sum_m \Gamma^{(j_1)}_{mm} = \mathrm{Tr}[\Gamma^{(j_1)}] \equiv \chi^{(j_1)},$$

$$\sum_{m'} \Gamma^{(j_2)}_{m'm'} = \mathrm{Tr}[\Gamma^{(j_2)}] \equiv \chi^{(j_2)},$$

则对(10.68)式 $\sum\limits_{m_1m'}$ 后，得到特征标正交定理

$$\frac{1}{8\pi^2}\int\chi^{(j_1)*}(R)\chi^{(j_2)}(R)\sin\theta\mathrm{d}\psi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = \delta_{j_1j_2}. \qquad (10.69)$$

(2) 当 $j=$ 整数，$m' = 0$ 时，列矩阵

$$\Gamma^{(j)}_{m0}(\psi,\theta,\phi) = \sqrt{\frac{4\pi}{2j+1}}Y^*_{jm}(\theta,\phi), \qquad (10.70)$$

其中 $Y^*_{jm}(\theta,\phi)$ 是在数学物理与工程应用中常用到的球谐函数.

(3) 当 $j=$ 整数时，$\{\Gamma^{(j)}\}$ 是 $SO(3)$ 的忠实表示，$SU(2)$ 的非忠实表示；$j=$ 半整数时，$\{\Gamma^{(j)}\}$ 为 $SU(2)$ 的忠实表示，$SO(3)$ 的双值表示. 尤其是 $j=\frac{1}{2}$，$\{\Gamma^{(\frac{1}{2})}\}$ 是 $SU(2)$ 群的基础表示，或自身表示，

$$\Gamma^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\psi,\theta,\phi)=\begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}(\psi+\phi)}\cos\dfrac{\theta}{2} & -e^{-\frac{i}{2}(\psi-\phi)}\sin\dfrac{\theta}{2} \\ e^{\frac{i}{2}(\psi-\phi)}\sin\dfrac{\theta}{2} & e^{\frac{i}{2}(\psi+\phi)}\cos\dfrac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \tag{10.71}$$

当 $j=1$ 时，$\{\Gamma^{(1)}\}$ 是 $SO(3)$ 群的基础表示或自身表示

$$\Gamma^{(1)}(\psi,\theta,\phi)=\begin{pmatrix} e^{-i(\psi+\phi)}\dfrac{(1+\cos\theta)}{2} & e^{-i\phi}\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & e^{-i(\psi-\phi)}\dfrac{(1-\cos\theta)}{2} \\ \dfrac{\sin\theta}{\sqrt{2}}e^{-i\phi} & \cos\theta & -\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{2}}e^{i\phi} \\ e^{i(\phi+\psi)}\dfrac{(1-\cos\theta)}{2} & e^{i\psi}\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & e^{i(\psi+\phi)}\dfrac{(1+\cos\theta)}{2} \end{pmatrix}. \tag{10.72}$$

(4) 在(10.66)式中，求和并不涉及含 ψ 与 ϕ 因子，故可定义函数 $d^j_{mm'}(\theta)$：

$$\Gamma^{(j)}_{mm'}(\psi,\theta,\phi)\equiv e^{-im\phi}d^j_{mm'}(\theta)e^{im'\phi}. \tag{10.73}$$

利用(10.65)式，可以得到 $\Gamma^{(j)}_{mm'}$ 与 $d^j_{mm'}(\theta)$ 的许多重要性质，这里不详细讨论. 但也应记住

$$\begin{aligned}\Gamma^{(j)}_{mm'}(0,\theta,0)&=d^j_{mm'}(\theta)\\ &=\sum_k(-1)^k\frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}\ \sqrt{(j+m')!(j-m')!}}{k!(j-k-m')!(j+m-k)!(k+m'-m)!}\\ &\quad\cdot\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2j+m-m'-2k}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2k+m'-m}.\end{aligned} \tag{10.74}$$

(5) $\Gamma^{(1)}(\psi,\theta,\phi)$ 与 $R(\psi,\theta,\phi)$ 有关系：

$$\Gamma^{(1)}(\psi,\theta,\phi)=MR(\psi,\theta,\phi)M^{-1}, \tag{10.75}$$

其中

$$M=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ -i & 0 & i\\ 0 & \sqrt{2} & 0\end{pmatrix}. \tag{10.76}$$

(6) 由于 $\Gamma^{(j)}(\psi,\theta,\phi)$ 是幺正矩阵，总可以通过相似变换变为

对角矩阵，且其模为 1. 在(10.66)式中，令 $a=e^{-\frac{i}{2}\phi}, b=0$，则有

$$\Gamma^{(i)}_{mm'}=\delta_{mm'}e^{-im\phi}. \tag{10.77}$$

则以 ϕ 标记的共轭类的特征标为

$$\chi^{(j)}(\phi)=\sum_{m=-j}^{j}e^{im\phi}=\frac{\sin\left\{\left(j+\frac{1}{2}\right)\omega\right\}}{\sin(\omega/2)} \tag{10.78}$$

$$(0\leqslant\phi\leqslant 2\pi).$$

此式满足特征标正交定理(10.68)式，注意，此式包括 $SU(2)$ 群所有不等价不可约表示的特征标.

问　　题

1. 验证(10.75)式.

2. 由(10.53)和(10.54)式导出(10.55)式.

3. 证明由(10.53)式建立的映射 f 保持乘法规律不变.

[提示：由 $X'=uXu^+$，式中 $X=\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\sigma}, X'=\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{\sigma}$ 以及 $\boldsymbol{r}'=R\boldsymbol{r}$，可得

$$u(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\sigma})u^+=X'=(\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{\sigma})=(R_\alpha\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{\sigma}.$$

类似地取 $v\in SU(2)$，有

$$v(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\sigma})v^+=(R_\beta\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{\sigma}$$

$$\Longrightarrow(vu)\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\sigma}(vu)^+=v(u\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\sigma}v^+)u^+=uR_\beta\boldsymbol{r}u^+=(R_\alpha R_\beta\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{\sigma}.$$

另一方面，$(vu)\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\sigma}(vu)^+=(R_{\alpha\beta}\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{\sigma}$ 即是 $R_{\alpha\beta}=R_\alpha R_\beta$.]

4. 试给出 $\Gamma^{(j)}_{jm}$、$\Gamma^{(j)}_{-jm}$、$\Gamma^{(j)}$ 的显式.

[答案：

$$\Gamma^{(j)}_{jm}=(-1)^{j-m}\sqrt{\frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!}}e^{-ij\psi}$$

$$\cdot\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{j+m}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{j-m}e^{-im\phi},$$

$$\Gamma^{(j)}_{-jm} = \sqrt{\frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!}} e^{ij\phi} \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{j-m} \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{j+m} e^{-im\phi},$$

$$\Gamma^{(0)} = 1.\ ]$$

5. 证明映射 $f: u \longrightarrow \Gamma^{(j)}_{(u)}$((10.46) 式) 确实给出 $SU(2)$ 群的表示.

[提示:关键证明映射 f 保持乘法规律不变. $\forall\ v \in SU(2)$,作变换 $x'' = vx'$,诱导 ξ'_m 到 ξ''_m 的变换为

$$\xi''_m = \sum_{m'} \Gamma^{(j)}_{mm'}(v)\xi_{m''} = \sum_{m''} \Gamma^{(j)}_{mm''}(v) \sum_{m'} \Gamma^{(j)}_{m''m'}(u)\xi_{m'}$$

$$= \sum_{m'} [\Gamma^{(j)}(v)\Gamma^{(j)}(u)]_{mm'}\ \xi'_m. \tag{10.79}$$

此外,由 x 到 x'' 的变换亦可直接利用 vu 实现:

$$\xi''_m = \sum_{m'} \Gamma^{(j)}_{mm'}(vu)\xi_{m'}. \tag{10.80}$$

对比(10.76)与(10.77)式,有

$$\Gamma^{(j)}(vu) = \Gamma^{(j)}(v)\Gamma^{(j)}(u).\quad]$$

6. 上述映射 f 有不变量

$$x_1^* x_1 + x_2^* x_2 = x'^*_1\ x'_1 + x'^*_2\ x'_2,$$

试证由此可得诱导的酉变换的不变量是

$$\sum_{m=-j}^{j} \xi'^*_m\ \xi'_m = \sum_m \xi^*_m \xi_m.$$

[提示:
$$\sum_m \xi^*_m \xi_m = (2j)! \sum_m \frac{x_1^{*\ j+m} x_1^{j+m} x_1^{*\ j-m} x_1^{j-m}}{(j+m)!(j-m)!}$$

$$= (x_1^* x_1 + x_2^* x_2)^{2j}.$$

同理有

$$(2j)! \sum_m \xi'^*_m\ \xi'_m = (x'^*_1 x_1 + x'^*_2\ x'_2)^{2j},$$

即如题云. 因此 $\Gamma^{(j)}$ 是 $SU(2)$ 的幺正表示. 由此可见,引入因子 $\{(j+m)!(j-m)\}^{-\frac{1}{2}}$ 是为了保证幺正性.]

7. 试证:若矩阵 A 与对角线上元素互异的对角矩阵 M:

$$M_{ij} = \Delta_i \delta_{ij} \quad (i \neq j \text{ 时}, \Delta_i \neq \Delta_j),$$

对易，则 A 为对角矩阵.

[提示：由

$$MA = AM \Longrightarrow \sum_j M_{ij} A_{jk} = \sum_j A_{ij} M_{jk}$$

$$\Longrightarrow \sum_j \Delta_i \delta_{ij} A_{jk} = \sum_j A_{ij} \Delta_j \delta_{jk}$$

$$\Longrightarrow \Delta_i A_{ik} = A_{ik} \Delta_k \Rightarrow A_{ik}(\Delta_i - \Delta_k) = 0$$

$$\Longrightarrow i \neq k \Rightarrow A_{ik} = 0, \text{即 } A \text{ 为对角矩阵.}]$$

8. 若 M 为对角矩阵(其 $M_{ij} = \Delta_i \delta_{ij}$)，$A$ 矩阵有一列元素全不等于零，即 $1 \leqslant l \leqslant n$,

$$\forall\, e,\ A_{ie} \neq 0 \quad (i = 1, \cdots, n, n \text{ 为矩阵的阶})$$

且 $MA = AM$，则 M 必为常数矩阵.

[提示：

$$(AM)_{ie} = (MA)_{il} \quad (i = 1, \cdots, n)$$

$$\Longrightarrow \sum_j A_{ij} M_{jl} = \sum_j M_{ij} A_{jl}$$

$$\Longrightarrow \sum_j A_i \delta_{ij} A_{jl} = \sum_j A_{il} \Delta_j \delta_{jl} \Rightarrow \Delta_i A_{il} = A_{il} \Delta_l$$

$$\Longrightarrow A_{il}(\Delta_i - \Delta_l) = 0.$$

由于 $\forall\, i, A_{il} \neq 0$，故必有 $\Delta_i = \Delta_l$.

讨论对于 $\{\Gamma^{(j)}\}$. 当 $a = e^{-i\phi/2}, b = 0$ 时，

$$\Gamma^{(j)}(u)_{mm'} = \delta_{mm'} e^{-im\phi},$$

此时 $\Gamma^{(j)}(u)$ 相当于第 7 题中的 M，故如有矩阵 B 与所有 $\{\Gamma^{(j)}(u)\}$ 对易，则 B 必为对角矩阵.

令 $m' = j$，则 $\Gamma^{(j)}$ 的最后一列($m = j, \cdots, -j$)

$$\Gamma^{(j)}(u)_{mj} = (-1)^{j-m} \sqrt{\frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!}} a^{j+m} b^{*\,j-m}.$$

令 $a = b = 1$，则这一列($m' = j$) 矩阵元全不为零，故由 8 题，B 必

为常数矩阵. 由舒尔定理的逆定理可知, $\{\Gamma^{(j)}(u)\}$ 必为不可约表示.]

9. 验证正交矩阵 $d^j(\theta)$ 的下述重要性质

$$d^j_{mm'}(\theta) = d^j_{-m'-m}(\theta) = (-1)^{m'-m} d^j_{mm'}(\theta)$$
$$= d^j_{m'm}(-\theta) = (-1)^{m-m'} d^j_{-m-m'}(\theta);$$
$$d^j_{mm'}(\pi) = (-1)^{j-m'}\delta_{m,-m'}, \quad d^j_{mm}(2\pi) = (-1)^{2j}\delta_{mm'};$$
$$d^j_{mm'}(\pi-\theta) = (-1)^{j-m'} d^j_{-mm'}(\theta) = (-1)^{j+m} d^j_{m-m'}(\theta).$$

§ 10.3 SO(3)群的直积表示及其约化

$SO(3)$ 群的直积表示及其约化与量子力学中角动量问题、原子及分子物理、原子核物理中的多体问题、多重结构以及光谱等问题联系甚为紧密,有关细节读者还可参阅名著韦尔(H · Weyl) 的《群论及量子力学》、维格勒(E. P. Wigner) 的《群论及其在原子光谱的量子力学中的应用》、范 · 德 · 瓦尔登(B. L. Vander Waerden) 的《群论及量子力学》、拉卡(G. Racah) 的《群论与核谱》以及洛斯(M. E. Rose) 的《角动量理论》等. 群论在有关领域的应用是较为成熟的"经典"领域了,在此仅介绍主要框架,以供读者尔后深入探索参考.

1. 直积表示及其约化的基本问题

设 $\Gamma^{(j_1)}$ 与 $\Gamma^{(j_2)}$ 是 $SO(3)$ 群的两个不可约幺正表示,$S^{j_1j_2}$ 为其直积表示 $\Gamma^{(j_1)}\otimes\Gamma^{(j_2)}$ 的约化矩阵(即将该表示完全约化的变换矩阵). 约化以后的幺正表示记为 M,则有

$$M = (S^{j_1j_2})\{\Gamma^{(j_1)}\otimes\Gamma^{(j_2)}\}(S^{j_1j_2})^{-1}$$
$$= \sum_{j\oplus} a_j\Gamma^{(j)}, \tag{10.81}$$

其中右边级数称为克莱布希-戈登(Clebsch-Gordan)级数. 有关基本问题是:

(1) 确定 C-G 级数中包含哪些不可约表示 $\Gamma^{(j)}$，以及相应重复次数 a_j，亦即 C-G 级数的具体构成.

(2) 确定约化矩阵 $S^{j_1j_2}$.

2. C-G 级数的确定

利用权系统分析，令 $\Gamma^{(j_1)}$ 与 $\Gamma^{(j_2)}$ 的权系统分别为：

$$\Gamma^{(j_1)}:\{m_1|m_1=j_1,j_1-1,\cdots,-j_1+1,-j_1\},$$
$$\Gamma^{(j_2)}:\{m_2|m_2=j_2,j_2-1,\cdots,-j_2+1,-j_2\},\tag{10.82}$$

则直积表示的权系统为

$$\Gamma^{(j_1)}\otimes\Gamma^{(j_2)}:\{m_1+m_2|m_1=j_1,j_1-1,\cdots,-j_1+1,-j_1;\ m_2=j_2,j_2-1,\cdots,-j_2+1,-j_2\}.\tag{10.83}$$

显然相应的最高权 j_1+j_2 是单权，即 $\Gamma^{(j_1+j_2)}$ 在 C-G 级数中只出现一次，其权系统为

$$\Gamma^{(j_1+j_2)}:\{m=j_1+j_2,j_1+j_2-1,\cdots,-j_1-j_2\}.\tag{10.84}$$

在(10.81)式右边的 C-G 级数减去权系统(10.84)剩下的差集中，最高权显然为 j_1+j_2-1，亦为单权，故不可约表示 $\Gamma^{(j_1+j_2-1)}$ 在 C-G 级数亦只可能出现一次.

继续以上分析，在相继得到的差集中，会有一系列最高权 $j_1+j_2-2,\cdots,|j_1-j_2|$ 出现，因此相应的不可约表示在 C-G 级数中均只出现一次：

$$a_{j_1+j_2}=a_{j_1+j_2-1}=\cdots=a_{|j_1-j_2|},$$

亦即(10.81)式的 C-G 级数为

$$M=\sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2}\Gamma^{(j)}$$
$$=\Gamma^{(j_1+j_2)}\oplus\Gamma^{(j_1+j_2-1)}\oplus\cdots\oplus\Gamma^{(-j_1-j_2)}.\tag{10.85}$$

直积表示的权系统可以直观地用图 10.3 表示. 图中为确定起见，

设 $j_1 > j_2$. 纵、横坐标取值范围分别为：$-j_1 \leqslant m_1 \leqslant j_1$；$-j_2 \leqslant m_2 \leqslant j_2$. 图中每个格点对应权系统一个权，大小为两坐标之和.

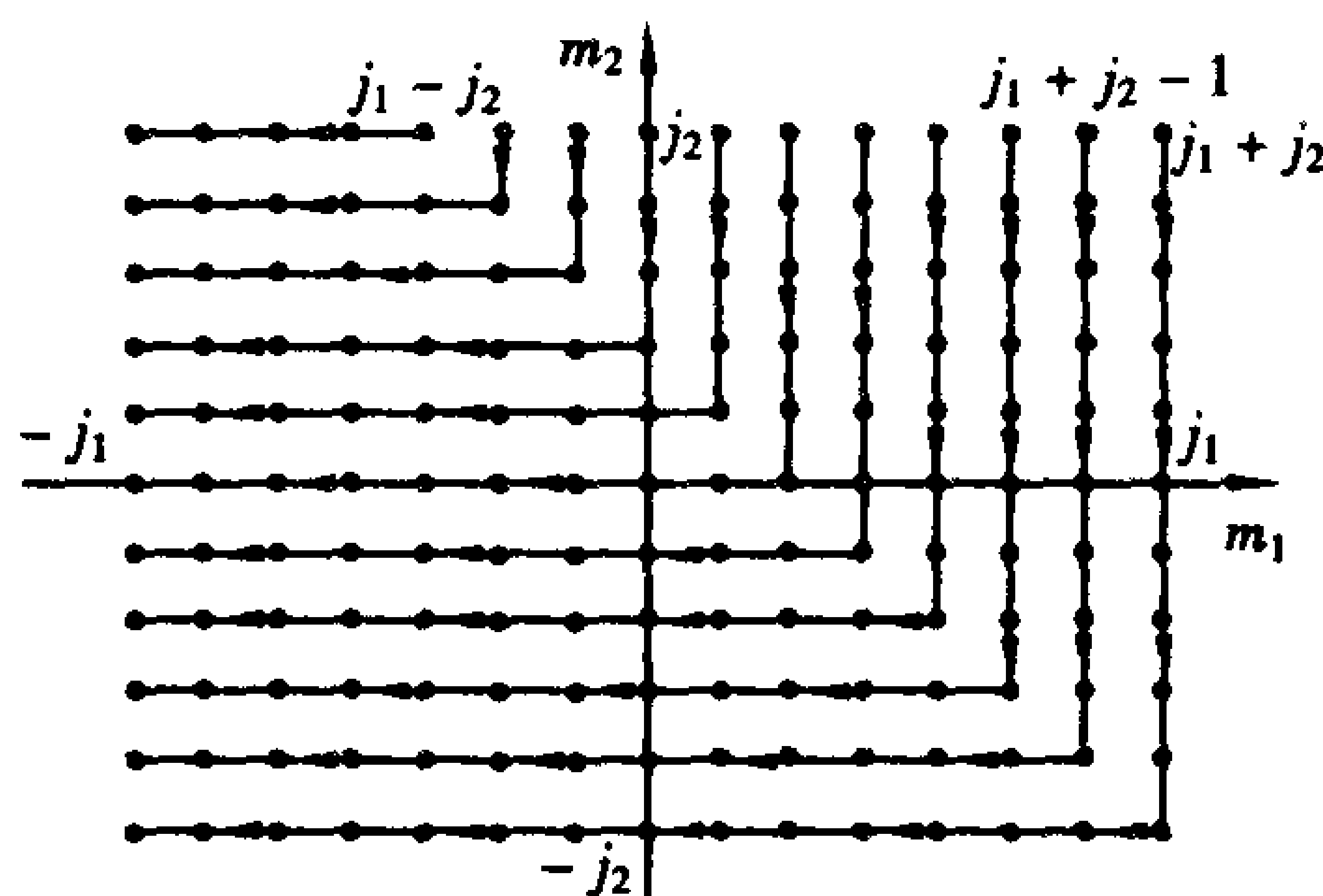


图 10.3　直积表示的权系统

3. 约化矩阵 $S^{j_1 j_2}$ 的确定.

略去 $S^{j_1 j_2}$ 上标，并用双脚标标记 S 和 M 的矩元

$$M_{jm,j'm'},\quad \begin{cases} j,j' = j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, \cdots, |j_1 - j_2|, \\ m = j, j-1, \cdots, -j;\ m' = j', j'-1, \cdots, -j', \end{cases} \tag{10.86}$$

其中第一指标(j,j')表示对应的对角块，第二脚标表示对角块的行与列的脚标. 显然，在不同对角块内，相关行和列对应的矩阵元为零；在同一对角块内，矩阵元才有意义，即是

$$M_{jm,j'm'} = \delta_{jj'} \Gamma^{(j)}(\psi,\theta,\phi)_{mm'}. \tag{10.87}$$

由(10.48)式，可得

$$\begin{aligned}
[\Gamma^{(j_1)} \otimes \Gamma^{(j_2)}]_{m_1 m_2, m'_1 m'_2} &= \Gamma^{(j_1)}(\psi,\theta,\phi)_{m_1 m'_1} \Gamma^{(j_2)}(\psi,\theta,\phi)_{m_2 m'_2} \\
&= \sum_{jm,j'm'} S^{-1}_{m_1 m_2, jm} M_{jm,j'm'} S_{j'm', m'_1 m'_2} \\
&= \sum_{jmm'} S^*_{jm, m_1 m_2} \Gamma^{(j)}(\psi,\theta,\phi)_{mm'} S_{jm', m'_1 m'_2}.
\end{aligned} \tag{10.88}$$

当 $m \neq m_1 + m_2$ 时，令 $\psi = \theta = 0$，则 $b = 0, a = e^{-i\phi/2}$，由(10.75)式有

$$\Gamma^{(j)}(0,0,\phi)_{mm'} = \delta_{mm'} e^{-im\phi}.$$

将其代入(10.87)式，得

$$\delta_{m_1 m'_1} e^{-im_1\phi} \cdot \delta_{m_2 m'_2} e^{-im_2\phi}$$
$$= \sum_{jmm'} S^*_{jm,m_1 m_2} \delta_{mm'} e^{-im\phi} S_{jm',m'_1 m'_2}.$$

此式左边只有在 $m_1 = m'_1, m_2 = m'_2$ 时才不为零，为

$$\delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2} e^{-i(m_1+m_2)\phi}.$$

右边在此条件下，$e^{-im\phi}$ 的展开系数由于 S 幺正性，

$$S^*_{jm,m_1 m_2} S_{jm,m'_1 m'_2} = |S_{jm,m_1 m_2}|^2 \geqslant 0.$$

由于 $e^{-im\phi}$ 在 m 取不同值时线性独立，右边诸项亦只剩下 $m = m_1 + m_2$ 一项，即

$$S_{jm,m_1 m_2} = \delta_{m,m_1+m_2} S_{jm_1+m_2,m_1 m_2}.$$

将此式代入(10.88)式，得

$$\Gamma^{(j)}(\psi,\theta,\phi)_{m'_1 m'_1} \Gamma^{(j)}(\psi,\theta,\phi)_{m'_2 m'_2}$$
$$= \sum_j S^*_{jm_1+m_2,m_1 m_2} \Gamma^{(j)}(\psi,\theta,\phi)_{m_1+m_2,m'_1+m'_2} S_{jm'_1+m'_2,m'_1 m'_2} \quad (10.89)$$

用 $\Gamma^{(j)*}_{m_1+m_2,m'_1+m'_2}(\psi,\theta,\phi)$ 乘上(10.89)式，再对 ψ,θ,ϕ 作群上积分，注意到正交关系(10.68)，就会有

$$\int \Gamma^{(j_1)}(\psi,\theta,\phi)_{m_1 m'_1} \Gamma^{(j_2)}(\psi,\theta,\phi)_{m_2 m'_2} \Gamma^{j*}(\psi,\theta,\phi)_{m_1+m_2,m'_1+m'_2}$$
$$\cdot \sin\theta d\theta d\psi d\phi = \frac{8\pi^2}{2j+1} S^*_{jm_1+m_2,m_1+m_2} S_{jm'_1+m'_2,m'_1+m'_2}.$$
$$(10.90)$$

在(10.90)式中，取 $m_1 = j_1, m_2 = -j_2$（设 $j_1 \geqslant j_2$），则

$$右边 = \frac{8\pi^2}{2j+1} S^*_{jj_1-j_2,j_1-j_2} S_{jm'_1+m'_2,m'_1 m'_2},$$

右边 $\Gamma^{(j_1)}_{j_1 m_1}$ 与 $\Gamma^{(j_2)}_{j_2 m_2}$ 代之其表达式(10.66)，就有

$$右边 = \left[\binom{2j_1}{j_1+m'_1}\binom{2j_2}{j_2+m'_2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot \sum_k (-1)^{k+j_1-m'_1} \frac{\sqrt{(j+m'_1+m'_2)!(j-m'_1-m'_2)!}}{k!(j+j_1-j_2-k)!(j-m'_1-m'_2-k)!}$$

$$\cdot \frac{\sqrt{(j+j_1-j_2)!(j-j_1+j_2)!}}{(k+m'_1+m'_2+m'_2-j_1+j_2)!}$$

$$\cdot \int \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2a} \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2b} \sin\theta \mathrm{d}\psi \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi, \tag{10.91}$$

其中 $2a = 2j + 2j_1 - 2m'_2 - 2k, 2b = 2j_2 + 2m'_2 + 2k$，二项式系数

$$\begin{pmatrix} 2j_1 \\ j_1 + m'_1 \end{pmatrix} = \frac{2j_1!}{(j_1 - m'_1)!(j_1 + m'_1)!},$$

$$\begin{pmatrix} 2j_2 \\ j_2 + m'_2 \end{pmatrix} = \frac{2j_2!}{(j_2 - m'_2)!(m'_2 + j_2)!}.$$

由于

$$\int |P^j_{jm}(\psi,\theta,\phi) \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\psi \mathrm{d}\phi = 8\pi^2/2j+1$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2j \\ j+m \end{pmatrix} \int \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2j-2m} \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2j+2m} \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\psi \mathrm{d}\phi = \frac{8\pi^2}{2j+1},$$

令 $j - m = 2a, j + m = 2b$，上式变为

$$\int \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2a} \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2b} \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\psi \mathrm{d}\phi = 8\pi^2 \frac{a!b!}{(a+b+1)!}. \tag{10.92}$$

将(10.40)式代入(10.91)式，同时改写 m'_1 与 m'_2 为 m_1 与 m_2，则得

$$S^*_{j_1j_1-j_2,j_1-j_2} S_{jm_1+m_2m_1m_2}$$

$$= (-1)^k \sqrt{\frac{(2j_1)!(2j_2)!(j+m_1+m_2)!(j-m_1-m_2)!}{(j_1+m_1)!(j_1-m_1)!}}$$

$$\cdot \sqrt{\frac{(j+j_1-j_2)(j-j_1+j_2)!}{(j_2+m_2)!(j_2-m_2)!}}$$

$$\cdot \frac{(2j+1)!(j_1+j_2-m-k)!}{(j+j_1+j_2+k)!(j-m_1-m_2-k)!}$$

$$\cdot \frac{(j_2 + m_2 + k)!}{(j + j_1 - j_2 - k)!(k + m_1 + m_2 - j_1 + j_2)!k!}.$$

(10.93)

在(10.93)式中，令 $m_1 = j_1, m_2 = - j_2$，并注意到

$$\sum_k \binom{a}{k}\binom{b}{c-u} = \binom{a+b}{c},$$

就有

$$|S_{jj_1} - j_2, j_1 - j_2|^2 = S^*_{jj_1j_2,j_1-j_2} S_{jj_1-j_2,j_1-j_2}$$

$$= \frac{(2j+1)(2j_1)!(2j_2)!}{(j + j_1 + j_2 + 1)!(j_1 + j_2 - j)!}. \qquad (10.94)$$

采用肖特利-康登(Shortley-Condon)相位约定，令

$$S_{jj_1-j_2,j_1-j_2} = S^*_{jj_1-j_2,j_1-j_2}$$

则由(10.91)式可得约化矩阵 S 的矩阵元

$$S_{jj_1-j_2,j_1-j_2} = \frac{(2j+1)(2j_1)!(2j_2)!}{(j + j_1 + j_2 + 1)!(j_1 + j_2 - j)!}.$$

(10.95)

将(10.95)式代入(10.93)式，并恢复原来略去的上标 j_1, j_2，则得一般约化矩阵元

$$S^{j_1j_2}_{jm,m_1m_2} = \delta_{m,m_1+m_2} \sqrt{\frac{(j + j_1 - j_2)!(j - j_2 + j_2)!}{(j + j_1 + j_2 + 1)!(j_1 + m_1)!}}$$

$$\cdot \sqrt{\frac{(j_1 + j_2 - j)!(j + m)!(j - m)!}{(j_1 - m_1)!(j_2 + m_2)!(j_2 - m)!}}$$

$$\cdot \sum_k (-1)^{k+j_1-m_1} \frac{\sqrt{2j+1}(j + j_1 - m_2 - k)!}{(j + j_1 - j_2 - k)!(j - m - k)!k!}$$

$$\cdot \frac{(j_2 + m_2 + k)!}{(k - j_1 + j_2 + m)!}. \qquad (10.96)$$

(10.96)式在角动量理论中很重要，尤其是讨论多粒子角动量耦合时更为重要. 由于负数阶乘项为 0，因而实际计算时取项并不多. 通常称为克莱因-戈登(Clein-Gordon)系数.

由于 S 的幺正性，显然有

$$\begin{aligned}
&\sum_{m_1 m_2} S^{j_1 j_2}_{jm,m_1 m_2} S^{j_1 j_2}_{j'm',m_1 m_2} = \delta_{jj'}\delta_{mm'}, \\
&\sum_{jm} S^{j_1 j_2}_{jm,m_1 m_2} S^{j j_2}_{\overline{jm,m'_1 m'_2}} = \delta_{m_1 m'_1}\delta_{m_2 m'_2}.
\end{aligned} \tag{10.97}$$

问　　题

1. 详细完成由(10.90)式到(10.91)式的推导.
2. 详细完成由(10.93)式到(10.94)式的推导.
3. 试直接推算 $d^{1/2}_{mm'}(\theta)$.

[提示：令 $d^{\frac{1}{2}}_{mm'}(\theta) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$，根据幺正性

$$\det\left|d^{\frac{1}{2}}(\theta)\right| = 1,\ d^{\frac{1}{2}}(\theta)^{+} d^{\frac{1}{2}}(\theta) = E,$$

$$\Longrightarrow |A|^2 + |B|^2 = 1, |A|^2 = |D|^2, |B|^2 = |C|^2.$$

$$A^{*}C + B^{*}D = 0, |C|^2 + |D|^2 = 1, AD - BC = 1,$$

则有

$$\left\{\begin{aligned}
&d^{\frac{1}{2}}(\theta) = \begin{pmatrix} a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi} & (1-a^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta} \\ (1-a^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi} & a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda} \end{pmatrix} \quad (0 \geqslant a \geqslant 1), \\
&a(1-a^2)^{\frac{1}{2}}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda+\xi)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\xi+\eta)}] = 0, \\
&a^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda+\xi)} - (1-a^2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\xi+\eta)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda+\xi)} = 1.
\end{aligned}\right. \tag{10.98}$$

即是

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\lambda+\xi)} = -\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\xi+\eta)};\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi},\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi} = -\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta}.$$

令 $\cos\dfrac{\theta}{2} = a, \sin\dfrac{\theta}{2} = (1-a^2)^{\frac{1}{2}}$，则(10.98)式变为

$$d^{\frac{1}{2}}(\theta) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi}\cos\dfrac{\theta}{2} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}\sin\dfrac{\theta}{2} \\ -\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}\sin\dfrac{\theta}{2} & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}\cos\dfrac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \tag{10.99}$$

若令$\xi=-\frac{1}{2}(\psi+\phi)$，$e^{i\eta}=-e^{-\frac{i}{2}(\psi+\phi)}\Longrightarrow\eta=-\frac{1}{2}(\psi+\phi)+\pi$.]

4. 设$2j+1$个函数$\psi_{jm}(\boldsymbol{r})(m=j,j-1,\cdots,-j)$在转动算子$R$的作用下满足

$$\Gamma(R)\psi_{jm}(\boldsymbol{r})=\sum_{m'}\Gamma^{(j)}(R)_{m'm}\psi_{jm'}(\boldsymbol{r}), \tag{10.100}$$

则称函数$\psi_{jm}(\boldsymbol{r})$是按$SO(3)$群不可约表示$\Gamma^j$变换的. 当$j=\frac{1}{2}$，$\frac{3}{2}$，$\cdots$时，$\psi=(\psi_j,\cdots,\psi_{-j+1},\psi_{-j})$称为$j$阶旋量场. 当$j=0,1,2$，$\cdots$时，则$\psi$称为$j$阶张量场. 试证$\psi_{jm}$就是角动量算符$\hat{J}^2$和$\hat{J}_z$的本征函数.

[提示：由于

$$\Gamma(k)=e^{-i\theta\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{J}},$$

其中$\boldsymbol{J}$是角动量算子，$\boldsymbol{n}$为转轴法向单位矢量，或用欧拉角表示

$$\Gamma(\psi,\theta,\phi)=e^{-i\phi J_z}e^{-i\theta J_y}e^{-i\phi J_j}.$$

首先令$\psi=\theta=0$，则$R(\psi,\theta,\phi)=R(0,0,\phi)$，则(10.100)式可写作

$$e^{-i\phi J_z}\psi_{jm}(\boldsymbol{r})=\sum_{m'}\Gamma^j_{m'm}(0,0,\phi)\psi_{jm'}(\boldsymbol{r}).$$

但由(10.74)式，$\Gamma^j_{m'm}(0,0,\phi)=\delta_{mm'}e^{-im\phi}$，上式变为

$$e^{-i\phi J_z}\psi_{jm}(\boldsymbol{r})=e^{-im\phi}\psi_{jm}(\boldsymbol{r}).$$

两边对ϕ微分，再令$\phi\to 0$，得

$$J_z\psi_{jm}(\boldsymbol{r})=m\psi_{jm}(\boldsymbol{r}), \tag{10.101}$$

即$\psi_{jm}(\boldsymbol{r})$为$J_z$的本征函数，本征值为$m$.

再考虑绕y轴与绕x轴转微小θ角的转动，

$$e^{-i\theta J_y}\psi_{jm}(\boldsymbol{r})=\sum_{m'}\Gamma^{(j)}(0,0,0)_{m'm}\psi_{jm'}(\boldsymbol{r}),$$

$$e^{-i\theta J_x}\psi_{jm}(\boldsymbol{r})=\sum_{m'}\Gamma^{(j)}\left(-\frac{\pi}{2},\theta,\frac{\pi}{2}\right)_{m'm}\psi_{jm'}(\boldsymbol{r}), \tag{10.102}$$

这里利用绕 x 轴的微小转动 θ 可以通过欧拉转动 $\psi = -\frac{\pi}{2}, \theta = \theta$, $\phi = \frac{\pi}{2}$ 实现. 但

$$\Gamma^{(j)}(0,\theta,0)_{mm'} = d^j_{mm'}(\theta)$$

$$= (-1)^k \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{k!(j-k-m')!(j+m-k)!(k+m'-m)!}$$

$$\cdot \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2j+m-m-2k}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2k+m'-m},$$

$$\Gamma^j\left(-\frac{\pi}{2},\theta,\frac{\pi}{2}\right)_{mm'}$$

$$= \sum_k (-1)^k \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{k!(j-k-m)!(j+m'-k)!(k+m-m')!}$$

$$\cdot \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2j+m'-m-2k}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2k+m-m'} \mathrm{e}^{\mathrm{i}m'\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\frac{\pi}{2}},$$

将上两式代入(10.98)式,对 θ 微分,再令 $\theta \longrightarrow 0$,得

$$J_y\psi_{jm}(\boldsymbol{r}) = -\frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{(j-m)(j+m-1)}\psi_{jm+1}(\boldsymbol{r})$$

$$+\frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{(j+m)(j-m+1)}\psi_{jm-1}(\boldsymbol{r}),$$

$$J_x\psi_{jm}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}\sqrt{(j-m)(j+m+1)}\psi_{jm+1}(\boldsymbol{r})$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{(j+m)(j-m+1)}\psi_{jm-1}(\boldsymbol{r}).$$

亦即

$$J_\pm \psi_{jm}(\boldsymbol{r}) \equiv (J_x \pm \mathrm{i}J_y)\psi_{jm}(\boldsymbol{r})$$

$$= \mp\sqrt{\frac{1}{2}(j \mp m)(j \pm m + 1)}\psi_{jm\pm1}(\boldsymbol{r}). \quad (10.102)$$

注意到 $J_+J_- = J_x^2 + J_y^2 - \mathrm{i}[J_x, J_y]$, $J_-J_+ = J_x^2 + J_y^2 + \mathrm{i}[J_x, J_y]$, $J^2 = \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) + J_z^2$.

由于(10.101)式和

$$J_+ J_- \psi_{jm}(\boldsymbol{r}) = - J\sqrt{\frac{1}{2}(j+m)(j-m+1)}\psi_{j,m-1}(\boldsymbol{r})$$

$$= -\sqrt{\frac{1}{2}(j+m)(j-m+1)}J_+ \psi_{j,m-1}(\boldsymbol{r})$$

$$= -\sqrt{\frac{1}{2}(j+m)(j-m+1)}$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}(j-1+m)(j+m)}\psi_{jm}(\boldsymbol{r})$$

$$= -\frac{1}{2}(j+m)(j-m+1)\psi_{jm}(\boldsymbol{r}),$$

$$J_- J_+ \psi_{jm}(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{4}(j+m)(j-m-1)\psi_{jm}(\boldsymbol{r}),$$

因此

$$\hat{J}^2\psi_{jm}(\boldsymbol{r}) = (J_x^2 + J_y^2 + J_z^2)\psi_{jm}(\boldsymbol{r})$$
$$= \{[j(j+1) - m^2] + m^2\}\psi_{jm}(\boldsymbol{r})$$
$$= j(j+1)\psi_{jm}(\boldsymbol{r}).$$]

5. 直接证明 $\Gamma(R)$ 是表示转动的矩阵.

[提示：由

$$\Gamma(R)\psi_{jm}(\boldsymbol{r}) = \sum_{m'}\Gamma^j_{m'm}(R)\psi_{jm'}(\boldsymbol{r})$$

$$\Longrightarrow \int \psi^*_{jm''}(\boldsymbol{r})\Gamma(R)\psi_{jm}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau$$

$$= \sum_{m'}\Gamma^j_{m'm}(R)\int \psi^*_{jm''}(\boldsymbol{r})\psi_{jm'}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau$$

$$= \sum_{m'}\Gamma^j_{m'm}(R)\delta_{m''m'} = \Gamma^j_{mm'}(R),$$

其中用正厄米算符 J^2、J_z 的本征函数 $\{\psi_{jm}(\boldsymbol{r})\}$ 的正交归一性.]

6. 令 $\varphi_{jm} = \sum_{m_1 m_2} S^{j_1 j_2}_{m_1 m_2 jm}\psi_{j_1 m_1 j_2 m_2}$，其中 $\psi_{j_1 m_1 j_2 m_2} = \psi_{j_1 m_1}\psi_{j_2 m_2}$，共 $(2j_1+1)\cdot(2j_2+1)$ 个 $(m_1 = j_1, \cdots, -j_1; m_2 = j_2, \cdots, -j_2)$. 按

直积表示 $\Gamma^{j_1}\otimes\Gamma^{j_2}$ 变换，

$$\Gamma(R)\psi_{j_1m_1j_2m_2}=\sum_{m'_1,m'_2}[\Gamma^{j_1}(R)\otimes\Gamma^{j_2}(R)]_{m'_1,m'_2,m_1m_2}\psi_{j_1m'_1,j_2m'_2},$$

试证函数集 $\{\varphi_{jm}\}(j=j_1+j_2,\cdots,|+j_1-j_2|,m=j,\cdots,-j)$ 的变换规律为

$$\Gamma(R)\varphi_{jm}=\sum_{m'}\Gamma^{j}_{m'm}(\boldsymbol{r})\varphi_{jm'}.$$

[提示：

$$\begin{aligned}\Gamma(R)\varphi_{jm}&=\sum_{m_1m_2}S^{j_1j_2^+}_{m_1m_2jm}\Gamma(R)\varphi_{j_1m_1j_2m_2}\\&=\sum_{m_1m_2}\sum_{m'_1m'_2}S^{j_1j_2^+}_{m_1m_2jm}[\Gamma^{j_1}(R)\otimes\Gamma^{j_2}(R)]_{m'_1m'_2,m_1m_2}\varphi_{j_1m'_1,j_2m'_2}\\&=\sum_{m_1m_2m'_1m'_2j'm'}S^{j_1j_2^+}_{m'_1m'_2j'm'}[\Gamma^{j}(R)\otimes\Gamma^{j_2}(R)]_{m'_1m'_2,m_1m_2}\\&\quad\cdot S^{j_1j_2}_{m_1m_2jm}\varphi_{j'm'}\\&=\sum_{j'm'}[S\Gamma^{j_1}(R)\otimes\Gamma^{j_2}(R)S^{-1}]_{j'm',jm}\phi_{j'm'}\\&=\sum_{m'}\Gamma^{j}_{m'm}\varphi_{jm'},\end{aligned}$$

其中用到 C-G 系数的定义(10.86)式以及(10.99)式的逆表达式

$$\psi_{j_1m_1j_2m_2}=\sum_{j'm'}S^{j_1j_2}_{j'm',m_1m_2}\varphi_{jm'}.\ ]$$

7. 令 $S^{j_1j_2^+}_{m_1m_2,jm}\equiv\langle j_1m_1j_2m_2|jm\rangle$ 试证

$$\begin{aligned}\langle j_1m_1j_2m_2|j_3m_3\rangle&=(-1)^{j_1+j_2-j_3}\langle j_2m_2j_1m_1|j_3m_3\rangle\\&=(-1)^{j_1+j_2-j_3}\langle j_1,-m_1j_2,-m_2|j_3,-m_3\rangle\\&=(-1)^{j_2+m_2}\sqrt{\frac{2j_3+1}{2j_1+1}}\langle j_3,-m_3j_2m_2|j_1,-m_1\rangle\\&=(-1)^{j_1-m_1}\sqrt{\frac{2j_3+1}{2j_2+1}}\langle j_1m_1j_3,-m_3|j_2,-m_2\rangle.\end{aligned}$$

[提示：由(10.93)式可得.]

8. 维格勒(Wigner)引入所谓 $3j$ 符号：

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1-j_2-m_3}\frac{1}{\sqrt{2j_3+1}}\langle j_1m_1j_2m_2|j_3,-m_3\rangle.$$

试证 $3j$ 符号具有如下性质：

(1) 对列作偶置换不变；

(2) m 反号或对列作奇置换时出现因子 $(-1)^{j_1+j_2+j_3}$；

(3) 非零条件：$m_1+m_2+m_3=0$ 或 Δ 条件：

$$j_1+j_2 \geqslant j_3 \geqslant |j_1-j_2|;$$

(4) 正交关系：

$$\sum_{j_3,m_3}(2j_3+1)\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m'_1 & m'_2 & m_3 \end{pmatrix} = \delta_{m_1m'_1}\delta_{m_2m'_2},$$

$$\sum_{m_1,m_2}(2j_3+1)\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j'_3 \\ m_1 & m_2 & m_3^1 \end{pmatrix} = \delta_{j_3j'_3}\delta_{m_3m'_3}.$$

9. 设算子 H 在转动变换 $R\in SO(3)$ 上保持不变，即 $RHR^{-1}=H$ 或 $RH=HR$，则该算在群 $SO(3)$ 的不同的不可约表示下的矩阵元，或同一表示的不同行变换态的矩阵元必为零.

[提示：设本征函数组 $\{\psi_{jm}\}$ 与 $\{\psi_{j'm'}\}$ 荷载 $SO(3)$ 群的不可约表示 Γ^j 与 $\Gamma^{j'}$，即

$$\Gamma(R)\psi_{jm} = \sum_{m''}\Gamma^j_{m''m},$$

$$\psi_{jm''}\Gamma(R)\psi_{j'm'} = \sum_{m''}\Gamma^{j'}_{m''m'}\psi_{j'm''},$$

由于 $\{H\psi_{jm}\}$，$\{H\psi_{j'm'}\}$ 与 $\{\psi_{jm}\}$、$\{\psi_{j'm'}\}$ 的变换性质相同，令 $\Theta_{jm}=H\psi_{jm}$，$\Theta_{j'm'}=H\psi_{jm'}$，

$$RH\psi_{jm} = HR\psi_{jm} = H\sum_{m''}\Gamma^j_{m''m}\psi_{jm''}$$

$$= \sum_{m''}\Gamma^j_{m''m}(H\psi_{jm''}) \equiv \sum_{m''}\Gamma^j_{m''m}\Theta_{jm''},$$

$$RH\psi_{j'm'} = \sum_{m''} \Gamma^{j'}_{m''m'} \Theta_{j'm''}.$$

即 ψ_{jm} 与 Θ_{jm}，$\psi_{j'm'}$ 与 $\Theta_{j'm'}$ 变换性质相同.

由于表示的幺正性，故

$$\int \psi^*_{jm} \cdot \psi_{j'm'} \mathrm{d}\tau = \delta_{jj'} \delta_{mm'} f$$

$$\Longrightarrow \int \Theta^*_{jm} \cdot \Theta_{j'm'} \mathrm{d}\tau = \delta_{jj'} \delta_{mm'} h,$$

其中 f 与 h 为单位矩阵与实数乘积.]

§ 10.4 SU(3)与轻夸克模型

1964 年，美国物理学家盖尔曼(M. Gellmann)与以色列物理学家兹威格(G. Zweig)在 SU(3) 对称性的基础上提出强子(Haclrons，即参与强相互作用的粒子，包括所谓重子和介子)的夸克(Quarks)模型. 当时认为夸克只有 3 种：u 夸克、d 夸克和 s 夸克，以后又发现 c 夸克、b 夸克和 t 夸克. 但前 3 种夸克质量较轻，后三种夸克就重得多了，故今日有轻夸克与重夸克之分. 这里介绍的 SU(3)的轻夸克模型除有教学上示范作用外，迄今仍有一定科学意义.

1. SU(3)群的基本结构

SU(3) 群的秩 $l = 2$. 它的 8 个厄米生成元(即盖尔曼矩阵)是：

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

此外，还常用记号 λ_0 表示 3×3 的单位矩阵. λ_μ 矩阵满足对易关系

$$[\lambda_\mu, \lambda_\nu] = 2\mathrm{i} \sum_k f_{\mu\nu k} \lambda_k \quad (\mu, \nu, k = 1, \cdots, 8),$$

其中 $f_{\mu\nu k} = C_{\mu\nu k}/2\mathrm{i}$, $C_{\mu\nu k}$ 即通常群的结构常数，具体数值见表 10.1. $f_{\mu\nu k}$ 对于其脚码的任意两个的置换均是反对称的. 在表10.1 中只列出 $\mu < \nu < k$ 的 $f_{\mu\nu k}$，其余由置换可以得到.

表 10.1 $SU(3)$ 的非零结构常数 $f_{\mu\nu k}$

指标 $\mu\nu k$	$f_{\mu\nu k}$	指脚 $\mu\nu k$	$f_{\mu\nu k}$
123	1	365	1/2
147	1/2	367	$-1/2$
156	$-1/2$	458	$\sqrt{3}/2$
246	1/2	678	$\sqrt{3}/2$
257	1/2		

在计算中，经常用到下列有用性质：

$$\mathrm{Tr}[\lambda_\mu \lambda_\nu] = 2\delta_{\mu\nu},$$

$$\{\lambda_\mu, \lambda_\nu\} = 2 \sum_k d_{\mu\nu k} \lambda_k + \frac{4}{3} \delta_{\mu\nu},$$

$$\mathrm{Tr}(\lambda_\mu [\lambda_\nu, \lambda_k]) = 4\mathrm{i} f_{\mu\nu k},$$

$$\mathrm{Tr}(\lambda_\mu \{\lambda_\nu, \lambda_k\}) = 4 d_{\mu\nu k} \quad (\mu, \nu, k = 1, \cdots, 8),$$

其中记号 $\{a, b\} = ab + ba$. 全对称张量 $d_{\mu\nu k}$ 的非零元素具体数值见表 10.2. 所谓全对称系指 $d_{\mu\nu k}$ 相对其脚标任意两个置换均不变. 表 10.2 同样只给出 $\mu < \nu < k$ 的 $d_{\mu\nu k}$，其余可由脚标置换得到.

表 10.2 $d_{\mu\nu k}$ 的非零元素

$\mu\nu k$	$d_{\mu\nu k}$	$\mu\nu k$	$d_{\mu\nu k}$
118	$1/\sqrt{3}$	355	$1/2$
146	$1/2$	366	$-1/2$
157	$1/2$	377	$-1/2$
228	$1/\sqrt{3}$	448	$-1/2\sqrt{3}$
247	$-1/2$	558	$-1/2\sqrt{3}$
256	$1/2$	668	$-1/2\sqrt{3}$
338	$1/\sqrt{3}$	778	$-1/2\sqrt{3}$
344	$1/2$	888	$-1/\sqrt{3}$

2. $SU(3)$ 的不可约表示及权图

由于 $SU(3)$ 的秩 $l=2$，故有两个基本表示. 其中 λ_μ 矩阵就是作用在第一个基本表示上. 第二个基本表示对应 $\lambda'_\mu(\mu=1,\cdots,8)$，

$$\lambda'_\mu \equiv -\lambda^*_\mu = -\tilde{\lambda}_\mu.$$

这两个表示是不等价的.

如果将 λ_μ 化为标准李代数形式的生成元，则有

$$H_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad H_2=\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix},$$

$$E_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad E_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$E_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\quad E_{-1}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$E_{-2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{-3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

显然，

$$E_{-\alpha} = E_{\alpha}^{+} \quad (\alpha = 1,2,3). \tag{10.103}$$

引入三维正交归一基矢组 $u_i (i = 1,2,3)$，

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{10.104}$$

以及对角矢量算子

$$\boldsymbol{H} = (H_1, H_2).$$

由(10.102)与(10.104)式得

$$\begin{aligned} H_1 u_1 &= \frac{1}{\sqrt{6}} u_1, & H_2 u_1 &= \frac{1}{3\sqrt{2}} u_1, \\ H_1 u_2 &= -\frac{1}{\sqrt{6}} u_2, & H_2 u_2 &= \frac{1}{3\sqrt{2}} u_2, \\ H_1 u_3 &= 0, & H_2 u_3 &= -\frac{\sqrt{2}}{3} u_3, \end{aligned} \tag{10.105}$$

即是

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H} u_1 &= \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{3\sqrt{2}} \right) u_1, \\ \boldsymbol{H} u_2 &= \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{3\sqrt{2}} \right) u_2, \\ \boldsymbol{H} u_3 &= \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{3} \right) u_3. \end{aligned} \tag{10.106}$$

这样得到 $SU(3)$ 的第一个基本表示的三个权矢量(在二维权空间中)，

$$\boldsymbol{m}(1) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{3\sqrt{2}} \right), \quad \boldsymbol{m}(2) = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{3\sqrt{2}} \right),$$

$$\boldsymbol{m}(3) = \left(0, -\sqrt{2}/3\right). \qquad (10.107)$$

由(10.101)式，有 $\boldsymbol{H}' = -\boldsymbol{H} = (-H_1, -H_2)$ 为第二个基本表示的对角矢量算子. 容易看出，第二个基本表示的权正好是第一个基本表示的权的负数，即

$$\boldsymbol{m}' = -\boldsymbol{m}; \quad (m'_1, m'_2) = (-m_1, -m_2). \qquad (10.108)$$

在权图上，两者正好为相对于原点的反射.

在夸克模型中，m_1 对应弱同位旋 I_3，m_2 对应于超荷 Y(The hypercharge). 其精确关系是

$$I_3 = \frac{1}{2}\sqrt{6}\, m, \quad Y = \sqrt{2}\, m_2. \qquad (10.109)$$

当然，此时归一化方法有所变化.

对于 $SU(3)$ 群的任何不可约酉表示的基矢 $\{\psi_m\}$，一般有关系

$$\boldsymbol{H}\psi_m = \boldsymbol{m}\psi_m, \qquad (10.110)$$

这里权矢量 $\boldsymbol{m} = (m_1, m_2)$ 刻画该不可约表示，这是我们早就知道的.

由(10.106)与(10.107)式可知，第一基本表示的最高权 $\boldsymbol{M}^{(1)}$ 与第二基本表示的最高权 $\boldsymbol{M}^{(2)}$ 分别为

$$\boldsymbol{M}^{(1)} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\right), \quad \boldsymbol{M}^{(2)} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{3}\right). \qquad (10.111)$$

根据李群表示论可知，任意不可约表示的最高权 $\boldsymbol{M}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{M} = p_1\boldsymbol{M}^{(1)} + p_2\boldsymbol{M}^{(2)}, \qquad (10.112)$$

此处 p_1 与 p_2 为任意非负整数. 因此最高权 $\boldsymbol{M}$ 亦可用数偶 (p_1, p_2) 表示.

图(10.4)与图(10.5)分别表示第一基本表示(1,0)($p_1 = 1$, $p_2 = 0$)与第二基本表示的权图，第二基本表示可记为(0,1). 两表示均为三维. 表示 (p_1, p_2) 的维数为

$$N = \frac{1}{2}(p_1 + 1)(p_1 + p_2 + 2)(p_2 + 1), \qquad (10.113)$$

相应权图的最大多重度(maximum multiplicity)ν 为

$$\nu = \frac{1}{2}(p_1 + p_2) - \frac{1}{2}|p_1 - p_2| + 1, \qquad (10.114)$$

证明从略. 所有 $SU(3)$ 权图均具有 120° 对称性.

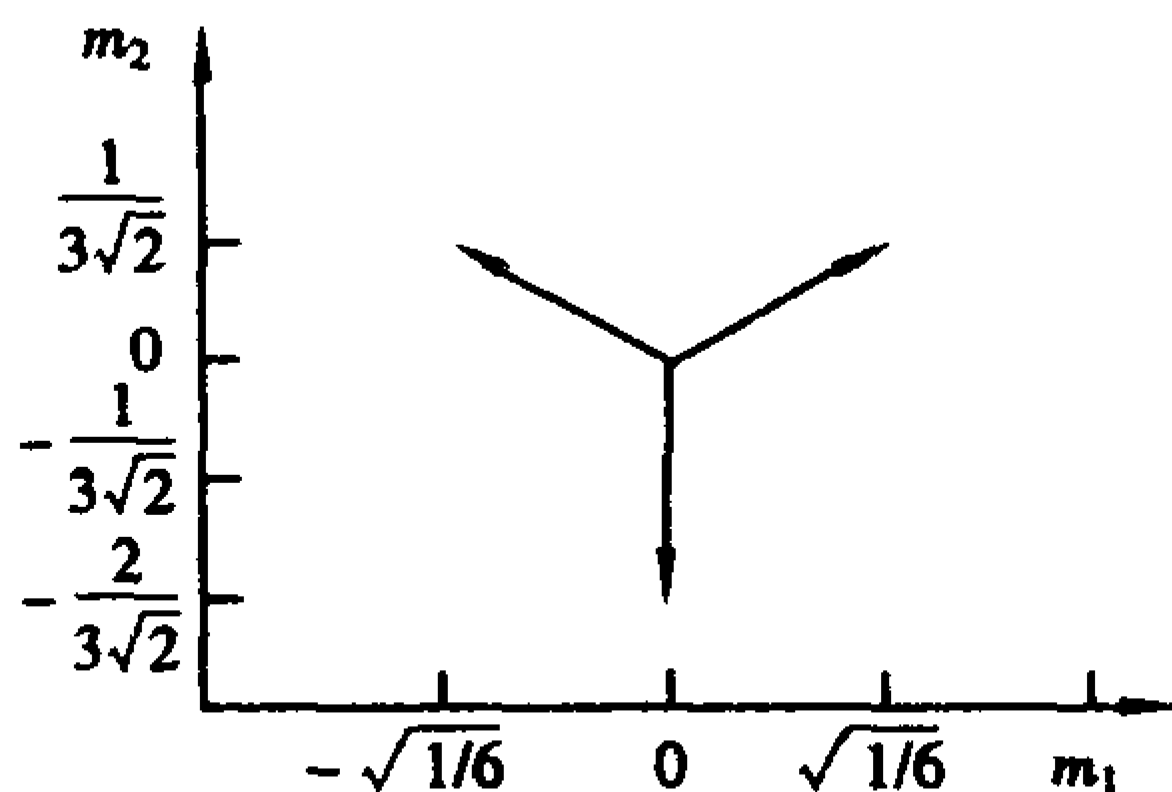


图 10.4　$SU(3)$的第一个基本表示的权图

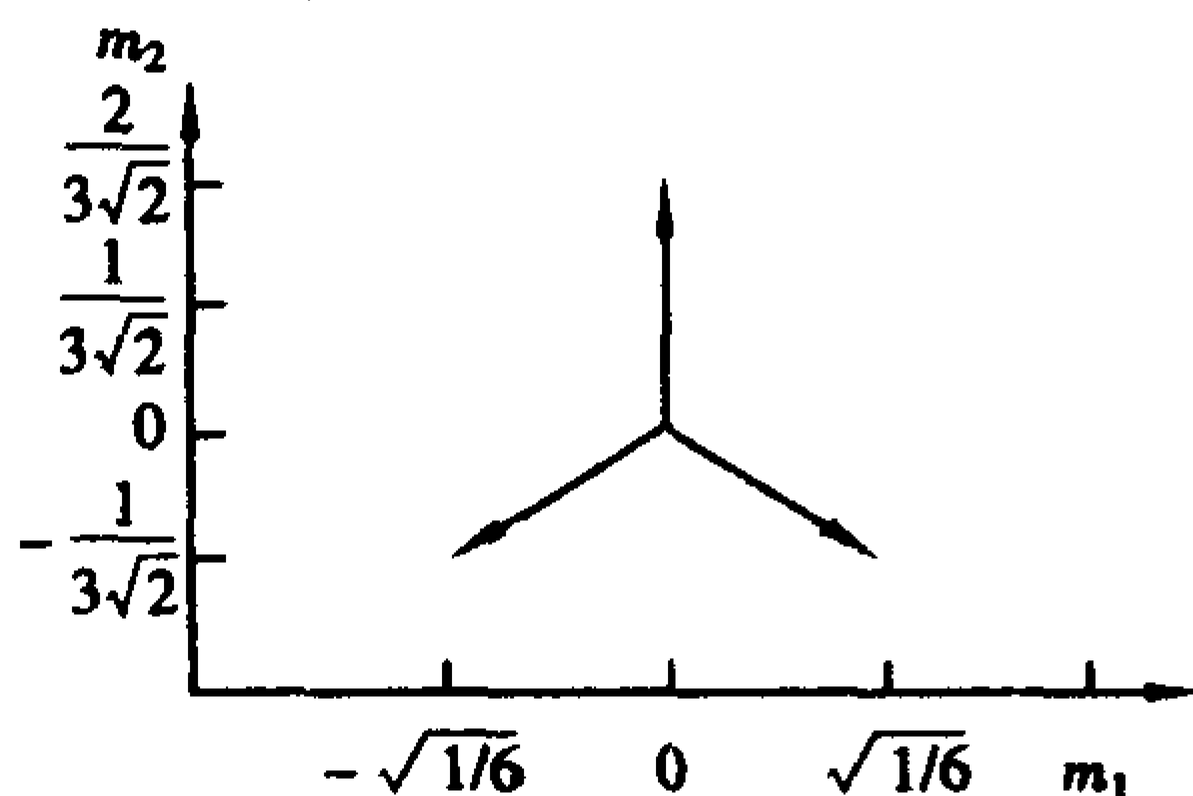


图 10.5　$SU(3)$的第二个基本表示的权图

例 1　设 $SU(3)$ 的不可约表示为(3,0),即

$$M = 3M^{(1)} = \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \qquad (10.115)$$

根据 120° 对称性,由首权可以得到权$(-3/2, \sqrt{3}/2)$和$(0, -\sqrt{3})$. 又由于$SU(2) \subset SU(3)$,在权图水平线上,即是子群$SU(2)$多重态对应的权,而这些权彼此相差为 1,又得到 7 个权. 总共有 10 个权. 与(10.113) 式吻合,维度 $N = 10$,见图10.6.

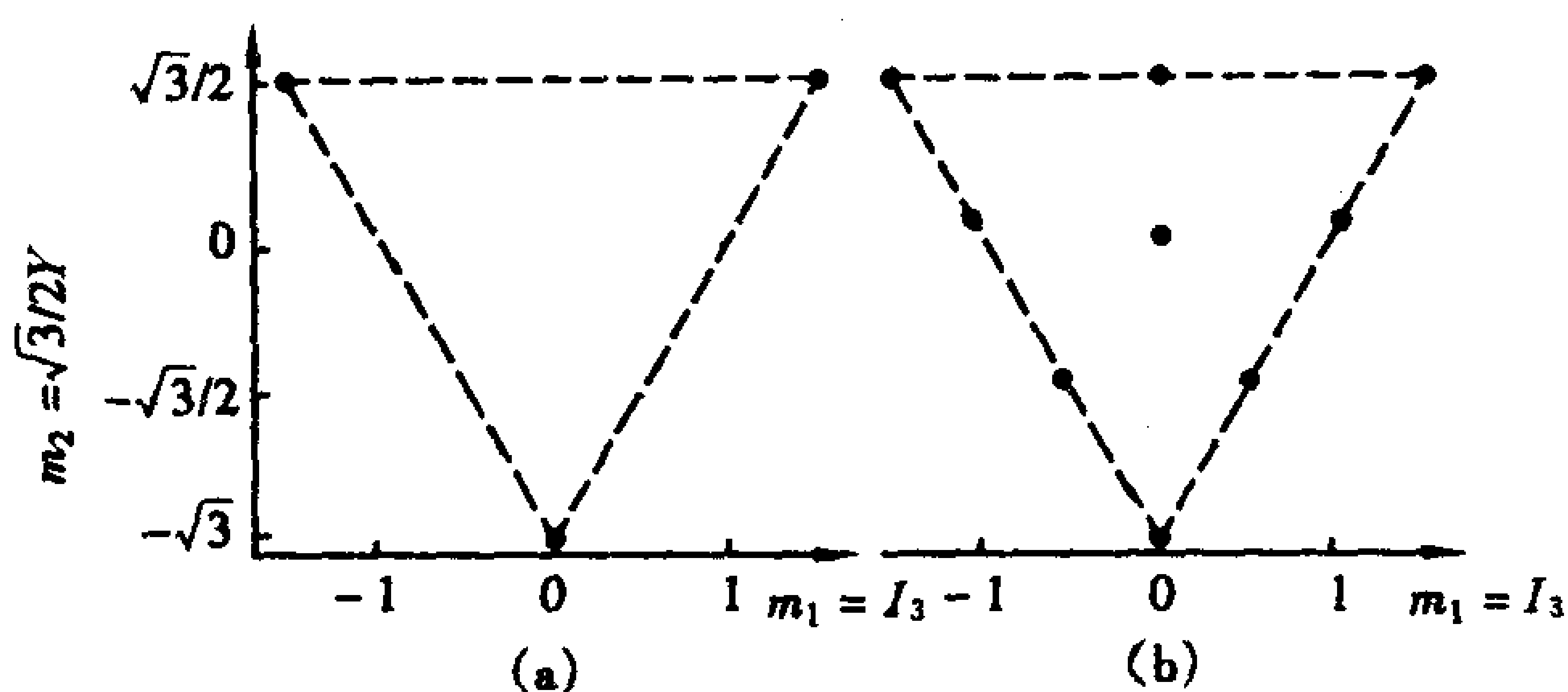


图 10.6 $SU(3)$的两个表示的权图

(a) 等价于(3,0)表示最高权的一组权图，

(b)表示(3,0)的完整权图

3. 轻夸克 $SU(3)$ 模型及强子波函数

模型假定所有强子均由夸克构成，其中重子(均为费米子)由3种夸克构成，介子(均为玻色子)由夸克与反夸克构成. 三种轻夸克的性质如表 10.3 所示. 注意，反夸克的量子数(除同位旋而外)与相应的夸克的量子数相反，且有盖尔曼-西岛关系

$$Y = B + S,$$

$$Q = T_3 + Y/2. \tag{10.116}$$

夸克场可算作味 $SU(3)$ 的一阶协变张量场，而反夸克场则算其一阶逆变张量场.

表 10.3 轻夸克的量子数

量子数 / 夸克符号	重子数 B	弱同位旋 I	弱旋第3分量 I_3	奇异数 S	超荷 Y	电荷 Q
u(上)	1/3	1/2	1/2	0	1/3	2/3
d(下)	1/3	1/2	− 1/2	0	1/3	− 1/3
s(奇异)	1/3	0	0	− 1	− 2/3	− 1/3

4. $SU(3)$的平面权图

第一基础表示(1,0)对应夸克 u、d、s；第二基础表示(0,1)对应反夸克 $\bar{u}$、$\bar{d}$、$\bar{s}$. 如图 10.7(a)、(b)所示.

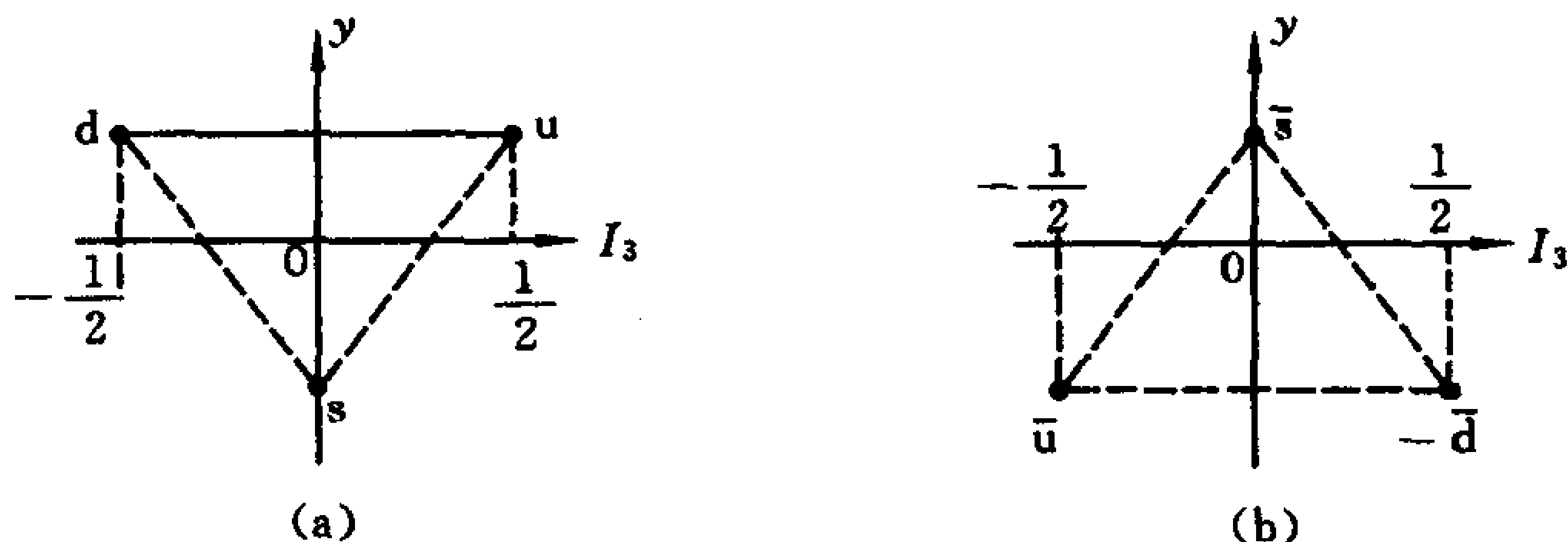


图 10.7 夸克与反夸克 3 重态的权图

令 $q_i(i=1,2,3)$ 表示 u、d 和 s，$\bar{q}_i(i=1,2,3)$ 表示相应反夸克，对应第二个基础表示. 又令

$$h_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad h_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix},\quad(10.117)$$

及降低算子

$$e_{21}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad e_{31}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad e_{32}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},$$

升高算子

$$e_{ij}^{+}=e_{ji}\quad(i>j).$$

对于 $SU(n)$，

$$(h_i)_{\mu\nu}=\begin{cases}\delta_{\mu\nu}, & \mu<i+1,\\-\mathrm{i}\delta_{\mu\nu}, & \mu=i+1,\\0, & \mu>i+1,\end{cases}$$

$$(e_{ij})_{\mu\nu}=\delta_{i\mu}\delta_{j\nu}.\qquad(10.118)$$

若令

$$q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad q_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{10.119}$$

容易验证，

$$h_i u_i = h_{ij} u_j, \tag{10.120}$$

其中本征值

$$h_{ij} = \sum_{k=1}^{i} \delta_{ki} - \mathrm{i}\delta_{i+1,j}. \tag{10.121}$$

显然，

$$e_{ij} q_k = q_i \delta_{jk}, \tag{10.122}$$

亦即降低或升高算符作用到第一表示的基矢上时得到归一化基矢.

由定义可得到生成元乘积的表达式

$$h_i e_{jk} = h_{ij} e_{jk}, \quad e_{jk} h_i = h_{ik} e_{jk}, \tag{10.123}$$

类似还有关系式

$$e_{ij} e_{ki} = \delta_{jk} e_{ie} \quad (i \neq e). \tag{10.124}$$

这些关系式在求强子波函数具体形式时甚为有用. 结合杨盘容易解决这个问题.

设 $p_i (i = 1, \cdots, n-1)$ 为表征 $SU(n)$ 群某不可约表示(首权为 M) 的整数集合，则有

$$M = \sum_{i=1}^{n-1} p_i M^{(i)}, \tag{10.125}$$

其中 $M^{(i)} (i=1, \cdots, n-1)$ 为群的 $n-1$ 个基础表示的首权. 同时，$\{p_i\}$ 亦可确定一个杨盘，这里 p_i 表示第 i 排所包含的格子数减去 $i+1$ 行所包含的格子数. 注意此时群的秩即为 $n-1$.

例 2 对于 $SU(6)$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \left.\right\} \begin{array}{l} p_1 = 5, \ p_2 = 1, \ p_3 = p_4 = p_5 = 0 \\ \Longrightarrow (210^3). \end{array}$$

对于 $SU(n)$

$$\left.\begin{array}{l}\square\\\square\\\vdots\\\square\end{array}\right\}\quad p_1=p_2=\cdots=p_{n-1}=0\Longrightarrow(0^{n-1}),$$

相应$SU(n)$的单态,即全对称态.

注意,$SU(n)$的$n-1$基本表示就是1个格子、2个格子,直至$n-1$个格子构成一列的杨盘,即$(10^{n-2}),(010^{n-3}),\cdots,(0^{n-2}1)$. 所谓共轭杨盘即$(p_{n-1},\cdots,p_2,p_1)$. 一般说来,如果两相互共轭的杨盘相同,则对应不可约表示等价;反之,则不等价,但两者维度相同.

(1) 介子多重态及波函数. 对于$SU(3)$群,介子波函数一般可表示为

$$\Psi=\sum_{i,j=1}^{3}a_{ij}q_i\bar{q}_j. \tag{10.126}$$

现利用杨盘确定a_{ij},实际上即是C-G系数. 介子由夸克与反夸克构成,即

$$\underset{(100)}{\square}\otimes\underset{(010)}{\begin{array}{|c|}\hline\ \\\hline\ \\\hline\end{array}}=\begin{array}{|c|}\hline\ \\\hline\ \\\hline\ \\\hline\end{array}\oplus\begin{array}{|c|c|}\hline\ &\ \\\hline\ \\\cline{1-1}\end{array} \tag{10.127}$$

$$(3)\otimes(\bar{3})=(1)\oplus(8).$$

根据杨盘性质,右图分别相应一维表示(单态)与8维表示(8重态). 从单态波函数易得

$$\Psi^{(0)}=\frac{1}{\sqrt{3}}(q_1\bar{q}_1+q_2\bar{q}_2+q_3\bar{q}_3). \tag{10.128}$$

问题在于如何确定8重态的波函数.

为此采用所谓伯尔德-伯顿汗(Baird-Biedenharn)约定. 令$\bar{q}_i$与q_i权正好相反,

$$h_iq_j=h_{ij}q_j\Longleftrightarrow h_i\bar{q}_j=-h_{ij}\bar{q}_j, \tag{10.129}$$

因而，根据(10.122)式有

$$e_{ij}\bar{q}_k = -\bar{q}_j\delta_{ik}. \tag{10.130}$$

引入记号 v_1、v_2、v_3，

$$v_1 = \bar{q}_3, \quad v_2 = -\bar{q}_2, \quad v_3 = \bar{q}_1, \tag{10.131}$$

显然有

$$e_{32}v_1 = v_2, \quad e_{21}v_1 = v_3, \quad e_{31}v_2 = -v_3, \tag{10.132}$$

此时弱旋降低算子 e_{32} 与 e_{21} 的矩阵元均为正定的. 图 10.8 是 8 重态的权图. 其中六角形的 6 个顶点的波函数可以直接写出

$$\begin{aligned} &\Psi_1^{(8)} = q_1v_1, \quad \Psi_2^{(8)} = q_2v_1, \quad \Psi_3^{(8)} = q_1v_2, \\ &\Psi_5^{(8)} = q_2v_3, \quad \Psi_7^{(8)} = q_3v_2, \quad \Psi_8^{(8)} = q_3v_3. \end{aligned} \tag{10.133}$$

可以验算，它们都是弱旋的本征态.

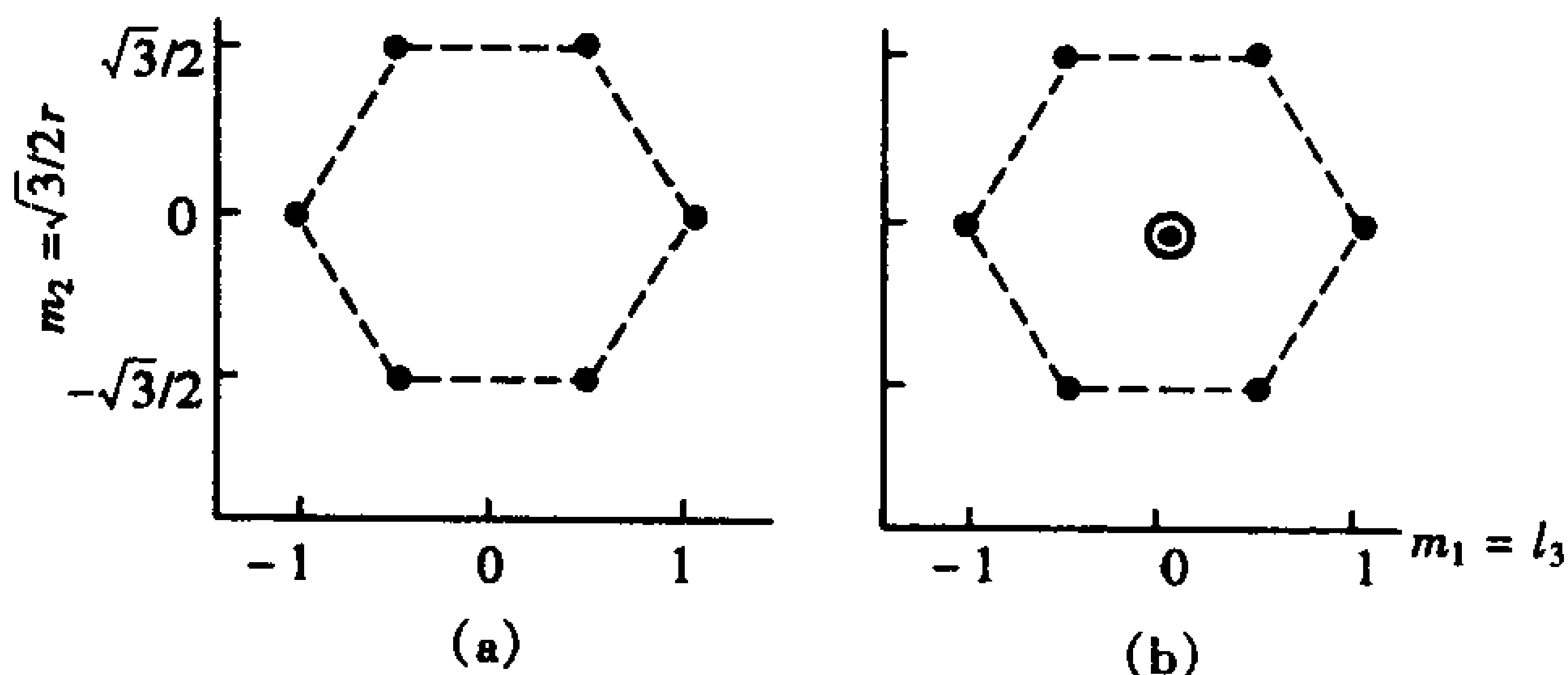


图 10.8 $SU(3)$8 重态权图

(a) 首权为(11)的一组数　　(b) (11)的完全权图

利用 e_{21} 作用到 $\Psi_3^{(8)}$ 可以得到另一个弱旋本征态，注意到 $e_{21}v_2 = v_3$，$e_{21}q_1 = q_2$，

$$e_{21}\Psi_3 = q_1v_3 + q_2v_3.$$

归一化后即为

$$\Psi_4^{(8)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_1v_3 + q_3v_2). \tag{10.134}$$

为得到 $\Psi_6^{(8)}$，首先利用 e_{32} 作用在 Ψ_2 上，

$$\Phi \equiv e_{32}\Psi_2 = q_3v_1 + q_2v_2.$$

但此态非弱旋本征态. 只有用 e_{21} 作用在 I 的本征态上且获致单权的状态才能得到弱旋本征态. 现采用施米德(Schmide) 法得到与 $\Psi_4^{(8)}$ 正交的波函数. 令

$$\Psi_6^{(8)} = c(\Phi - a\Psi_4^{(8)}),$$

其中 c 为归一化函数,a 应选择使得内积

$$(\Psi_4^{(4)},\ \Psi_6^{(8)}) = 0,$$

我们得到

$$\Psi_6^{(8)} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2q_3v_1 + q_2v_2 - q_1v_3). \qquad (10.135)$$

容易验证,$(\Psi^{(0)},\ \Psi_6^{(8)}) = (\Psi^{(0)},\ \Psi_4^{(8)}) = 0$.

(2) 重子波函数. 在 $SU(3)$ 模型中,重子由 3 个夸克构成,用杨盘表示就是

$$\begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline\end{array} \otimes \begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline\end{array} \otimes \begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline\end{array} = \left(\begin{array}{|c|c|}\hline \ & \ \\ \hline\end{array} \oplus \begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline \ \\ \hline\end{array}\right) \otimes \begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline\end{array}$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|}\hline \ & \ & \ \\ \hline\end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|}\hline \ & \ \\ \hline \ \\ \cline{1-1}\end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|}\hline \ & \ \\ \hline \ \\ \cline{1-1}\end{array} \oplus \begin{array}{|c|}\hline \ \\ \hline \ \\ \hline \ \\ \hline\end{array} \qquad (10.136)$$

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1. \qquad (10.137)$$

如果是 $SU(n)$,则后式变为

$$n \otimes n \otimes n = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) \oplus \frac{1}{3}n(n+1)(n-1)$$
$$\oplus \frac{1}{3}n(n+1)(n-1) \oplus \frac{1}{6}n(n-1)(n-2). \qquad (10.138)$$

显然,$\begin{array}{|c|c|}\hline \ & \ \\ \hline\end{array}$ 表示 6 重态对称波函数,应为

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline\end{array} = q_1q_1 = \Psi_1,$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline\end{array} = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_1q_2 + q_2q_1) = \Psi_2,$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 2 \\ \hline \end{array} = q_2q_2 = \Psi_3, \tag{10.139}$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_1q_3 + q_3q_1) = \Psi_4,$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline \end{array} = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_2q_3 + q_3q_2) = \Psi_5,$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 3 \\ \hline \end{array} = q_3q_3 = \Psi_6.$$

而 2 个格子表示的反对称态，应为 3 重态：

$$\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_1q_2 - q_2q_1) \equiv \bar{q}_3,$$

$$\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_3q_1 - q_3q_1) \equiv \bar{q}_2, \tag{10.140}$$

$$\begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_2q_3 - q_3q_2) \equiv \bar{q}_1,$$

这里 $\bar{q}_1$、$\bar{q}_2$、$\bar{q}_3$ 即多次提到的 $SU(3)$ 的第二个基础表示(反夸克)。

我们在(10.138)与(10.139)式的基础上构成重子波函数．其中

$$\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} = \text{全反对称波函数，为单态}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\sum_{a,b,c=1}^{3} \varepsilon_{abc} = q_aq_bq_c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}(q_1q_2q_3 - q_2q_1q_3 - q_3q_2q_1 - q_1q_3q_2$$

$$+ q_3q_1q_2 + q_2q_3q_1), \tag{10.141}$$

其中 ε_{abc} 为全反对称三阶张量.

至于全对称 10 维表示 $\begin{array}{|c|c|c|}\hline \ & \ & \ \\ \hline \end{array}$，则容易得到

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&1\\\hline\end{array} = q_1q_1q_1 = \Psi_1^{(10)},$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&2\\\hline\end{array} = \frac{1}{\sqrt{3}}(q_1q_1q_2 + q_1q_2q_1 + q_2q_1q_1) = \Psi_2^{(10)},$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&2\\\hline\end{array} = \frac{1}{\sqrt{3}}(q_1q_2q_2 + q_2q_1q_2 + q_2q_2q_1) = \Psi_3^{(10)},$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&2&2\\\hline\end{array} = q_2q_2q_2 = \Psi_4^{(10)},$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&3\\\hline\end{array} = \frac{1}{\sqrt{3}}(q_1q_1q_3 + q_1q_3q_1 + q_3q_1q_1) = \Psi_5^{(10)},$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline\end{array} = \frac{1}{\sqrt{6}}(q_1q_2q_3 + q_1q_3q_2 + q_2q_1q_3 + q_2q_3q_1 + q_3q_1q_2 + q_3q_2q_1) = \Psi_6^{(10)},$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&2&3\\\hline\end{array} = \frac{1}{\sqrt{3}}(q_2q_2q_3 + q_2q_3q_2 + q_3q_2q_2) = \Psi_7^{(10)},$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&3\\\hline\end{array} = \frac{1}{\sqrt{3}}(q_1q_3q_3 + q_3q_1q_3 + q_3q_3q_1) = \Psi_8^{(10)},$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&3&3\\\hline\end{array} = \frac{1}{\sqrt{3}}(q_2q_3q_3 + q_3q_2q_3 + q_3q_3q_2) = \Psi_9^{(10)},$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3&3&3\\\hline\end{array} = q_3q_3q_3 = \Psi_{10}^{(10)}. \tag{10.142}$$

实际上上面波函数亦可由(10.139)式得到：

$$\Psi_1^{(10)} = \Psi_1 q_1, \quad \Psi_2^{(10)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\Psi_1 q_1 + \sqrt{2}\Psi_2 q_1),$$

$$\Psi_3^{(10)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}\Psi_2 q_2 + \Psi_3 q_3),$$

$$\Psi_4^{(10)} = \Psi_3 q_2,$$

$$\Psi_5^{(10)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}\Psi_4 q_1 + \Psi_1 q_3),$$

$$\Psi_6^{(10)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\Psi_2 q_3 + \Psi_4 q_2 + \Psi_5 q_2),$$

$$\Psi_7^{(10)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\Psi_3 q_3 + \sqrt{2}\Psi_5 q_2),$$

$$\Psi_8^{(10)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}\Psi_4 q_3 + \Psi_6 q_1),$$

$$\Psi_9^{(10)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}\Psi_5 q_3 + \Psi_6 q_2),$$

$$\Psi_{10}^{(10)} = \Psi_6 q_3.$$

关于两个 8 重态波函数，实质上可以用混合对称的方法得到.它们分别对应 2 种标准杨盘

<table><tr><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td></td></tr></table>

<table><tr><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td></td></tr></table>

作出相应的混合对称：前者是对 q_1、q_2 对称化，对 q_1、q_3 反对称化，后者则相反.

问　　题

1. 求出两个重子 8 重态的波函数.

[提示：第一个 8 重态，用 S_{ij} 表示对称化，A_{ij} 表示反对称化.

$$\begin{aligned}
M_1:\ &(A_{13}S_{12} + A_{23}S_{12})q_1q_2q_3 \\
&= (q_1q_2q_3 + q_2q_1q_3 - q_3q_2q_1 - q_3q_1q_2) \\
&\quad + (q_1q_2q_3 + q_2q_1q_3 - q_1q_3q_2 - q_2q_3q_1) \\
&= 2q_1q_2q_3 + 2q_2q_1q_3 - q_3q_2q_1 - q_3q_1q_2 \\
&\quad - q_1q_3q_2 - q_2q_3q_1 \quad (q_1 = u,\ q_2 = d,\ q_3 = s).
\end{aligned}$$

但 1,2,3 可以任意对应 u、d 和 s 态，设全不相同，故有 3 个 M_1 态，但这三个态之和即为全对称态，故 3 个 M 态中只有 2 个独立的.设第二个 M 态为 $(A_{13}S_{12} + A_{23}S_{12})dus$.

脚码有两个相同者，令 $(q_1q_2, q_3) = (uu, d)$ 和 (ud, u)；(dd, s) 和 (ds, d)；(ss, u) 和 (su, u)，计有 6 个态.如

$$(A_{12}+A_{23})S_{12}uud$$

$$= 4uud - 2udu - 2duu \xrightarrow{\text{归一化}} \frac{1}{\sqrt{6}}(2uud - udu - duu).$$

其余如此类推.

至于第二个 8 重态 M_2 构造方式是

$$\begin{aligned}
&(A_{12}S_{13}+A_{23}S_{13})q_1q_2q_3\\
&= q_1q_2q_3 - q_2q_1q_3 + q_3q_2q_1 - q_3q_1q_2\\
&\quad + q_1q_2q_3 - q_1q_3q_2 + q_3q_2q_1 - q_2q_3q_1\\
&= 2q_1q_2q_3 + 2q_3q_2q_1 - q_2q_1q_3 - q_3q_1q_2 - q_1q_3q_2 - q_2q_3q_1.
\end{aligned}$$

与上相同,3 个脚标不同者有两个. 对应组合(uds) 和(dsu)、(sud),注意 M_1 态和 M_2 态与全对称态 S 正交.

两个脚标相同者构造法与 M_1 相同.

但这样构成 M_2 态与 M_1 态不正交. 为此可以简令 M_2 为操作:对位置 1 和 2 反对称化;再对位置 1 与 3 对称化;最后对位置 1 与 2 反对称化:

$$M_2q_1q_2q_3 = 2q_1q_2q_3 - 2q_2q_1q_3 - q_2q_3q_1 + q_3q_2q_1 - q_3q_1q_2 + q_1q_3q_2.$$

反之 M_1 可以视为操作:对位置 1 和 2 对称化;再对位置 1 与 3 反对称化;最后对位置 1 与 2 对称化.]

2. 验证由(10.141)、(10.142) 式与问题 1 所得的四类波函数是正交的

$$< q'_1 q'_2 q'_3 | q_1q_2q_3 > = \delta_{q'_1q_1}\delta_{q'_2q_2}\delta_{q'_3q_3}, \qquad (10.143)$$

其中 q_1、q_2、q_3 和q'_1、q'_2、q'_3 均可任取 u、d、s. 不带撇与带撇的波函数分别取为不同类:全对称 S、(10 重态)、全反对称态 A(单态)、M_1(第一 8 重态) 和 M_2(第二 8 重态).

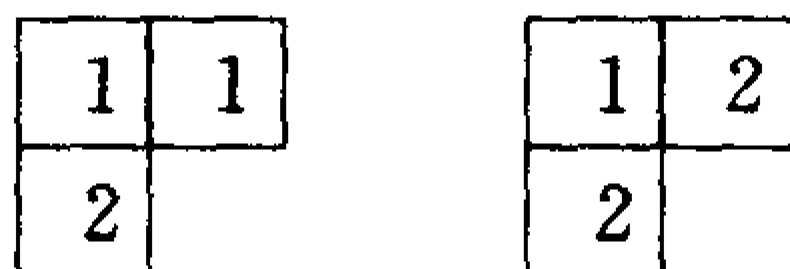
3. 验证完备性条件

$$|q_1q_2q_3> = \frac{1}{6}(|S> + |A> + |M_1> + |M_2>). \qquad (10.144)$$

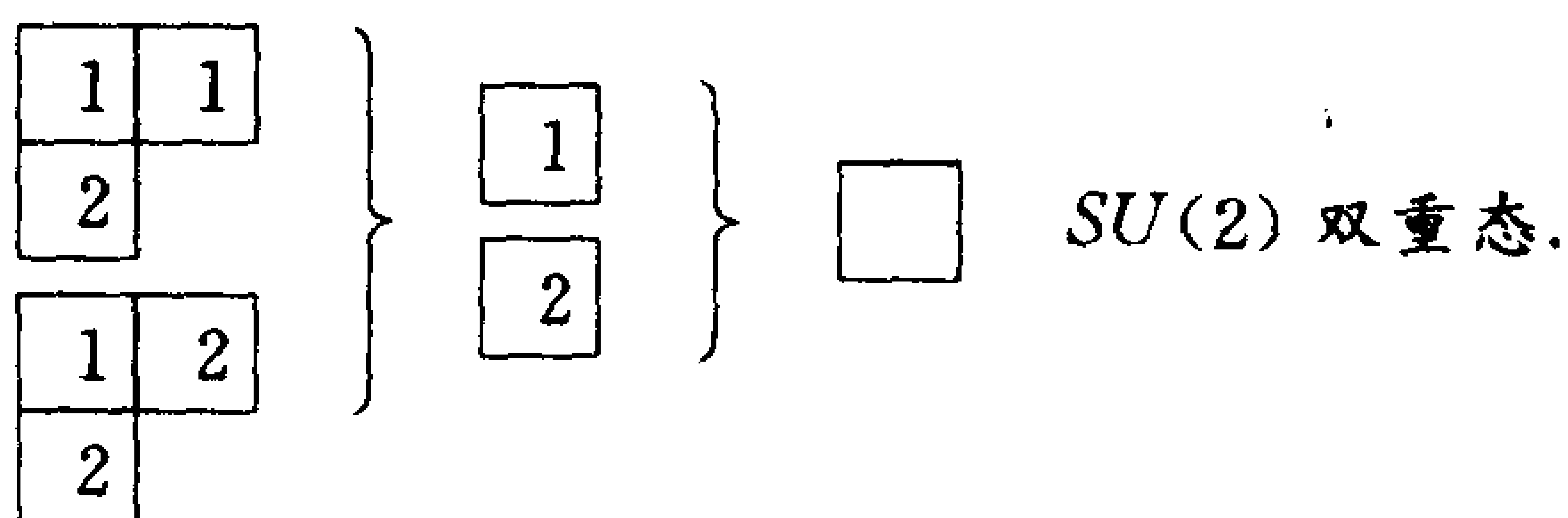
4. 利用杨图对于 $SU(3)$ 的 8 重态进行约化,即求出所包含的

$SU(2)$ 是什么样的多重态.

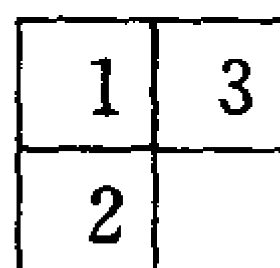
[提示：杨图包含8个标准杨盘，其中只包含1、2的有两个：



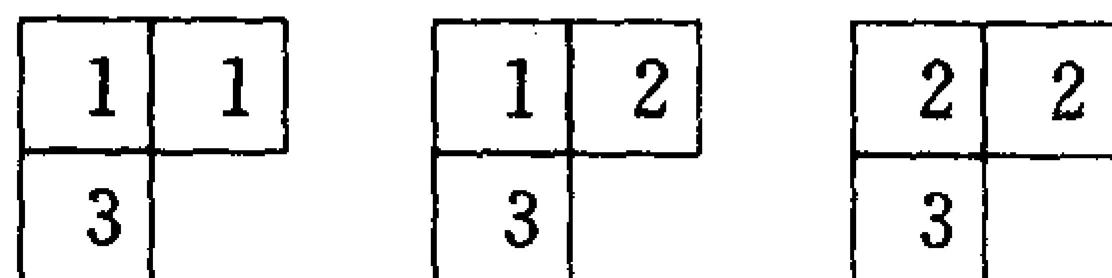
对于 $SU(2)$，对应反对称态. 换言之，这两个杨盘对应 $SU(2)$ 双重态：



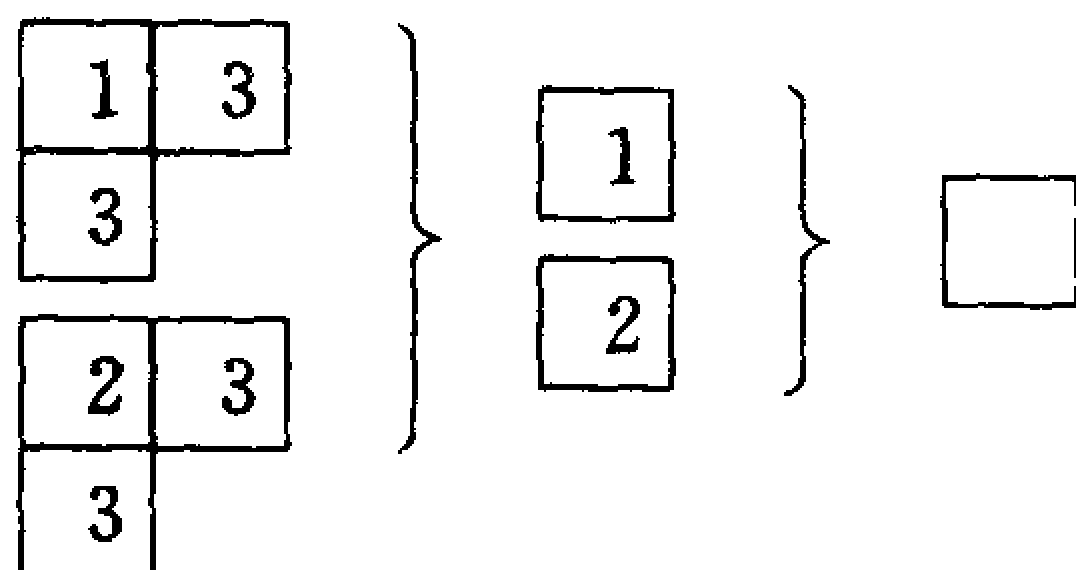
在右边格子出现 3 的只有一个杨盘



其中只与 $SU(2)$ 有关，只是单态，即上述反对称态. 3 在第二行格子中有 3 个杨盘：

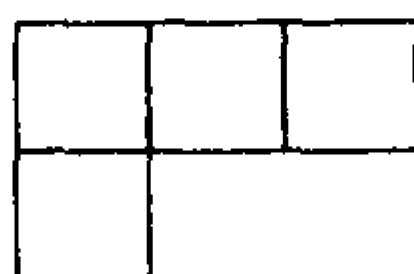


去掉 $SU(2)$ 无关的下边一格，正好构成 $SU(2)3$ 重态. 最后，有两个格子包含 3 的有 2 个：



相应另一个 $SU(2)$ 子群，另一个双重态.]

5. 计算 $SU(n)$ 群中由杨图



表示的多重态的维数，并对它按 $SU(n-1)$ 群的表示作分导约化.

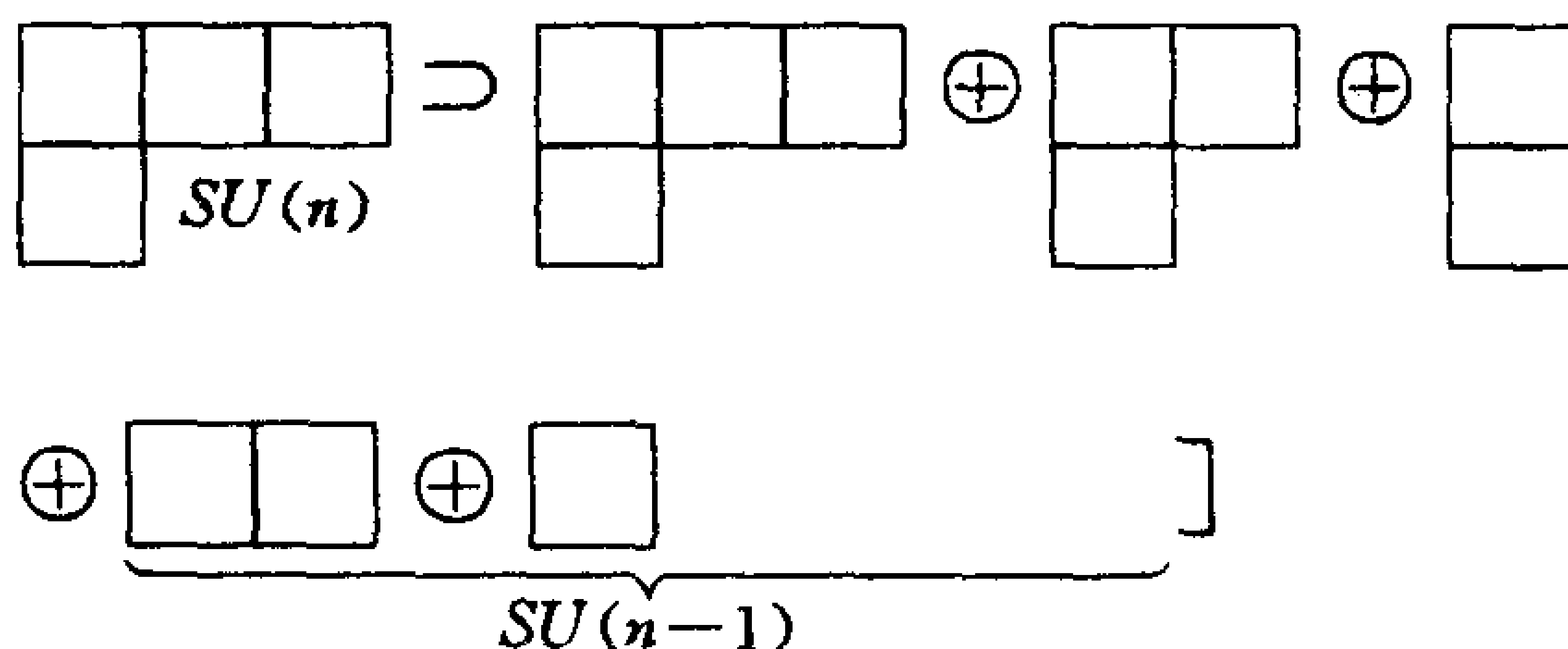
[提示：由公式

$$
\begin{aligned}
N_n(p_1,\cdots,p_{n-1}) &= \frac{1}{2!\cdots p_{n-1}!}(p_1+1)(p_1+p_2+1)\cdots \\
&\cdot(p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}+n-1)\cdot(p_2+1) \\
&\cdots(p_2+\cdots+p_{n-2}+n-2)\cdots(p_{n-1}+1) \\
&= (p_{n-1}+1)(p_{n-1}+p_{n-2}+2)\cdots\cdot(p_{n-1}+p_{n-2} \\
&+\cdots+p_1+n-1)N_{n-1}(p_1,\cdots,p_{n-2})/(n-1)!.
\end{aligned}
$$

容易算出相应维度. 现设 $p_1=2$，$p_2=1$，$p_3=\cdots=p_{n-1}=0$，

$$N_n=\frac{(n+2)!}{8}.$$

分导约化



6. 将 $SU(3)$ 的 10 重态 □□□ 按 $SU(2)$ 分导约化.

[提示：

□□□ ⊃ □□□ ⊕ □□ ⊕ □ ⊕≠ ①

$10 \supset 4 \oplus 3 \oplus 2 \oplus 1$]

7. $SU(n)$ 的第一与第二基础表示用的直积表示用杨图约化.

[提示：

$$\square \otimes \left.\begin{matrix}\square\\ \vdots\\ \square\end{matrix}\right\} n-1 = n-1\left\{\begin{matrix}\square\square\\ \vdots\\ \square\end{matrix}\right. \oplus \left.\begin{matrix}\square\\ \vdots\\ \square\end{matrix}\right\} n-1$$

(n)　　$(\bar{n})$　　　　　　　　(n^2-1)　　1

$$n \otimes \bar{n} = (n^2-1) \oplus 1,$$

其中右边第一图 $p_1 = p_{n-1} = 1$,其余为 0.]

8. 设质子自旋 $s=\dfrac{1}{2}$,同位旋 $I=I_3=\dfrac{1}{2}$,超荷 $Y=1$. 设相应的标准杨盘为

1	2
3	

(质子由 u、d 夸克构成)

求其波函数.

[提示:波函数分两部分:味道和自旋,满足的对称性为 $SU(3)\otimes SU(2)$.

味道部分

u	u
d	

$= uud + uud - duu - udu$

$(q_1 = u, q_2 = u, q_3 = d)$

$$\Longrightarrow \psi_1 = 2uud - duu - udu,$$

若取 $q_1 = u, q_2 = d, q_3 = u$,则有另一态

$$\psi_2 = 2udu - duu - uud,$$

自旋部分标准基

+	+
−	

亦有两个态:

$$\phi_1 = 2(+\ +\ -) - (-\ +\ +) - (+\ -\ +),$$

$$\phi_2 = 2(+\ -\ +) - (-\ +\ +) - (+\ +\ -).$$

味道部分用置换群 S_3 的符号表示为(标准杨图)

$$e_1^{[2,\phi]} = \{E + (1,2) - (1,3) - (2/3)\}/3,$$

$$e_2^{[2,\phi]} = \{E + (1,3) - (1,2) - (3/2)\}/3 \quad (\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 1).$$

实际上在置换群中已得到生成元(12) 与(123) 的表示矩阵

$$\Gamma^{[2,1]}[(12)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma^{[2,1]}[(123)] = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}, & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

两矩阵直乘后，得到 2 个 4×4 矩阵. 每个矩阵有两个本征值为 1 的本征矢. 但相同本征值是

$$\frac{1}{3\sqrt{18}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \psi.$$

即

$$\begin{aligned} \psi_p &= \frac{1}{3\sqrt{18}} \{ \psi_1 [2\phi_1 + \phi_2] + \psi_2 [\phi_1 + 2\phi_2] \} \\ &= \frac{1}{\sqrt{18}} \{ 2u_+ u_+ d_- - u_+ d_+ u_- - d_+ u_+ u_- + 2u_+ d_- u_+ \\ &\quad - d_+ u_- u_+ - u_- u_+ d_+ - u_- d_+ u_+ + 2d_- u_+ u_+ \}, \end{aligned}$$

此处(+)表自旋第三分量 $S_3 = + \frac{1}{2}$，(−)表示自旋向下，$S_3 = -\frac{1}{2}$.]

§10.5 $SU_C(3) \otimes SU_w(2) \otimes U(1)$ 标准模型与 $SU(5)$ 大统一模型

20 世纪 70 年代，美国物理学家温伯格(S. Weinberg)与巴基斯坦科学家萨拉姆(A. Salam)成功地将弱相互作用与电磁相互作用在 $SU(2) \otimes U(1)$ 对称群框架内统一起来，三代夸克与轻子

第一代夸克 $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$　第一代轻子 $\begin{pmatrix} e^- \\ \nu_e \end{pmatrix}$

第二代夸克 $\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$　第二代轻子 $\begin{pmatrix} \mu^- \\ \nu_\mu \end{pmatrix}$

第三代夸克 $\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$　第三代轻子 $\begin{pmatrix} \tau^- \\ \nu_\tau \end{pmatrix}$

均为弱旋 $SU(2)$ 的双重态，并且有 4 个传递弱电作用的规范粒子：光子、3 个中间玻色子 $W^{\pm}$、Z°. 这一理论的重要预言均被实验证实.

与此同时，描写强相互作用的量子色动力学(Q. C. D) 也取得重大进展. Q. C. D 是建立在颜色 $SU(3)$ 规范对称群上的动力学理论. 颜色自由度的引入，最早是为了避免在夸克模型中出现统计问题. 如在轻夸克模型中，重子 10 重态中的 Ω^- 超子就是由三个处于同一量子态的 s 夸克构成. 由于夸克都是费米子，这直接违反泡利不相容原理. 为此人们提示每一种(味) 夸克实际上存在 3 种颜色自由度. 色 $SU(3)$ 群的基本表示就是 3 原色：红、黄、蓝. 第二个基本表示即反红、反黄、反蓝. 红与反红叠加即为无色，等等. 传递强相互作用即为矢量玻色子的 8 重态，即 8 个有色胶子. 高能物理实验证实颜色自由度是真实存在的.

20 世纪 70 年代中期，格罗斯(Gross)、维尔泽克(Wilczek)、温伯格和德茹拉(De Rüjula) 等逐渐建立与发展色动力学. 我们注意，色 $SU(3)$ 群是完全对称的，没有破缺，不同于以前谈的轻夸克模型 —— 味 $SU(3)$. 后者的对称性是有破缺的，u、d、s 的性质并非完全相同. 两者是完全不同的两个对称群.

所谓粒子物理的标准模型，就是描写弱电作用的 $SU(2) \otimes U(1)$ 与描写强相互作用的 $SU_C(3)$ 的直积：$SU_C(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$，该模型与当前的高能物理实验吻合很好. 它不是单纯或半单纯的，其秩 $= 2 + 1 + 1 = 4$，即有 4 个可以同时对角化的生成元. 该群有 3 个耦合常数，即使经过所谓自发破缺以后，仍然有 3

个耦合常数：g（强耦合常数）、e（电荷）和 θ_k（温伯格角）.

1. **标准模型的生成元**

$SU_C(3)$ 的生成元即盖尔曼矩阵，有 8 个，

$$\frac{\lambda_i}{2} = T_i, \quad (i = 1, 2, \cdots, 8); \tag{10.145}$$

$SU(2)$ 的生成元有 3 个，用泡利矩阵表示为，

$$\begin{cases} \dfrac{\sigma_1}{2} = T_{23}, \quad \dfrac{\sigma_2}{2} = T_{23}, \\ \dfrac{\sigma_3}{2} = T_{13}. \end{cases} \tag{10.146}$$

$U_Y(1)$ 的生成元只有 1 个，因与 $SU_C(3)$ 与 $SU(2)$ 相对易而有（5 维表示）. 其实就是超荷

$$Y = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}. \tag{10.147}$$

由条件

$$\mathrm{Tr}Y = 0, \quad (\mathrm{Tr}Y)^2 = \frac{1}{2}, \tag{10.148}$$

$$\Longrightarrow 3a + 2b = 0, \quad 3a^2 + 2b^2 = \frac{1}{2},$$

得到

$$a = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{20}}, \quad b = \sqrt{\frac{3}{20}}.$$

为了保证规范对称性不致失去，同时使夸克和轻子获得质量，$SU(2) \otimes U_Y(1)$ 通过所谓黑格斯（Higgs）机制自发破缺，其细节限于篇幅这里不予深究. 结果是留下子群 $U_e(1)$ 仍然保持对称性. $U_e(1)$ 即通常的电磁规范群. 注意到与夸克、轻子电荷的直接

联系，将 Y 归一化为

$$Y=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&0&0&0&0\\0&-\frac{1}{3}&0&0&0\\0&0&-\frac{1}{3}&0&0\\0&0&0&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}. \tag{10.149}$$

令

$$T_3=\frac{\tau_3}{2}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}, \tag{10.150}$$

则可定义 $U_e(1)$ 群的生成元，即电荷算子为

$$Q=T_3+Y=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&0&0&0&0\\0&-\frac{1}{3}&0&0&0\\0&0&-\frac{1}{3}&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}. \tag{10.151}$$

2. 费米场(夸克与轻子场)具体表示

一般说来,$SU(m+n)$ 群按其子群 $SU(m)\otimes SU(n)$ 分导表示有如下规则:$SU(m+n)$ 群的正则表示为 $m\times n$ 与 $n\times n$ 两幺正矩阵的直和.由此可见 $SU(m)\otimes SU(n)$ 必为其子群.同时注意到

$SU(m+n)$ 的群参数 $(m+n)^2-1$,

$SU(n)$ 的群参数 n^2-1,

$SU(m)$ 的群参数 m^2-1,

即是说有 $(m+n)^2-[(n^2-1)-(m^2-1)]-1=2mn-1$ 个参数.

其中 $2mn$ 个参数描写 $SU(m+n)$ 群的非对矩阵,形如

$$P=\begin{pmatrix} O & X \\ X^+ & O \end{pmatrix}. \tag{10.152}$$

一个参数描写如下对角矩阵:

$$\exp\{-\mathrm{i}Y\phi\}=\begin{pmatrix} E_n\exp\{\mathrm{i}\phi/N\} & O \\ O & E_m\exp\{-\mathrm{i}\phi/m\} \end{pmatrix}, \tag{10.153}$$

其中生成元

$$Y=\begin{pmatrix} -E_n/n & O \\ O & E_m/N \end{pmatrix}. \tag{10.154}$$

实际上(10.149)式即本式特例.如果 $\phi=K\cdot 2\pi$,式中 K 为整数,则 $SU(n+m)$ 包含子群 $SU(n)\otimes SU(m)$ 与子群 $U(1)$(Y 即为后者生成元).

设 $SU(n+m)$ 某不可约幺正表示为杨图$[\omega]$,分导约化后 $SU(n)$ 群杨图为$[\lambda]$,$SU(m)$ 杨图为$[\mu]$.分导约化就是$[\omega]$如何按$[\lambda]\otimes[\mu]$约化.约化具体规则是

(1) $[\omega]$、$[\lambda]$ 与$[\mu]$ 的行数不大于 $m+n$、m、n.

(2) 设$[\omega]$、$[\lambda]$ 与$[\mu]$ 的格子数分别为 n、n_1 与 n_2,应有

$$n_1 + n_2 = n.$$

(3) 对约化后的每一项，都可确定由(10.154)式给出的$U(1)$群的量子数.

例 将$SU(5)$按$SU(3)\otimes SU(2)$分导约化.

(10.156)式亦可写作

$$\begin{aligned} Q &= T_3 + Y \\ &= \mathrm{diag}\{0,0,0,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\} \\ &\quad + \mathrm{diag}\left\{-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\} \\ &= \mathrm{diag}\left\{-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},1,0\right\}, \end{aligned}$$

$SU(5)$基本表示 $SU(3)$ $SU(2)$ $SU(3)$ $SU(2)$

$$\underset{5(\text{维})}{\square} \Longrightarrow \underset{(3,1)_{-1/3}}{\square\otimes[0]} \oplus \underset{(1,\ 1/2)_{1/2}}{[0]\otimes\square} \qquad (10.155)$$

式中圆括号的下标为Y值，其中第一数字为$SU(3)$表示的维度，后一数字为$SU(2)$表示的维度.$SU(5)$10维表示

$$\underset{10}{\begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline\end{array}} \Longrightarrow \underset{(3,2)_{1/6}}{\square\otimes\square} \oplus \underset{(\bar{3},1)_{-2/3}}{\begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline\end{array}\otimes[0]} \qquad (10.156)$$

$$\oplus\ [0]\times \underset{(1,1)_1}{\begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline\end{array}}$$

$SU(5)$24维表示

$$\begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline \\ \cline{1-1} \\ \cline{1-1} \\ \cline{1-1}\end{array} \Longrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline \\ \cline{1-1} \\ \cline{1-1}\end{array} \otimes \square \oplus \begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline\end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline\end{array}$$

$$\oplus\ \square \otimes \begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline\end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline \\ \cline{1-1}\end{array} \otimes \begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline\end{array} \oplus \begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline\end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline \\ \cline{1-1}\end{array}$$

$$24 = (3,2)_{-5/6} \oplus (1,3)_0 \oplus (1,1)_0 \oplus (8,1)_0 \oplus (\overline{3},\ 2)_{5/6}. \tag{10.157}$$

在$SU(5)$大统一模型中，每味夸克有3种颜色. 每种夸克与轻子又分左手态与右手态. 这样，三代费米子，每一代都有15种(中微子只有左手态). 如第一代就是u_L^1、u_L^2、u_L^3，d_L^1、d_L^2、d_L^3，e_L、ν_{eL}；u_R^1、u_R^2、u_R^3、d_R^1、d_R^2、d_R^3、e_R. 其余各代依此类推. 它们在标准模型中，夸克与轻子没有什么关系. 若在$SU(5)$模型中分别填入5维和10维表示

$$\overline{5}: \quad \psi_L = \begin{pmatrix} \overline{d_L^1} \\ \overline{d_L^2} \\ \overline{d_L^3} \\ e^- \\ -\nu_e \end{pmatrix}, \tag{10.158}$$

$$10: \quad \psi_L = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & u_L^3 & -\overline{u}_L^2 & -u_L^1 & -d_L^1 \\ -\overline{u}_L^3 & 0 & \overline{u}_L^1 & -u_L^2 & -d_L^2 \\ \overline{u}_L^2 & -\overline{u}_L^1 & 0 & -u_L^3 & -d^3 \\ u_L^1 & u_L^2 & u_L^3 & 0 & -e^+ \\ \overline{d}_L^1 & d_L^2 & d_L^3 & e^+ & 0 \end{pmatrix}, \tag{10.159}$$

从而在每一代的轻子和夸克间建立起关联，那么就能自然地解释原来难以理解的每一代费米子的总电荷何以为零等等问题. 最有价值的是，它将强、弱作用与电磁作用成功地统一起来了.

由于夸克与轻子在$SU(5)$模型中处于同一多重态，因而预言质子会衰变. 遗憾的是，迄今尚未发现有关事例. 目前还有许多"修改"大统一模型的方案，但未得到实验支持. 无论如何$SU(5)$模型基于群论对于统一场论的有益探索，在许多方面依然给予我们有

益的启发.

3. $SU(5)$ 的生成元

$SU(5)$ 为四秩群，有 $5^2-1=24$ 个生成元. 考虑到它包括 $SU(3)\otimes SU(2)\otimes U_Y(1)$ 与 $U_e(1)$，在写出其生成元时要包含上面子群生成元的具体表示. 我们试图写出其基本表示，即 5 维表示. 在 $T_i(i=1,2,\cdots,24)$ 中，令 $T_i, i=1,\cdots,8$，为扩充的盖尔曼矩阵，即 $SU(3)$ 的生成元；令 T_{22}、T_{23} 为扩充的泡利矩阵，即 $SU(2)$ 的生成元；令 4 个对角矩阵形式为

$$p=\frac{1}{\sqrt{2k(k+1)}}\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & -k & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

（其中对角元 1 共 k 个）

$$k=1,2,3,4,$$

其实它们也是第三个泡利矩阵 σ_3 的推广. 其它的生成元是

$$T_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_4=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_5=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&-\mathrm{i}&0&0\\0&0&0&0&0\\\mathrm{i}&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},\quad T_6=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$T_7=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&-\mathrm{i}&0&0\\0&\mathrm{i}&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},\quad T_8=\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

以上 8 个是 $SU(3)$ 的生成元. $SU(2)$ 的 2 个生成元是

$$T_{22}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{pmatrix},\quad T_{23}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&-\mathrm{i}\\0&0&0&\mathrm{i}&0\end{pmatrix}.$$

对角生成元除 T_3、T_8 外,还有

$$T_{15}=\frac{1}{2\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&-3&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$T_{24}=\frac{1}{2\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&-4\end{pmatrix}.$$

其余 12 个均为非对角矩阵(泡利矩阵推广),

$$T_9 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_{10} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_{11} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_{12} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_{13} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_{14} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_{16} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_{17} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_{18} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_{19} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_{20}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},\quad T_{21}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&\mathrm{i}\\0&0&0&0&0\\0&0&-\mathrm{i}&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

这些生成元实际上对应传递相互作用的规范场.在此我们不探究有关细节.容易验证 24 个生成元是厄米、无迹和归一化的：

$$T_i=T_i^+,\quad \mathrm{Tr}(T_i)=0\quad (i=1,2,\cdots,24),$$

$$\mathrm{Tr}(T_iT_j)=\frac{1}{2}\delta_{ij}\quad (i,j=1,2,\cdots,8).\qquad (10.160)$$

问　　题

1. 由(10.151)式定义电荷算符,试验证由(10.158)式给出的费米子填充,得到正确的电荷值.

[提示:代入本征值方程

$$[Q,\ \psi]=-q\psi,\qquad (10.161)$$

$$\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&0&0&0&0\\0&-\frac{1}{3}&0&0&0\\0&0&-\frac{1}{3}&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{d}_L^1\\\bar{d}_L^2\\\bar{d}_L^3\\e_L^-\\-\nu_e\end{pmatrix}=q\begin{pmatrix}\bar{d}_L^1\\\bar{d}_L^2\\\bar{d}_L^3\\e_L^-\\-\nu_e\end{pmatrix}.$$

对于 $\psi_{L_1}=\bar{d}_L^1$,$[Q,\psi]_1=Q_1^a\psi_a=Q_1^1\psi_1=-q_1\psi$,因此 $q_1=-Q_1^1=-(-1/3)=+1/3$,这正是反 d 夸克的电荷值.又如 $[Q,\psi]_4=Q_1^4\psi_4=-q_4\psi_4$,$q_4=-Q_1^4=-(+1)=-1$,这正是电子的电荷值.]

2. 验证由(10.164)式给出的费米子填充给出通常夸克模型

赋予的电荷值.

[提示：仍然由(10.161)式，但共轭表示 $\overline{5}$ 用 Q，非共轭表示 10(维)用 $-Q$. 注意在(10.161)式中，

$$[Q,\ \psi]^{ab} = Q^a_c \psi^{cb} - \psi^{ca} Q^b_c$$
$$= (Q^a_a + Q^b_b)\psi^{ab} = q\psi^{ab},$$

亦即

$$q^{ab} = Q^a_a + Q^b_b.$$

在(10.169)式中，对角元 $q^{aa} = 0(a = 1,\cdots,5)$. 如 $q^{12} = Q^1_1 + Q^2_2 = -2/3$，正好是反 u 夸克的电荷，如此等等.]

3. 试对 $SU(5)$ 的 $\overline{5}$、10(维)表示按 $SU(3)\otimes SU(2)\otimes U(1)$ 作分导分解.

[提示：$\overline{5}$ 表示：$\psi_{La}(a = 1,\cdots,5)$，可以分解为 $\psi_{L\alpha}(\alpha = 1,2,3)$ 和 $\psi_{L\beta}(\beta = 4,5)$. 前者是 $SU(3)$ 的 $\overline{3}$ 表示，$SU(2)$ 的单态表示；后者则是 $SU(2)$ 的 $\overline{2}$ 表示，$SU(3)$ 的单态表示；分别可记为 $(\overline{3},1)$ 和 $(1,\overline{2})$. 至于两者在 $U_Y(1)$ 的本征值，可考虑

$$[Y,\psi] = -y\psi$$
$$\Longrightarrow [Y,\psi]_a = Y^b_a \psi_b = -y\psi_b,$$

亦即 $\quad y_a = -Y^a_a,\quad y_\alpha = -\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{3},\quad y_\beta = -\dfrac{1}{2}.$

如从 $Y = Q - T_3$ 出发，亦可得同样结果，故

$$\overline{5} = \left(\overline{3},1,\frac{1}{3}\right) \oplus \left(1,\overline{2},-\frac{1}{2}\right).$$

对于 10 维表示，只需注意，此时在(10.174)式中 Y 应代之以 $-Y$，

$$[-Y,\psi]^{ab} = -Y^a_c\psi^{cb} + \psi^{ca}Y^b_c = -y\psi^{ab}$$
$$\Longrightarrow y^{ab} = Y^a_a + Y^b_b.$$

$$SU(3):\ y^{\alpha_1\alpha_2} = Y^{\alpha_1}_{\alpha_1} + Y^{\alpha_2}_{\alpha_2} = 2\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3};$$

$$SU(3)\text{ 与 }SU(2)\text{ 混合：}\ y^{\alpha\beta} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6};$$

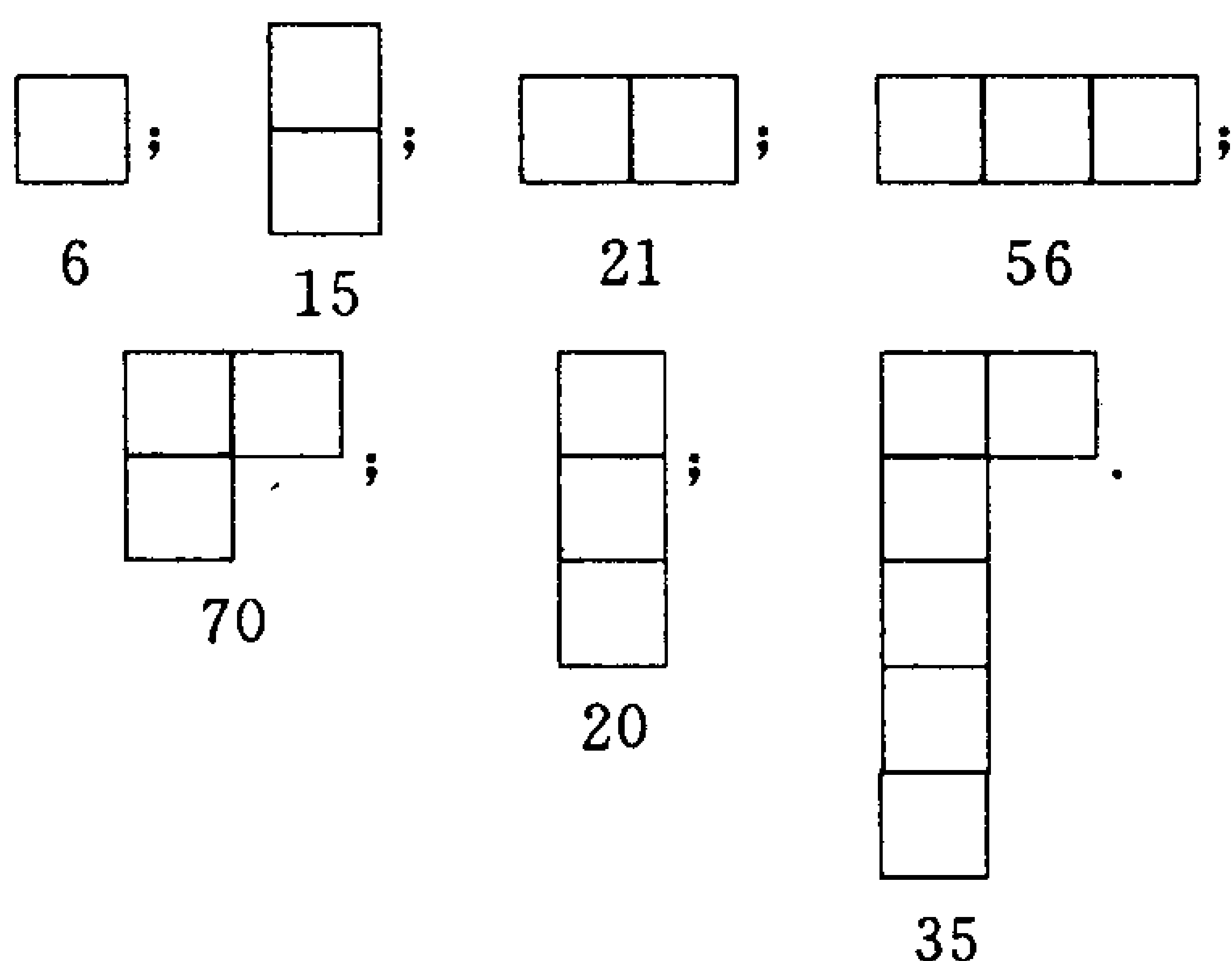
$$SU(2): Y^{45} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1;$$

故有 $10 = \left(\bar{3}, 1, -\frac{2}{3}\right) \oplus \left(3, 2, \frac{1}{6}\right) \oplus (1, 1, 1).$]

4. 验证：

$$\begin{cases} \frac{\sigma_3}{2} = \frac{\sqrt{10}}{4} T_{24} - \frac{\sqrt{6}}{4} T_{15}, \\ Y = -\frac{5}{2\sqrt{10}} T_{15} - \frac{\sqrt{6}}{4} T_{24}. \end{cases}$$

5. 对于 $SU(6)$ 的不可约表示



对其子群作分导约化.

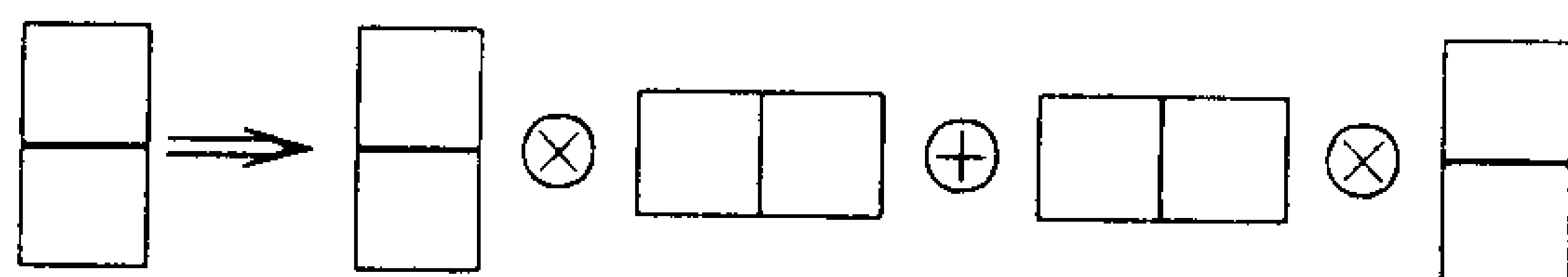
[提示：此时杨图约化规则是

$$\begin{array}{ccc} SU(nm) & \longrightarrow & SU(n) \otimes SU(m) \\ [\omega] & & [\lambda] \otimes [\mu] \end{array}$$

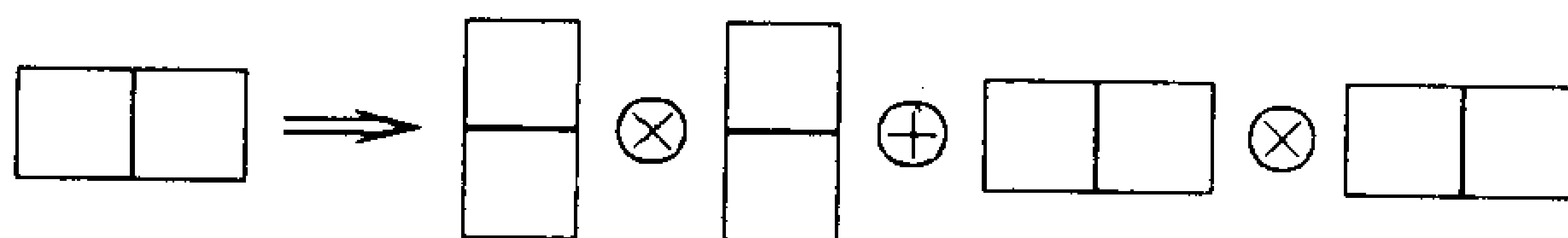
三个杨图均为 N 格，其中 N 为杨图对应不可约表示张量的阶；$[\lambda] \otimes [\mu] = [\omega] \oplus \cdots$；杨图$[\omega]$行数不超过 nm，$[\lambda]$ 不超过 n，$[\mu]$ 不超过 m. 因此

$$\square \Longrightarrow \square \otimes \square$$

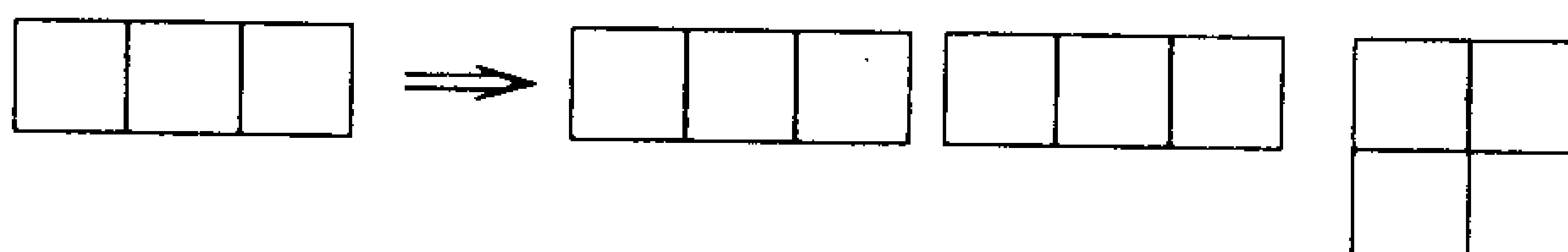
$6 \Rightarrow (3,2)$



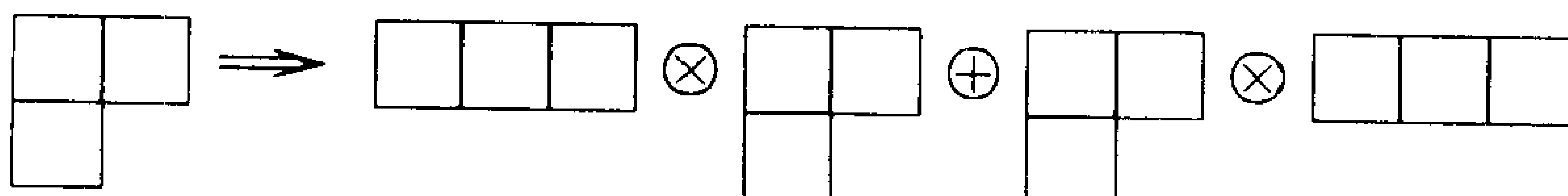
$$15 \Longrightarrow (\bar{3},\ 3) \oplus (6,1)$$

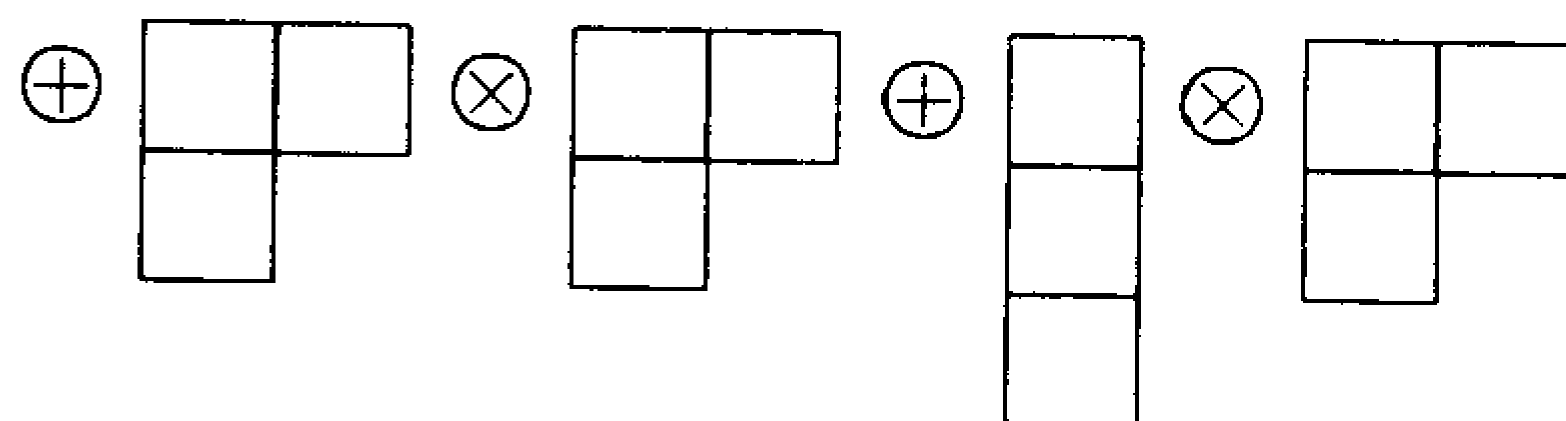


$$21 \Longrightarrow (\bar{3},\ 1) \oplus (6,\ 3)$$

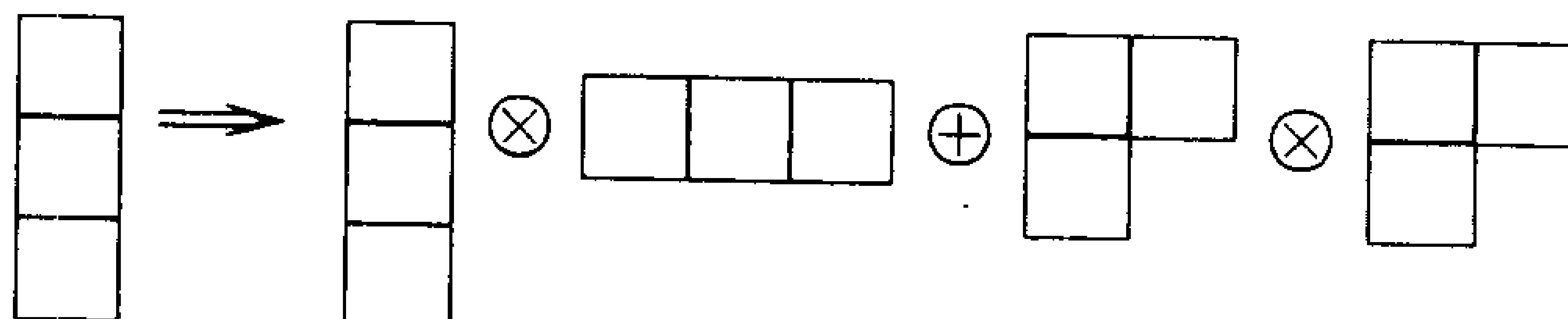


$$56 \Longrightarrow (10,4) \otimes (1,6) + (8,2)$$

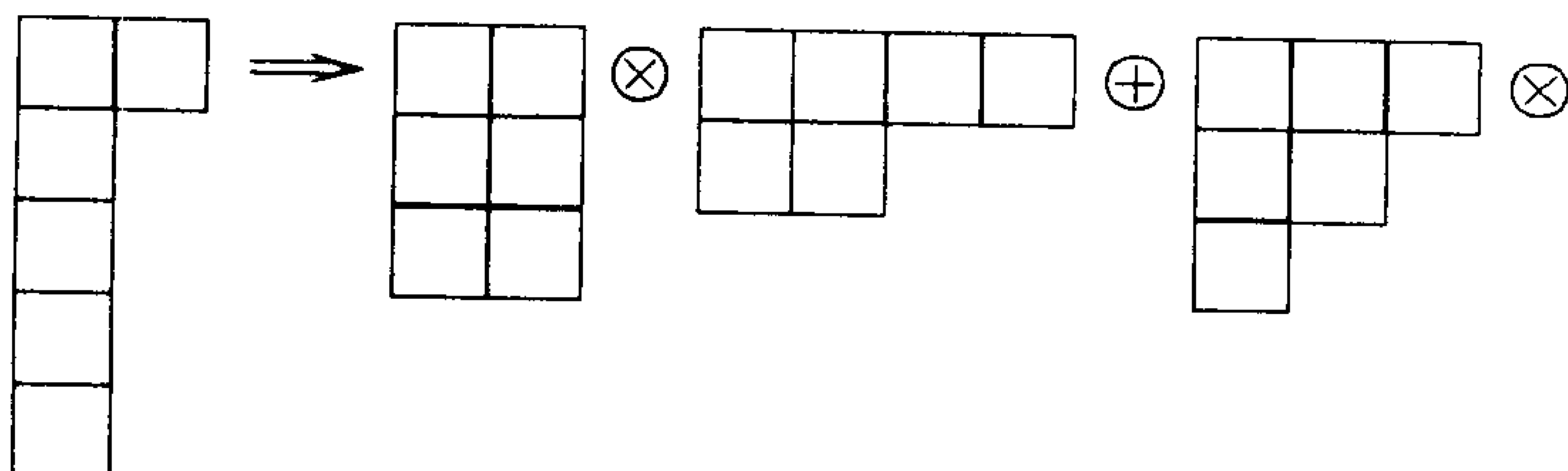


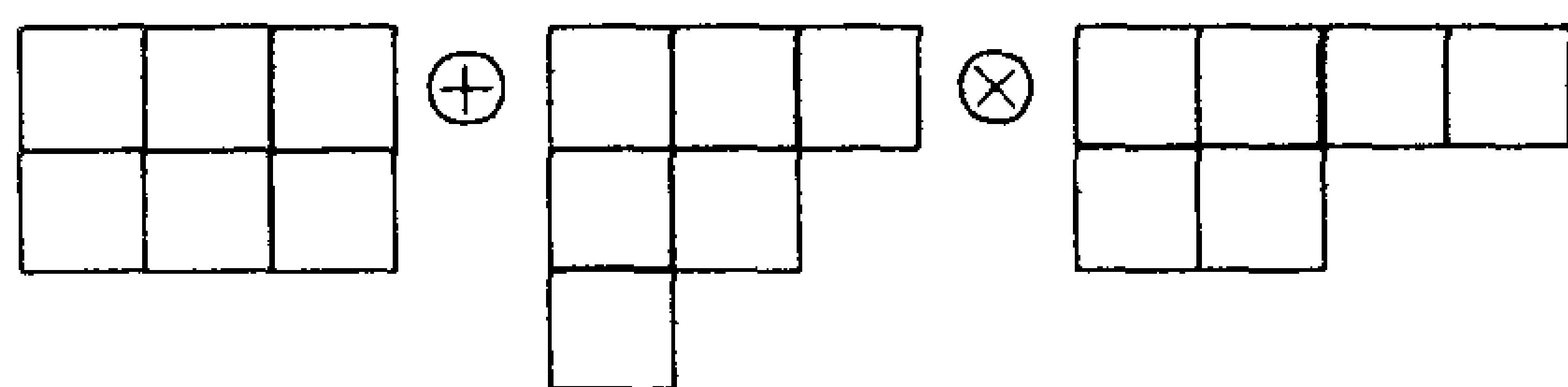


$$70 \Longrightarrow (10,2) \oplus (8,4) \oplus (8,2) \oplus (1,2)$$



$$20 \Longrightarrow (1,\ 4) \oplus (8,2)$$





$$35 \Longrightarrow (1,3) \oplus (8,1) \oplus (8,3)$$

实际上，右边出现的杨图有对称性限制. 如以 S、A 和 M 分别表示对称、反对称和混和对称，应有关系：

$SU(nm)$	$SU(n)$ 或 $SU(m)$
乘积图形	因子图形
S	SS 或 AA
A	SA
M	SM 或 MS
S、A 或 M	MM.]

§ 10.6 李群在工程技术中的应用大意

群论的发展，使其应用已遍及科学技术各个领域. 例如，最近有人将所谓刚体位移李群运用于机械设计，就得到十分有趣的结果. 但是对于任何有关细节的深究，必然牵涉许多背景知识. 本节主要介绍 1997 年斯坦福大学阿贝勒克(M. Oberlack)提出的基于李群论的一套方法，如何在大雷诺数湍流中发现新的标度律. 与经典标度律相比较，这些标度律或称自相似解或稳态解，是从中心线而非分界面定标的. 从以下概略的叙述中，读者从中还可看到李当年建立李群的本意. 李群最早是为寻找微分方程的自映射变换点发展起来的. 李发现李群论可以将几乎所有常微分方程与偏微分方程求精确积分(解析解)的所有方法统一起来，并且还可应用到不能用普通方法处理的非线性微分方程. 群分析是唯一的寻找微分方程的对称性的严格数学方法. 一旦知悉方程的对称性，就会有许多有价值的结果：对方程降阶，因而易获取完整积分；将非线性方程线性化；将线性微分方程变为常系数微分方程. 而最广泛的应

用，是求得偏微分方程的自相似解，即标度律.

1. 管道湍流的标度律

早在 1914 年，斯坦通与潘勒尔（T. E. Stanton 与 J. R. Pannel）在管道湍流研究中发现，当雷诺（Reynolds）数达到 3.5×10^7时，平均流速的泛函形式可以用所谓缺陷-标度律（The defect-law scalling）表示

$$\frac{\overline{u}_e-\overline{u}}{u_\tau}=f\left(\frac{y}{R}\right),\tag{10.162}$$

其中$\overline{u}$、$\overline{u}_e$、u_τ、R和y分别表示平均流速、中心线速度、摩擦速度、管半径和到管壁的距离. 根据经验推理，1958 年达西（P. Darcy）已经提出，上式实际上应为

$$\frac{\overline{u}_e-\overline{u}}{u_\tau}=5.08\left(1-\frac{y}{R}\right)^{3/2}.\tag{10.163}$$

目前的研究表明，达西定理是正确的. 以后人们又提出许多标度律，这里我们就不一一细说了.

1994 年云奈尔（G. Unal）、依勃拉基莫夫（N. G. Ibragimov）等首先尝试用李群分析湍流问题，将群论方法用于分析勒维-斯托克斯（Navier-Stokes）方程的对称性，得到方程的所有精确解，以及经典力学中所有公理化变换的性质. 例如，有限旋转的标度不变性和结构的不变性、时空变换的结构（frame）不变性、伽利略不变性及其推广，以及二维物质结构的均匀性，等等. 现代群论方法用于微分方程，始于 1992 年，由希尔（J. M. Hill）首先提出.

标度律实际上是勒维-斯托克斯方程对称性的反映. 目前广泛应用的 K-ϵ 模型实际上违背了该方程的对称性. 研究表明，这个模型不能应用在大曲率层流问题中. 同时模型预言在旋转管道中会出现固体（Solid-body）旋转，但并未得到实验支持.

讨论在柱面坐标系中以恒定角速绕子轴旋转的不可压缩的勒维-斯托克斯方程.

设用U_z、U_r、U_ϕ表示流体即时速度矢量的轴向、径向和横向(the azimuthal directions)分量，p、ν表示压力和运动学粘滞率，$\Omega_z = \omega = \text{const}$，表示系统的角速率，则方程为

$$\frac{\partial U_z}{\partial t} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} + U_r \frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{U_\phi}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \phi}$$
$$= -\frac{\partial P}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U_z}{\partial \phi^2}\right), \tag{10.164a}$$

$$\frac{\partial U_r}{\partial t} + U_z \frac{\partial U_r}{\partial z} + U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_\phi}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \phi} - \frac{U_\phi^2}{r}$$
$$= -\frac{\partial P}{\partial r} + \nu\left[\frac{\partial^2 U_r}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rU_r)\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U_r}{\partial \phi^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial U_\phi}{\partial \phi}\right] + 2\Omega U_\phi, \tag{10.164b}$$

$$\frac{\partial U_\phi}{\partial t} + U_z \frac{\partial U_\phi}{\partial z} + U_r \frac{\partial U_\phi}{\partial r} + \frac{U_\phi}{r} \frac{\partial U_\phi}{\partial \phi} + \frac{U_\phi U_r}{r}$$
$$= -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \phi} + \nu\left[\frac{\partial^2 U_\phi}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rU_\phi)\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U_r}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial U_r}{\partial \phi}\right] - 2\Omega U_r, \tag{10.164c}$$

连续性方程为

$$\frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rU_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial U_\phi}{\partial \phi} = 0. \tag{10.165}$$

现引入平均量. 由于轴对称，所有平均量只依赖于r. 平均速度只有轴向分量与极角方向分量. 现对压力与速度作标准雷诺分解：

$$\begin{cases} P = \bar{p} + p, \quad U_z = \bar{u}_z + u_z \\ U_\phi = \bar{u}_\phi + u_\phi, \quad U_r = \bar{u}_r + u_r, \end{cases} \tag{10.166}$$

其中上面横线表示系综平均，小写字母均表示涨落量.

平均压力分为常压力梯度的轴向部分以及湍流正规压力产生的径向部分. 故压力以后用$-Kz + \bar{p}(r)$代替. 显然，$\nabla_z \bar{p} = -k$.

当然在旋管流问题中，正规压力包含离心力.

目前仅限于考虑稳态平行平均层流，因此有方程（下面分析会用到）

$$\frac{\partial \overline{u}_z}{\partial z} = \frac{\partial \overline{u}_z}{\partial \phi} = \frac{\partial \overline{u}_z}{\partial t} = \frac{\partial \overline{u}_\phi}{\partial z} = \frac{\partial \overline{u}_\phi}{\partial \phi} = \frac{\partial \overline{u}_\phi}{\partial t}$$
$$= \frac{\partial \overline{p}}{\partial z} = \frac{\partial \overline{p}}{\partial \phi} = \frac{\partial \overline{p}}{\partial t} = \overline{u}_r = 0. \tag{10.167}$$

在现在的研究中，只涉及到平均速度的分析，因此无需再分别导出平均量与涨落量的方程. 将雷诺分解代入(10.164)、(10.165)就会得到形式有点特殊的勒-斯方程和连续性方程：

$$N_1 = \frac{\partial u_z}{\partial t} + (\overline{u}_z + u_z)\frac{\partial u_z}{\partial z} + u_r\frac{\partial(\overline{u}_z + u_z)}{\partial r}$$
$$+ \frac{\overline{u}_\phi + u_\phi}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \phi} + \frac{\partial p}{\partial z} - K - \nu\left[\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial(\overline{u}_z + u_z)}{\partial r}\right] + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \phi^2}\right) = 0, \tag{10.168a}$$

$$N_2 = \frac{\partial u_r}{\partial t} + (\overline{u}_z + u_z)\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\overline{u}_z + u_z}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{(\overline{u}_\phi + u_\phi)^2}{r}$$
$$+ \frac{\partial \overline{p}}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} - \nu\left[\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_z)}{\partial r}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \phi^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial^2 u_\phi}{\partial \phi^2}\right] - 2\Omega(\overline{u}_\phi + u_\phi) = 0, \tag{10.168b}$$

$$N_3 = \frac{\partial u_\phi}{\partial t} + (\overline{u}_z + u_z)\frac{\partial u_\phi}{\partial z} + u_r\frac{\partial(\overline{u}_\phi + u_\phi)}{\partial r}$$
$$+ \frac{\overline{u}_z + u_z}{r}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{(\overline{u}_\phi + u_\phi)u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \phi}$$
$$- \nu\left[\frac{\partial^2 u_\phi}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r(\overline{u}_\phi + u_z))}{\partial r}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\phi}{\partial \phi^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial^2 u_\phi}{\partial \phi^2}\right] + 2\Omega u_\phi = 0. \tag{10.168c}$$

为便于分析，以上方程简记为 $N_i = 0(i = 1,2,3)$. 连续性方程则

变成涨落量满足的方程，形式上与(10.163)式完全相同

$$\mathscr{B}=\frac{\partial u_z}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi}=0. \qquad (10.169)$$

方程组(10.166)与(10.167)构成一组非封闭的方程，原因是变量多于方程个数.通常这要求引入更高阶的统计矩方程，以寻求湍流的标度律.但目前的讨论无需这样做.为了获取平均流的标度律，只需考虑平均速度方程与二阶速度乘积方程(VPE).在下面讨论中，VPE将只涉及普通二阶矩方程，此时平均过程略而不计.由VPE方法导出的自相似速度，通过对物理空间的两点关联方程亦可以得到(见问题).

由于柱面坐标系的正交性，VPE可以写成二元乘积的形式

$$N_iu_j+N_ju_i=0, \qquad (10.170)$$

其中 $u_1=u_z, u_2=u_r, u_z=u_\phi$.

此处所用研究方法有两个优点：① 在通常二阶矩方程，需要考虑大量非封闭项(条件).原则上需要计及所有无穷个高阶相关性，才能证明下面将要得到的标度律与全部高阶相关性方程相容. ② 可以证明，为了显示平均速度标度律与所有高阶矩方程的协调性，无需考虑比二阶矩方程(10.168)更高阶的方程.

2. 管中湍流的对称性分析

目前，在我们讨论中包括的变量是

$$y=\{z,r,\phi,t,\nu,u_z,u_r,u_\phi,p,\overline{u}_z,\overline{u}_p,\overline{p}\},$$

注意在此式中，粘滞率 ν 实际上是一个辅助变量.李群分析的经典思想就是等价变换.对称性分析的目的，在于通过变换寻求新变量：

$$\begin{aligned}y^*&=\{z^*,r^*,\phi^*,t^*,\nu^*,u_z^*,u_r^*,u_\phi^*,p^*,\overline{u}_z^*,\overline{u}_\phi^*,\overline{p}^*\}\\&=f(y;\varepsilon)\end{aligned} \qquad (10.171)$$

使得方程(10.168)、(10.169)和(10.170)对于新变量形变保持不变：

$$\mathscr{B} = \mathscr{B}^*, \tag{10.172a}$$

$$N_i = N_i^*, \tag{10.172b}$$

$$(N_i u_j + N_j u_i) = (N_i u_j + N_j u_i)^*.$$

对称性分析的目的，在于寻求满足对称性条件(10.172) 的变换 f 的最一般形式. 若 f 代入(10.172) 各式的右边，就会得到高阶超定的关于映射函数 f 的非线性微分方程. 求解此方程极为困难，同时并非必要. 变换 f 一般可以分为两部分：有限变换群与连续变化群. 对于勒-斯方程，允许的有限群为反射对称变换：$u^* = -u, x^* = -x$. 然而，为了寻求自相似或不变解，只需考虑连续变换群. 变换往往依赖 1 个或几个参数，即是(10.170) 式中的 ε.

对变换(10.170) 按 ε 展开

$$y^* = y + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} + O(\varepsilon^2). \tag{10.172}$$

如果只保留线性项，就是

$$y^* = y + \varepsilon\xi_z,\ r^* = r + \varepsilon\xi_r,\ \phi^* = \phi + \varepsilon\xi_\phi,$$
$$t^* = t + \varepsilon\xi_t,\ \nu^* = \nu + \varepsilon\xi_\nu,$$
$$u_z^* = u_z + \varepsilon\eta_{u_z},\ u_r^* = u_r + \varepsilon\eta_{u_r},\ u_\phi^* = u_\phi + \varepsilon\eta_{u_\phi},\ p^* = p + \varepsilon\eta_p,$$
$$\bar{u}_z^* = \bar{u}_z + \varepsilon\eta_{\bar{u}z},\ \bar{u}_\phi^* = \bar{u}_\phi + \varepsilon\eta_{\bar{u}\phi},\ \bar{p}^* = \bar{p} + \varepsilon\eta_{\bar{p}}, \tag{10.173}$$

在此式中，代换 f 只需确定无穷小生成元 $\xi = \xi(y), \eta = \eta(y)$，等等，其中 $\xi_z = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}$. 给定 ξ 与 η，整体变换 f 就可以由李方程(10.173) 唯一确定. 它实际上是线性方程，一般容易求解.

要确定 ξ 与 η，先将无穷小变换(10.173) 代入(10.171) 式. 例如连续性方程 $\mathscr{B} = \mathscr{B}^*$ 就变为 $\mathscr{B} = \mathscr{B} + \varepsilon X\mathscr{B} + O(\varepsilon^2)$. 若略去高阶项，则得领头项(Leading-order) 方程 $X\mathscr{B} = 0$，其中 X 的定义又如下：

$$X = \xi_z \frac{\partial}{\partial z} + \xi_r \frac{\partial}{\partial r} + \xi_\phi \frac{\partial}{\partial \phi} + \xi_t \frac{\partial}{\partial t} + \xi_\nu \frac{\partial}{\partial \nu} + \eta_{u_z} \frac{\partial}{\partial u_z} + \eta_{u_r} \frac{\partial}{\partial u_r}$$

$$+ \eta_p \frac{\partial}{\partial p} + \eta_{\bar{u}_z} \frac{\partial}{\partial \bar{u}_z} + \eta_{\bar{u}_r} \frac{\partial}{\partial \bar{u}_r} + \eta_{\bar{p}} \frac{\partial}{\partial \bar{p}}. \qquad (10.174)$$

推广之，在条件(10.172)下，由(10.173)与(10.174)式可得

$$X\mathscr{B} = 0, \quad XN_i = 0 \quad (i = 1,2,3). \qquad (10.175)$$

最后得到一组关于 ξ 与 η 的线性超定微分方程组，方程数目超过 100 以上. 该方程组的解确定无穷小算子 ξ 和 η. 算子 X(见(10.174)式)与其扩展(10.175)式，加上计算出的生成元，应用到(10.169)式，就有

$$X(N_i u_j + N_j u_i) = 0 \quad (i,j = 1,2,3), \qquad (10.176)$$

于是，得到一组约化的一组生成元.

事实上，由(10.175)式得到的生成元是

$$\begin{aligned}
&\xi_z = a_1(\nu)z + f_1(t,\nu), \qquad \xi_r = a_1(\nu)r,\\
&\xi_\phi = -a_2(\nu)t\Omega + a_3(\nu), \quad \xi_t = a_2(\nu)t + a_4(\nu),\\
&\xi_\nu = [2a_1(\nu) - a_2(\nu)]\nu,\\
&\eta_{u_z} = [a_1(\nu) - a_2(\nu)](\bar{u}_z + u_z) + \frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}t}\\
&\qquad - g_1(r,\nu,\bar{u}_z,\bar{u}_\phi,\bar{p}),\\
&\eta_{u_r} = [a_1(\nu) - a_2(\nu)]u_r,\\
&\eta_{u_\phi} = [a_1(\nu) - a_2(\nu)](\bar{u}_\phi + u_\phi) - g_2(r,\nu,\bar{u}_z,\bar{u}_\phi,\bar{p})\\
&\qquad - a_2(\nu)r\Omega,\\
&\eta_{u_p} = 2[a_1(\nu) - a_2(\nu)](\bar{p} + p)\\
&\qquad - z\left[\frac{\mathrm{d}^2 f_1}{\mathrm{d}t^2} + [a_1(\nu) - 2a_2(\nu)K]\right]\\
&\qquad - g_3(r,\nu,\bar{u}_z,\bar{u}_\phi,\bar{p}) - a_2(\nu)r^2\Omega^2 + f_2(t,\nu),\\
&\eta_{\bar{u}_z} = g_1(r,\nu,\bar{u}_z,\bar{u}_\phi,\bar{p}), \ \eta_{\bar{u}_\phi} = g_2(r,\nu,\bar{u}_z,\bar{u}_\phi,\bar{p}),\\
&\qquad \eta_{\bar{p}} = g_3(r,\nu,\bar{u}_z,\bar{u}_\phi,\bar{p}),
\end{aligned} \qquad (10.177)$$

其中所有群参数均依赖于 ν. 考虑速度乘积方程(10.170)，将上面生成元组约化为

$$\xi_z = a_1(\nu)z + b_1(\nu)t + b_2(\nu), \quad \xi_r = a_1(\nu)r,$$

$$\xi_\phi = -a_2(\nu)t\Omega + a_3(\nu),$$

$$\xi_t = a_2(\nu)t + a_4(\nu), \qquad \xi_\nu = [2a_1(\nu) - a_2(\nu)]\nu,$$

$$\eta_{u_z} = [a_1(\nu) - a_2(\nu)]u_z, \quad \eta_{u_r} = [a_1(\nu) - a_2(\nu)]u_r,$$

$$\eta_{u_\phi} = [a_1(\nu) - a_2(\nu)]u_\phi,$$

$$\eta_{u_p} = 2[a_1(\nu) - a_2(\nu)]p - h_1(r,\nu)$$

$$- z[a_1(\nu) - 2a_4(\nu)]K - a_2(\nu)r^2\Omega^2 + f_3(t,\upsilon),$$

$$\eta_{\bar{u}_z} = [a_1(\nu) - a_2(\nu)]\bar{u}_z + b_1(\nu),$$

$$\eta_{\bar{u}_\phi} = [a_1(\nu) - a_2(\nu)]\bar{u}_\phi - a_2(\nu)r\Omega,$$

$$\eta_{\bar{p}} = 2[a_1(\nu) - a_2(\nu)]\bar{p}, + h_1(r,\nu). \tag{10.178}$$

在原则上,无穷小算子(10.178)可以用于计算整体变换(10.171),从而得到自相似解.由于可以由无穷小量直接得到自相似变量,就不必绕弯子采取上述步骤.所谓微分方程自相似解的最重要性质就是,可以用更少的独立变量来表示.自相似解的另一个等价表述就是它们不受对称变换的影响,或者说,在对称变换下,解的形式具有不变性.

3. 自相似解

设将要得到的自相似解的形式为

$$z = \Theta(x), \tag{10.179}$$

其中 z 是相应所有相关变量的矢量,x 则表示所有独立变量(包含 ν) 构成的矢量.改写上式为隐性表示

$$F(x,z) = z - \Theta(x) = 0. \tag{10.180}$$

自相似性可以用两个充分而必要的条件表示之:①$F=0$ 是方程(10.165)~(10.168)的一个解;② 在上述方程允许下,$F=0$ 相对于对称变换具有不变性.在李群论中,条件 ② 可以写作

$$XF = X[z - \Theta(x)]|_{z=\Theta(x)} = 0. \tag{10.181}$$

完成计算 X 的微分运算,(10.181) 式可改写为

$$\xi_i = \xi_i(x, \Theta(x)) \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} = \eta(x, \Theta(x)). \tag{10.182}$$

利用特征线法，方程(10.182)可以解出.特征线法给出常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}z}{\xi_z} = \frac{\mathrm{d}r}{\xi_r} = \frac{\mathrm{d}\phi}{\xi_\phi} = \frac{\mathrm{d}t}{\xi_t} = \frac{\mathrm{d}\nu}{\xi_\nu} = \frac{\mathrm{d}u_z}{\eta_{uz}} = \frac{\mathrm{d}u_r}{\eta_{ur}}$$
$$= \frac{\mathrm{d}u_\phi}{\eta_{u_\phi}} = \frac{\mathrm{d}\overline{u}_z}{\eta_{\overline{u}_z}} = \frac{\mathrm{d}\overline{u}_\phi}{\eta_{\overline{u}_\phi}} = \frac{\mathrm{d}p}{\eta_p} = \frac{\mathrm{d}\overline{p}}{\eta_{\overline{p}}}, \tag{10.183}$$

(10.183)式称为不变曲面条件.在特征线法中，积分常量被视为新的变量.从此式明显看出，积分常量的数目比原始变量要少一个，因此导致自相似性的降低.

一般来说，自相似性可能依赖于粘滞性 ν 或雷诺数.但目前理论不能导出雷诺数的精确泛函关系，因为群参数对于粘滞性的依赖性是任意的.此外，许多实验表明，雷诺数趋于无穷时，平均量与雷诺数无关.在分析高雷诺数的自相似性时，大雷诺数极限也许可以下述群参数的弱限制所替代，

$$\lim_{\nu \to 0} K(\nu) = \text{有限}, \tag{10.184}$$

其中 K 代表所有群参数.这一条件不能限制自相似解的数目与泛函形式，却可导致在自相似解中出现的常量与粘滞性无关.从此式可得，$\overline{u}_z$ 和 $\overline{u}_\phi$ 的不变表面条件将变为

$$\frac{\mathrm{d}r}{a_1 r} = \frac{\mathrm{d}\overline{u}_z}{[a_1 - a_2]\overline{u}_z + b_1},$$
$$\frac{\mathrm{d}r}{a_1 r} = \frac{\mathrm{d}\overline{u}_\phi}{[a_1 - a_2]\overline{u}_\phi - a_2 \nu \Omega}, \tag{10.185}$$

这里已经用到约化无穷小算子(10.177)，群参数 a_1、a_2 相应于经典理论中时间与空间可以任意延展，是描述两个标度或扩展群；b_1 则相应经典伽利略变换群.从条件(10.174)得到的标度律易于积分.以下 3 种情况分别对应 3 种破缺的对称性.

(1) 平均轴向和方位角速度的代数分布($a_1 \neq a_2 \neq 0$, $b_1 \neq 0$).这是最普遍的形式，在流体中的标度性没有对称性破缺.方程

(10.174) 可以积分，得到平均径向与方位角速度为

$$\bar{u}_z = -\frac{b_1}{a_1 - a_2} + c_1 r^{1-a_2/a_1}, \quad (10.186)$$

$$\bar{u}_\phi = c_2 r^{1-a_2/a_1} - \Omega r, \quad (10.187)$$

其中 c_1 与 c_2 为积分常数. 最近实验资料证实了上述分布.

(2) 对数型平均轴向速度分布($a_1 = a_2 \neq 0, b_1 \neq 0$). 若有外部速度标度作用在流体上时，会出现参数的这种组合. 在这种情况下，在(10.167) 中的涨落速度的无穷小生成元为零，因此 u_z、u_ϕ 与 u_r 是常量. 对于平面平行层流，这导致对数型的平均速度分布

$$\bar{u}_z = \frac{b_1}{a_1}\ln(r) + c_3. \quad (10.188)$$

此时对数型发散出现在管轴，而不是在经典理论中，在管壁出现奇异性. 这就是所谓环对数定理(Circularlog-law). 这种分布似乎出现在快速旋转的管流中半径的某些截面处，此时管壁速度就是对称性破缺的速度标度. 相应的方位角速度为

$$\bar{u}_\phi = -\Omega r + c_4. \quad (10.189)$$

此式当 $r = 0$，即中轴线处失效，否则 $c_4 = 0$. 一般而论，c_3 与 c_4 都是不为零常数.

(3) 双曲线型的平均速度分布($a_1 = 2a_2 \neq 0, b_1 \neq 0$). 在这种情况下，(10.178) 式中 ν 的生成元为零，因此粘滞率是常量. 容易得到

$$\bar{u}_z = \frac{b_1}{a_1} + \frac{c_5}{r}, \quad (10.190)$$

$$\bar{u}_\phi = \frac{c_6}{r} - \Omega r, \quad (10.191)$$

后式相当于有势涡流(the potential vortex). 由于层流中粘滞率总为常量，这可能是仅有的具有不变解的情况.

对于管流而言，将管置于转动坐标系，但具有不动的管壁，与管壁在惯性系中转动，两种情况完全等价. 由于坐标系旋转，只有在方位角速度的标度律中出现实心(solid-body)转动项. 然而，这

不会改变在惯性系中标度律的形式，这如前所述. 因此，不失一般性，我们可以将讨论局限到 $\Omega = 0$ 的惯性系.

关于实验和数值中管流标度律的研究进展，以及与上述理论的对比，自然也是饶有兴趣的问题，但与李群论关系不大，兹不赘述.

4. 近管壁处的标度律

前面群论分析，并不适用近管壁处通常对数区域. 实验表明，对数区域应在 $0.9 \leqslant \frac{r}{R} \leqslant 1.0$（$R$ 为管半径）处是有效的. 这个区域是管曲率对流体影响最弱的地方，因此，对于大管道半径而言，通常的展开应是可以应用的. 实际可以证明，在近管壁区域的方程展开式中领头项等价于平板层流方程.

为此引入新坐标系（见图 10.9）：

$$z = z,\ y = R - r,$$
$$s = r\phi,\ U_z = U_z, \qquad (10.192)$$
$$U_y = -U_r, U_s = U_\phi,$$

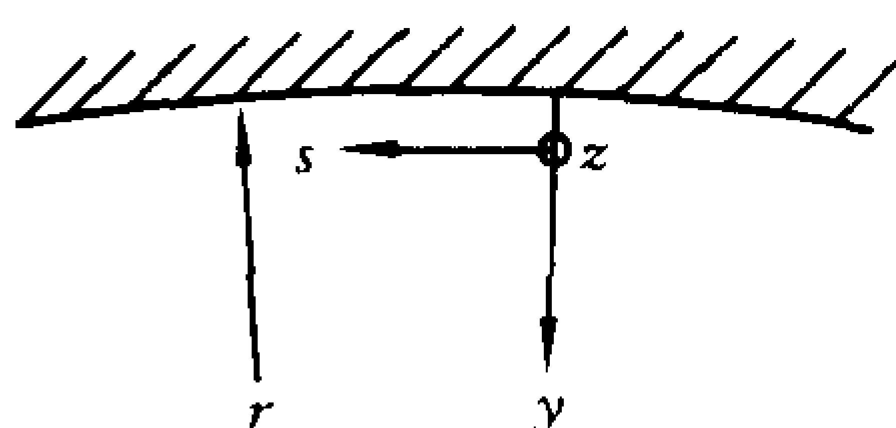


图 10.9 适用于近管壁标度律的壁基坐标系示意图

其中坐标 s 沿圆弧变化，y 则是所谓壁基坐标，方向指向管心. 为了得到在新坐标系中近管壁区的领头项，先对新坐标无量纲化，

$$u_\tau = \left[\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\bigg|_{y=0}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad l^+ = \nu / u_\tau, \qquad (10.193)$$

其中 u_τ 为阻滞速度，l^+ 为粘滞长度. 将(10.192) 和(10.193) 式代入(10.168) 和(10.169)，得到

$$\frac{\partial U_z}{\partial t} + U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} + U_y \frac{\partial U_z}{\partial y} + U_s \frac{\partial U_z}{\partial s} + \frac{s}{y - Re_R} U_y \frac{\partial U_z}{\partial s}$$
$$= -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial s^2}$$

$$+\frac{2s^{1/2}}{y-Re_R}\frac{\partial}{\partial s}\left(s^{1/2}\frac{\partial U_z}{\partial y}\right)+\frac{2s^{1/2}}{y-Re_R}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial U_z}{\partial s}\right), \tag{10.194a}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial U_y}{\partial t}+U_z\frac{\partial U_y}{\partial z}+U_y\frac{\partial U_y}{\partial y}+U_s\frac{\partial U_y}{\partial s} \\
&\quad+\frac{1}{y-Re_R}\left(\frac{s}{2}\frac{\partial U_y^2}{\partial s}-U_s^2\right) \\
&=-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{s}{y-Re_R}\frac{\partial P}{\partial s}+\frac{\partial^2 U_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 U_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U_y}{\partial s^2} \\
&\quad+\frac{1}{y-Re_R}\left[2s^{1/2}\frac{\partial}{\partial s}\left(s^{1/2}\frac{\partial U_y}{\partial y}\right)-2\frac{\partial U_s}{\partial s}\right] \\
&\quad+\frac{1}{(y-Re_R)^2}\left(s^2\frac{\partial^2 U_y}{\partial s^2}+2s\frac{\partial U_y}{\partial s}-U_y\right),
\end{aligned} \tag{10.194b}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial U_s}{\partial t}+U_z\frac{\partial U_s}{\partial z}+U_y\frac{\partial U_s}{\partial y}+U_s\frac{\partial U_s}{\partial s} \\
&+\frac{1}{y-Re_R}\left(s\frac{\partial U_s}{\partial s}-U_sU_y\right) \\
&=-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial^2 U_s}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 U_s}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U_s}{\partial s^2} \\
&\quad+\frac{1}{y-Re_R}\left[2s^{1/2}\frac{\partial}{\partial s}\left(s^{1/2}\frac{\partial U_s}{\partial y}\right)+2\frac{\partial U_y}{\partial s}\right], \\
&\quad+\frac{1}{(y-Re_R)^2}\left(s^2\frac{\partial^2 U_s}{\partial s^2}+2s\frac{\partial U_s}{\partial s}-U_s\right),
\end{aligned} \tag{10.194c}$$

和

$$\frac{\partial U_z}{\partial z}+\frac{\partial U_y}{\partial y}+\frac{\partial U_s}{\partial s}+\frac{1}{y-Re_R}\frac{\partial}{\partial s}(sU_y)=0, \tag{10.195}$$

其中无量纲化的所有脚标都已略去，雷诺数定义为

$$Re_R=\frac{u_rR}{\nu}, \tag{10.196}$$

它亦可视为规一化的管半径. 当 Re_R-y 趋于极大时，方程(10.194) 与(10.195) 的领头项就是伽利略坐标系中的勒-斯方

程.

由于采用领头项方程,将前面得到的结果就可应用到近壁处的标度律问题.根据不变表面条件,可以得到相应平均流分布

$$\frac{\mathrm{d}y}{c_1 y + c_3} = \frac{\mathrm{d}\overline{u}_z}{[c_1 - c_4]\overline{u}_r + d_1}. \tag{10.197}$$

取决于群参数 c_1、c_3、c_4 和 d_1 的不同选择,(10.197) 式有 5 种不同的解,即代数型、指数型、对数型,以及从对称性观点看来的 2 种不同的线性速度分布.详情在此从略.

有关详情,读者可参阅 M. Oberlack, Similarity in non-rotating and rotating turbulent pipe flows, J. Fluid. Mech. (1999), Vol319, pp1—22; G. L. Barenblatt & A. J. Chorin, Scaling laws and zero viscosity limits for wall-bounded shear flows and local structure in develop turbulence, 1996, Centor for pure and Applied Mathematie, UC Berkeley, PAM—678.

问　　题

1. 对压力与速度作雷诺分解(10.166),试由方程(10.164)和(10.165)导出(10.168)和(10.169)式.

2. 在条件(10.172)下,试由生成元表达式(10.173),得约化生成元方程(10.174).

3. 试由不变表面条件(10.185),在条件 $a_1 \neq a_2 \neq 0, b_1 \neq 0$ 下,导出平均轴向速度和方位角速度的代数型分布(10.186)和(10.187).

4. 试由不变表面条件(10.185),在条件 $a_1 = a_2 \neq 0, b_1 \neq 0$ 下,由(10.185)导出平均轴向速度和方位角速度的对数型分布(10.188)和(10.189)式.

5. 根据条件 $a_1 = 2a_2 \neq 0, b_1 \neq 0$,由(10.185)式导出平均轴向速度和方位角速度的双曲型分布(10.190)和(10.191)式.

6. 引入新坐标系(10.192),并采用无量纲化条件(10.193),试由(10.162)和(10.163)导出新坐标系的勒-斯方程(10.194)和连续性方程(10.195).

7. 证明方程(10.194)与(10.195)的领头项方程就是伽利略坐标系的勒-斯方程和连续性方程.

8. 根据不变表面条件(10.185),可以由(10.197)式导出几种平均速度分布?其具体形式如何?

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝应用群论导引
作者＝张端明　　钟志成编著
页数＝４６３
ＳＳ号＝１０３０７０５０
出版日期＝２００１年０１月第１版